Appunti sul Vehicle Routing Problem

Marco Pranzo

Corso di Ottimizzazione su Reti
Anno Accademico 2007/2008

Il *Vehicle Routing Problem* (VRP) è un tipico problema operativo nelle reti di distribuzione, e consiste nello stabilire i percorsi di una serie di veicoli per servire un insieme di clienti. Dato un insieme di *veicoli* con determinate caratteristiche che devono visitare un insieme di *clienti* (anche essi con determinate caratteristiche) distribuiti all'interno di una *rete di trasporto* a partire da uno (o più) *depositi* centrali.

Possibili applicazioni del VRP sono frequenti in problemi logistici e distributivi di dettaglio. Per esempio, si può pensare a contesti applicativi in cui si debba distribuire al dettaglio (oppure provvedere alla raccolta) un certo bene. In applicazioni reali sono presenti frequentemente molti vincoli aggiuntivi che possono complicare la struttura del problema. In questi appunti analizzeremo alcuni problemi di VRP con vincoli operativi addizionali per poi introdurre una formulazione matematica del problema.

1 Classificazione

Un problema di instradamento dei veicoli può essere definito andando a descrivere nel dettaglio le caratteristiche dei *veicoli*, dei *clienti* e della *rete di trasporto* che ne definiscono il contesto operativo.

Si possono distinguere due grandi classi di problemi, a seconda di come siano configurati i clienti. Se si assume che i clienti siano uniformente distribuiti lungo le connessioni della rete di trasporto (ad esempio lungo una strada) allora si parla di problemi di *arc routing*, mentre se i clienti sono rappresentabili come entità distinte (ad esempio nodi di un grafo) si parla allora di problemi di *node routing*. Nel seguito di queste dispense ci occuperemo solamente di problemi di node routing, in quanto più comuni e studiati. Tra i problemi di node routing si possono definire vari casi a seconda delle differenti modalità operative del contesto applicativo preso in esame. Una prima distinzione si può fare andando a considerare, ad esempio, la capacità di carico di un veicolo. Se questa risulta superiore alla somma delle domande di tutti i clienti allora il problema del VRP si semplifica e si configura come un problema di Travelling Salesman Problem (TSP). Altrimenti, nel caso in cui la somma delle richieste di tutti i clienti risulti superiore alla capacità di trasporto di un singolo veicolo si parla allora propriamente di problemi di Veichle Routing (VRP). Esistono inoltre numerose varianti del problema che non affronteremo in queste dispense.

1.1 Clienti

Nella versione base del problema dell'istradamento dei veicoli si considerano clienti caratterizzati solamente da un quantitativo di merce che deve essere ritirata (o consegnata). Casi più generali specificano altre caratteristiche dei clienti.

Per esempio, in alcune applicazioni il cliente deve essere servito in un dato intervallo temporale. Si pensi ad esempio ai negozi che hanno come orario di consegna della merce le ore di apertura del negozio stesso. Si parla in questi casi di problemi di vehicle routing con *time windows*. Una particolarità di questa classe di problemi è che se il veicolo raggiunge il cliente al di fuori della finestra temporale consentita allora il veicolo deve aspettare (nel caso in cui arrivi prima dell'inizio della finestra temporale) o deve andar via senza portare a termine l'operazione (nel caso in cui sia in ritardo).

Un'altra famiglia di problemi che citiamo sono problemi di *pick-up and delivery* in cui alcuni clienti richiedono il ritiro di merce, mentre altri richiedono la consegna di merce, e la merce ritirata da un cliente può sia essere consegnata ad un deposito (per essere spedita in un'altra località) oppure essere consegnata ad un altro cliente in zona. Chiaramente in quest'ultimo caso il ritiro della merce dovrà avvennire prima della sua consegna al cliente finale. Inoltre, un'altra complicazione di cui si deve tener conto in questa famiglia di problemi è dovuta alla capacità del veicolo. Si pensi ad una rotta composta da molti clienti che richiedono il ritiro di merce voluminosa le cui consegne verranno effettuate alla fine della rotta. Ciò potrebbe risultare in rotte non ammissibili e quindi in fase di soluzione del problema si dovrà tener conto della massima capacità del veicolo e dell'ordine in cui i clienti vengono visitati.

1.2 Veicoli

Un'altra dimensione per la classificazione dei problemi di VRP è data dalle caratteristiche dei veicoli. Si parla di *flotte omogenee*, quando i veicoli che le compongono sono tutti identici tra di loro, mentre si parla di *flotte eterogeneee* nel momento in cui i veicoli differiscono tra di loro per diverse caratteristiche (ad esempio capcità di carico, costi operativi, autonomia, velocità ...). I veicoli non omogenei potrebbero essere caratterizzati (oltre dalla capacità e dall'autonomia) anche da diverse abilità operative; si pensi ad esempio a problemi di raccolta dei rifiuti in centri storici, i veicoli di maggior dimensione non sono in grado di passare nei vicoli di un centro storico medioevale, mentre sono estremamente efficienti in zone più moderne con strade più ampie.

Altra possibile dimensione da considerare per la classificazione dei problemi di VRP è data dalla funzione obiettivo. In alcune versioni si cerca di minimizzare la distanza percorsa dai veicoli, in altre versioni i costi (che possono includere costi fissi e costi varibaili), o il numero di veicoli necessari, giusto per citare alcune varianti.

1.3 Rete di trasporto

Si parla di reti *euclidee*, nel caso in cui le distanze tra i nodi rispettino la diseguglianza triangolare $c_{ij} \leq c_{ih} + c_{hj}$. Si parla di istanze *planari*, quando le distanze tra i clienti sono calcolate a partire dalla disposizione dei clienti in un piano. Ovvero quando ogni cliente è caratterizzato da due coordinate che ne definiscono la sua posizione nel piano cartesiano e le distanze tra i clienti sono calcolate come le distanze tra i punti del piano. Inoltre, supporremo che i grafi rappresentanti le infrastrutture di trasporto siano *grafi completi*. Nel caso in cui un arco di collegamento tra due nodi non dovesse essere presente supporremo la presenza di un costo infinito associato all'arco.

Infine, in alcune applicazioni si considera anche la presenza di più depositi. Le diverse caratteristiche del nodo deposito danno luogo alle varianti *multi-deposito*. Nel caso in cui si abbiano a disposizione più depositi si potrebbero presentare problemi con depositi aventi diverse caratteristiche, come ad esempio la flotta a disposizione o diversi quantitativi di merce da distribuire.

2 Formulazione matematica

Nel resto di queste dispense affronteremo uno dei casi più semplici di VRP, ovvero il caso con flotta omogenea, clienti omogenei, capacità dei veicoli infinta, ma autonomia limitata, in cui si vuole minimizzare la distanza percorsa dai veicoli. Consideremo, inoltre, come grafo $G = (N, A)$ un grafo pesato sugli archi ma non orientato (ovvero stiamo implicitamente supponendo che gli archi siano percorribili in entrambe le direzioni pagando sempre lo stesso costo).

Una possibile formulazione matematica a variabili intere è la seguente. Sia dato un grafo $G = (N, A)$ non orientato e pesato sugli archi (le distanze o i costi di percorrenza). Dove ogni arco il collegamento tra due nodi i e j con il costo di percorrenza c_{ij} ed il nodo deposito è il nodo $d \in N$. Assumiamo che tutti i nodi abbiano domanda unitaria e che la nostra flotta di veicoli abbia una massima autonomia che indicheremo con Q. Ovvero ogni veicolo è in grado di servire al più Q clienti prima di essere costretto a tornare al deposito. I veicoli avranno, comunque, autonomia illimitata, ovvero non ci sono limiti di massima percorrenza delle loro rotte. Nel seguito rilasseremo questi vincoli considerando una versione del problema che include nel modello anche domande diverse da parte dei clienti e massime autonomie di percorrenza per i veicoli.

Introduciamo tre famiglie di variabili. Le variabili x_{ij}^k a rappresentare se l'arco ij appartiene alla rotta del veicolo k. Mentre le variabili y_{ij} saranno utilizzate per tener conto di tutti i veicoli nel loro complesso. Infine indicheremo con le variabili z_i^k se il cliente i è visitato dalla rotta k. Tutte queste variabili saranno variabili binarie in quanto un arco o un cliente potrà appartenere ad una sola rotta, ovvero

$$x, y, z \in \{0, 1\} \tag{1}$$

La funzione obiettivo sarà quella di minimizzare i costi c_{ij} associati all'attraversamento degli archi (i, j). Ovvero

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} y_{ij} \tag{2}$$

I vincoli del problema dovranno assicurare che in una soluzione siano rispettate la massima capacità Q (espressa come numero massimo di clienti afferenti ad una singola rotta) di ogni veicolo:

$$\sum_{i \in N} z_i^k \leq Q, \quad \forall k \tag{3}$$

Ogni cliente dovrà essere visitato esattamente da un solo veicolo.

$$\sum_{k \in K} z_i^k = 1, \quad \forall i \in N \tag{4}$$

Inoltre bisognerà assicurarsi che la rotta k passi per il nodo i se e solo il nodo i è effettivamente assegnato alla rotta k. Ovvero deve valere il seguente vincolo:

$$x_{ij}^k \leq z_i^k, \quad \forall (i,j) \in A, \forall k \in K \tag{5}$$

Infatti se il nodo i non è assegnato alla rotta k (cioè $z_i^k = 0$) tutte le variabili x_{ij}^k dovranno essere nulle, ovvero nessuno degli archi uscenti dal nodo sarà appartenente alla rotta k.

Inoltre i vincoli dovranno assicurare che la rotta di ogni veicolo sia corretta, ovvero che non presenti sottocicli o biforcazioni. Chiaramente una rotta ciclica che non tranista per il deposito non sar considerata ammissibile, così come per rotte che presentano biforcazioni o salti tra due clienti non adiacenti. Il seguente vincolo mette in relazione le variabili x con le variabili y che verranno utilizzate per esprimere i vincoli su tutte le rotte contemporaneamente.

$$y_{ij} = \sum_{k \in K} x_{ij}^k, \quad \forall (i,j) \in A \tag{6}$$

Quindi, utilizzando le variabili y, ogni nodo (cliente) avrà esattamente due archi incidenti, con l'eccezione del nodo deposito che ne avrà $2k$, ovvero due (uno entrante ed uno uscente) per ogni veicolo. Il vincolo (8) impone che si utilizzino esattamente tutti i k veicoli che sono a disposizione.

$$\sum_{(i,j) \in \delta(h)} y_{ij} = 2, \quad \forall h \in N \setminus d \tag{7}$$

$$\sum_{(i,j) \in \delta(d)} y_{ij} = 2k \tag{8}$$

I seguenti vincoli di cutset ci assicurano che preso un sottoinsieme S qualsiasi di nodi (che contenga almeno un nodo) esisteranno almeno due archi uscenti dal sottoinsieme di nodi considerati.

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in N \setminus S} y_{ij} \geq 2, \quad \forall S \subseteq N \setminus \{\emptyset\}. \tag{9}$$

Un lettore attento potrà osservare come questi vincoli siano analoghi ai vincoli utilizzati per formulare il problema del commesso viaggiatore (TSP).

Una formulazione alternativa, e leggermente più generale fa uso del vincolo (10) che limita superiormente il numero di veicoli da utilizzare per risolvere il problema. Utilizzando questo vincolo (in sostituzione al vincolo (8)) si permetteranno soluzioni con un numero variabile di veicoli.

$$\sum_{(i,j)\in\delta(d)} y_{ij} \leq 2k \tag{10}$$

Nel caso in cui i clienti non abbiano tutti domanda unitaria ma siano caratterizzati da una domanda q_i, allora il vincolo (3) si deve scrivere (associando al deposito domanda nulla) come:

$$\sum_{i\in N} q_i z_i^k \leq Q, \quad \forall k \tag{11}$$

Nel caso in cui i veicoli siano caratterizzati anche da una massima autonomia L e gli archi da una lunghezza l_{ij}, allora bisognerà aggiungere al modello un vincolo per rappresentare il fatto che una rotta non potrà eccedere la massima autonomia. In altre parole il vincolo:

$$\sum_{(i,j)\in A} l_{ij} x_{ij}^k \leq L, \quad \forall k \tag{12}$$

Mentre, se si suppone che i veicoli non siano perfettamente omogeneei ma siano caratterizzati da differenti capacità (o autonomie di percorrenza), allora basterà modificare i vincoli (3) e (12) sostituendo la capacità Q con Q_h e L con L_h.

$$\sum_{(i,j)\in A} q_i z_i^k \leq Q_k, \quad \forall k \tag{13}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} l_{ij} x_{ij}^k \leq L_k, \quad \forall k \tag{14}$$

Questa formulazione matematica è molto ricca in quanto generalizza ed estende le formulazioni di problemi combinatori molto famosi e studiati, come il problema del commesso viaggiatore (TSP), il problema dello zaino (knapsack).

Il problema del commesso viaggiatore è un caso particolare di problema di VRP in cui un unico veicolo deve servire tutti i clienti in un'unica rotta. Chiaramente per questo problema non si considererà la capacità di carico del veicolo in quanto necessariamente il veicolo sarà sufficiente al trasporto di tutta la merce. Una formulazione di questo problema si ottiene dalla formulazione del VRP andando ad eliminare tutti i vincoli relativi allle diverse rotte, ovvero i vincoli 7, 8 e 9 e semplificando le variabili y e z. Anche la formulazione del problema del knapsack o problema dello zaino. Si ricordi come in un problema di knapsack si debba selezionare un sottoinsieme di oggetti da inserire in uno zaino dotato di una capacità limitata. Chiaramente questo problema è un sottoproblema del VRP in quanto agli oggetti caratterizzati da una certo ingombro corrisponderanno i clienti con la loro domanda, e alla capacità dello zaino corrisponderà la massima capacità del veicolo. La formulazione del knapsack si ottiene lasciando solamente i vincoli sulle capacità dei veicoli 11.

Chiaramente, la formulazione matematica proposta risulta essere inservibile per problemi di grande dimensione o per i quali sia necessario avere una soluzione in tempi di calcolo molto brevi.