1

Ottimizzazione non vincolata - esercizi d'esame

1.1 Prima prova 2002-2003

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2$. Si applichi una iterazione del metodo del gradiente, effettuando la line search in modo *esatto*, a partire dai punti $A = [2\ 0]^T$, $B = [1\ 2]^T$. Commentare la differenza tra i risultati trovati.

Svolgimento

A partire dal punto $A = [2\ 0]^T$ la direzione di discesa è $d = [-4\ 0]^T$. Per il calcolo del passo α si ottiene $[\nabla f(A + \alpha d)]^T d = [2(2 - 4\alpha)\ 0]^T [-4\ 0] = 0$, ovvero $\alpha = \frac{1}{2}$. Il nuovo punto è $A' = [0\ 0]$, ed il gradiente calcolato in A' rispetta le condizioni di arresto. A partire dal punto $B = [1\ 2]^T$ la direzione di discesa è $d = [-2\ \ -16]^T$. Per il calcolo del passo α si ottiene $[\nabla f(B + \alpha d)]^T d = [2 - 4\alpha\ \ 16(1 - 8\alpha)]^T [-2\ \ -16] = 0$, ovvero $\alpha = \frac{65}{514}$. Il nuovo punto è $B' = [\frac{192}{257}\ \ -\frac{6}{257}]$, ed il gradiente calcolato in B' non rispetta le condizioni di arresto. Partendo dal punto A si ragiunge un punto di arresto in una sola iterazione, mentre partendo dal punto B il metodo del gradiente necessita di altre iterazioni per raggiungere un punto che rispetta le condizioni di arresto.

1.2 Prima prova 2002-2003

Si consideri la funzione $f(x) = 2x_1^2 x_2^2 + x_1^3 + x_2$. Per ognuno dei punti $A = (0, 2)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, -1)$, $D = (0, 10)$ e $E = (1, 0)$ si determini una direzione di discesa applicando il metodo di Newton nella versione globalmente convergente. (Si supponga che la condizione d'angolo sia verificata)

1.3 Prima prova 2002-2003

Si consideri la funzione $f(x) = 3x_1^3 x_2 + x_2^2$. A partire dai punti $A = [1\ 0]^T$, $B = [0\ 3]^T$ si determini una direzione di discesa applicando il metodo di Newton nella versione globalmente convergente.

Svolgimento

Si ha $\nabla f(A)^T = [0\ 3]$, mentre $\nabla^2 f(A) = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$. Quindi la direzione di Newton è $d = -(\nabla^2 f(A))^{-1})\nabla f(x) = -\begin{bmatrix} -\frac{2}{81} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, ovvero $d^T = [-\frac{1}{3}\ 0]$. Siccome $\nabla f(A)^T d = 0$, d non può evidentemente soddisfare la condizione d'angolo, e quindi si sceglie l'antigradiente ovvero $[0\ \ -3]$. L'Hessiana calcolata in B è $\nabla^2 f(B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Essendo singolare, di nuovo la direzione prescelta sarà la direzione dell'antigradiente $d = -\nabla f(x) = [0\ \ -6]^T$.

1.4 31/3/03

Data la funzione $f(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_1 x_2$. A partire dal punto $A = [1\ 1]^T$, si determini il prossimo punto della successione applicando il metodo di Newton puro.

Svolgimento

L'Hessiana è $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$. Quindi la direzione di Newton è $d = -(\nabla^2 f(A))^{-1})\nabla f(x) = -\begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$, ovvero $d = [-1\ \ -1]^T$, ed il nuovo punto è $A = [0\ 0]^T$ che rispetta le condizioni di arresto.

1.5 31/3/03

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^3 + 2x_2^2 + x_1^2 + 2x_1$. A partire dal punto $A = (0, 0)$ si determini una direzione di discesa applicando il metodo di Newton nella versione globalmente convergente (si consideri $\epsilon = 1/2$).

Svolgimento

L'Hessiana calcolata in A è $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Quindi la direzione di Newton è $d = -(\nabla^2 f(A))^{-1})\nabla f(x) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, ovvero $d = [-1\ 0]^T$. La condizione d'angolo $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon ||\nabla f(x)|| * ||s||$ risulta verificata in quanto per la direzione di Newton vale $2 \geq 1$. Inoltre la direzione di Newton è direzione di discesa $[2\ 0][-1\ 0]^T = -2$. Per il calcolo del passo α si ottiene α immaginario. La direzione punta verso un minimo a $-\infty$ e l'ampiezza del passo α è infinita.

1.6 16/4/03

Data la funzione $f(x) = x_1^4 - 5x_2^3 + x_1^2 x_2$. A partire dal punto $A = (1, 0)$, si determini il prossimo punto della successione applicando il metodo di Newton nella versione globalmente convergente (si consideri $\epsilon = 1/2$).

1.7 Prima prova 2003-2004

Si consideri la funzione $f(x) = 3x_1^4 + 4x_2^2 x_1 + x_1$. A partire dai punti $A = (0; 0)$ e $B = (1/2; 1/2)$ si determini una direzione di discesa applicando il metodo di Newton modificato. (Si supponga che sia sempre soddisfatta la condizione $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon||\nabla f(x)|| * ||s||$)

1.8 Prima prova 2003-2004

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^3 + x_1^2 x_2 - 2x_2$. A partire dai punti $A = (1; 0)$ e $B = (0; 1)$ si determini una direzione di discesa applicando il metodo di Newton modificato. (Si supponga che sia sempre soddisfatta la condizione $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon||\nabla f(x)|| * ||s||$)

1.9 Prima prova 2003-2004

Si consideri la funzione $f(x) = x_1 x_2^3 - 2x_1$. A partire dai punti $A = (1; 0)$ e $B = (1; 1)$ si determini una direzione di discesa applicando il metodo di Newton modificato. (Si supponga che sia sempre soddisfatta la condizione $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon||\nabla f(x)|| * ||s||$)

1.10 Prima prova 2003-2004

Si consideri la funzione $f(x) = (x_1 - 1)^3 - x_2^2$. A partire dai punti $A = (1/2; 1/2)$ e $B = (1; 1)$ si determini il prossimo punto della successione applicando il metodo di Newton modificato, utilizzando una line search esatta. (Si consideri $\epsilon = 1/4$ per verificare se l'angolo tra la direzione e ∇f si discosta sufficientemente dai 90°).

1.11 Prima prova 2003-2004

Si consideri la funzione $f(x) = (x_2 - 1)^3 + 2x_1^2$. A partire dal punto $A = (1; 1)$ si determini il prossimo punto della successione applicando il metodo di Newton modificato. Per la line search, si utilizzi il metodo di Armijo con $\alpha_0 = 1/2$, $\gamma = 1/4$ e $\sigma = 1/2$.

1.12 20/4/04

Si consideri la funzione $f(x) = (x_1 - 2)^5 - 3x_2^3$. A partire dai punti $A = (1; 1/3)$ e $B = (1; 0)$ si determini una direzione di discesa applicando il metodo di Newton modificato. (Si supponga che sia sempre soddisfatta la condizione $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon||\nabla f(x)|| * ||s||$)

1.13 1/9/04

Si consideri la funzione $f(x) = 4x_1^5x_2 + x_2^2x_1$. A partire dai punti $A = (0,0)$ e $B = (0,1)$ si determini, se possibile, una direzione di discesa applicando il metodo di Newton nella versione globalmente convergente (si consideri $\epsilon = 1/2$).

1.14 Prima prova 2004-2005

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^2x_2 - x_1x_2$. A partire dai punti $A = [1\ 1]^T$, $B = [\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]^T$ si determini il prossimo punto della successione applicando il metodo di Newton nella versione globalmente convergente, utilizzando una line search esatta. Si controlli la condizione di arresto dell'algoritmo. (Si ponga $\epsilon = 1/2$ nella condizione $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon ||\nabla f(x)|| * ||s||$)

Svolgimento

L'Hessiana calcolata in A è $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi la direzione di Newton è $d = -(\nabla^2 f(A))^{-1})\nabla f(x) = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, ovvero $d = [0\ -1]^T$. La condizione d'angolo $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon ||\nabla f(x)|| * ||s||$ non risulta verificata in quanto la direzione di Newton è ortogonale al gradiente $0 > \frac{1}{2}$. Il metodo di Newton modificato sceglie quindi come direzione di discesa la direzione dell'antigradiente $d = [-1\ 0]^T$. Per il calcolo del passo α si ottiene $[\nabla f(A + \alpha d)]^T d = 0$, ovvero $\alpha = \frac{1}{2}$. Il nuovo punto è $A' = [\frac{1}{2}\ 1]$. L'Hessiana calcolata in B è $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. essendo singolare, la direzione sarà la direzione dell'antigradiente $d = -\nabla f(x) = [0\ \frac{1}{4}]^T$. Per il calcolo del passo α si ottiene $[\nabla f(B + \alpha d)]^T d = 0$ che non dipende da α. La direzione di discesa quindi punta diretta verso un minimo a $-\infty$, infatti $\lim_{x_1=\frac{1}{2}, x_2\to+\infty} f(x) = -\infty$.

1.15 Prima prova 2004-2005

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^3 + 3x_1x_2^2 + 3x_2$. A partire dai punti $A = (1;1)$ e $B = (0;0)$ si determini il prossimo punto della successione applicando il metodo di Newton nella versione globalmente convergente, utilizzando una line search esatta. Si controlli la condizione di arresto dell'algoritmo. (Si ponga $\epsilon = 1/2$ nella condizione $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon ||\nabla f(x)|| * ||s||$)

1.16 Prima prova 2004-2005

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^3 + 3x_1x_2^2$. A partire dal punto $A = (1;0)$ si determini il prossimo punto della successione applicando il metodo di Newton nella versione globalmente convergente, utilizzando una line search esatta. Si controlli la condizione di arresto dell'algoritmo. (Si ponga $\epsilon = 1/2$ nella condizione $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon ||\nabla f(x)|| * ||s||$)

1.17 7/4/05

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2$. Si applichi una iterazione del metodo del gradiente effettuando la line search in modo *esatto*, a partire dai punti $A = [-1\ 1]^T$, $B = [2\ 0]^T$. Commentare la differenza tra i risultati trovati.

Svolgimento

A partire dal punto $A = [-1\ 1]^T$. Per il calcolo del passo α si ottiene $[\nabla f(A + \alpha d)]^T d = [2(-1-\alpha) + 2\ 4(1-4\alpha)]^T [0\ \ -4] = 0$, ovvero $\alpha = \frac{1}{4}$. Il nuovo punto è $A' = [-1\ 0]$, ed il gradiente calcolato in A' rispetta le condizioni di arresto. A partire dal punto $B = [2\ 0]^T$. Per il calcolo del passo α si ottiene $[\nabla f(B + \alpha d)]^T d = [2(2-6\alpha) + 2\ \ 0]^T [-6\ \ 0] = 0$, ovvero $\alpha = \frac{1}{2}$. Il nuovo punto è $B' = [-1\ \ 0]$, ed il gradiente calcolato in B' rispetta le condizioni di arresto. In entrambi i casi viene raggiunto lo stesso punto di arresto in un'unica iterazione.

1.18 29/4/05

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$. Si applichi una iterazione del metodo del Newton nella versione globalmente convergente effettuando la line search in modo *esatto*, a partire dal punto $A = [2\ 2]^T$. Si ponga nella condizione d'angolo $\varepsilon = 1/2$, e si controlli la condizione di arresto dell'algortimo.

1.19 5/7/05

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^2 + x_2 + 2x_3 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2x_3$. Si applichi una iterazione del metodo del gradiente effettuando la line search in modo *esatto*, a partire dal punto $A = [-1\ 0\ 2]^T$. Si controlli la condizione di arresto dell'algortimo.

Svolgimento

La direzione di discesa è $d = [0\ \ -7\ \ -1]^T$. Per il calcolo del passo α si ottiene $[\nabla f(A + \alpha d)]^T d = [-15\alpha\ \ (7-4\alpha)\ \ 1-28\alpha]^T [0\ \ -7\ \ -1] = 0$, ovvero $\alpha = \frac{25}{28}$. Il nuovo punto è $A' = [-1\ \ -\frac{25}{4}\ \ \frac{31}{28}]$, ed il gradiente calcolato in A' non rispetta le condizioni di arresto.

1.20 Prima prova 2005-2006

Si consideri la funzione $f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_3^2$. A partire dai punti $A = (1, 0, 0)$ e $B = (2, 0, 2)$, si determini il prossimo punto della successione applicando il metodo di

Newton modificato, utilizzando una line search esatta. Si controlli la condizione di arresto dell'algoritmo. (Si ponga $\epsilon = 1/2$ nella condizione $|\nabla f(x)^T s| > \epsilon ||\nabla f(x)|| * ||s||$.)

2

Ottimizzazione vincolata - esercizi d'esame

2.1

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1 + x_2^2 & \\ g_1(x) = 4x_1^2 - x_2 + 2 &\geq 0 \\ g_2(x) = -x_1 + x_2^2 &\geq 0 \\ g_3(x) = -x_1 x_2 + 1 &\geq 0 \\ g_4(x) = x_1 &\geq 0 \\ g_5(x) = -x_2 + 2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Quali di questi punti $A = (0, 2)$, $B = (1/2, 2)$ e $C = (3/4, 4/3)$ possiamo escludere essere punti di minimo locale?
- Partendo dal punto $D = (0, 0)$, si studi la sensibilità della funzione obiettivo ad una variazione ϵ del vincolo g_2.
- Partendo dal punto $E = (1, 1)$, si determini (in maniera analitica) una direzione di discesa ammissibile.
- Partendo dal punto $F = (0, 1)$, la direzione $d = [-1 \;\; 1]^T$ è una direzione di discesa o salita? È una direzione ammissibile o no?

2.2 Prima prova 2002-2003

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min -x_1^3 - x_2 & \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 &\leq 4 \\ g_2(x) = x_1^2 + 4x_2^2 &\geq 4 \\ g_3(x) = x_1 - x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Quali di questi punti $A = (-2,0)$, $B = (\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5})$ e $C = (0,1)$ possono essere punti di minimo locale?

Svolgimento

Nel punto A sono attivi i vincoli g_1 e g_2. Le condizioni di qualificazione dei vincoli attivi in A portano allo Jacobiano $J(A) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$. Le due righe sono linearmente dipendenti, quindi nel punto A le condizioni di qualificazione dei vincoli non sono rispettate e non si può escludere che il punto sia di minimo. Nel punto B sono attivi i vincoli g_2 e g_3, quindi $\lambda_1 = 0$. Le condizioni di qualificazione dei vincoli sono rispettate, infatti le colonne dello Jacobiano sono Linearmente Indipendenti $J(B) = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}\sqrt{5} & \frac{16}{5}\sqrt{5} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Risolvendo le condizioni di KKT si ottiene $\lambda_2 = -\frac{17}{25\sqrt{(5)}}$ $(\lambda_3 = \frac{147}{125})$, quindi le condizioni di KKT non sono verificate. Il punto B si può escludere che sia un punto di minimo. Nel punto C risulta attivo solo il vincolo g_2, e le condizioni di qualificazione sono rispettate. In C vale $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_3 = 0$ le condizioni di KKT portano a $\lambda_2 = -\frac{1}{8}$ e quindi non sono rispettate. Il punto C si può escludere che sia un punto di minimo.

2.3 Prima prova 2002-2003

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 + 2x_2^3 & & \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 & \leq & 1 \\ g_2(x) = x_1 + x_2^2 & \geq & 1 \\ g_3(x) = -x_1 + x_2^2 & \leq & 1 \end{aligned}$$

Quali di questi punti $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (-1,0)$ possono essere punti di minimo locale?

Svolgimento

Nel punto A sono attivi i vincoli g_1 e g_2. Le condizioni di qualificazione dei vincoli attivi in A portano allo Jacobiano $J(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Le due colonne sono Linearmente Dipendenti, quindi nel punto A le condizioni di qualificazione dei vincoli non sono rispettate e non si può escludere che il punto sia di minimo. Nel punto B risultano attivi tutti e tre i vincoli, e quindi le condizioni di qualificazione dei vincoli non sono rispettate e non si può escludere che il punto sia di minimo. Il punto C è fuori dalla regione ammissibile (violato il vincolo g_2) e sicuramente non può essere punto di minimo.

2.4 Prima prova 2002-2003

Si consideri il problema

$$\begin{array}{rcl} \min -x_1^2 + x_2 & & \\ g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 & \geq & 0 \\ g_2(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Il punto di minimo di questo problema è il punto $A = [1\ 0]^T$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità.
- Supponendo che il secondo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

  $$1 - x_1^2 - x_2^2 \geq -\epsilon ||\nabla g_2(A)||$$

  In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ?

Svolgimento

Nel punto A sono attivi i vincoli g_1 e g_2. Le condizioni di qualificazione dei vincoli attivi in A portano allo Jacobiano $J(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Le due colonne sono Linearmente Indipendenti, e le condizioni di qualificazione dei vincoli sono rispettate. Le condizioni di KKT calcolate in A portano a $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ e sono rispettate. Il punto A rispetta le condizioni necessarie di ottimalità. La sensibilità della funzione obiettivo alla variazione del vincolo g_2 di ϵ è pari a $\frac{df}{d\epsilon} = -||\nabla g_2(A)||\lambda_2 = -2\frac{3}{2} = -3$.

–

2.5 Prima prova 2002-2003

Indichiamo con P1 e P2 i seguenti problemi di ottimizzazione:

$$\begin{array}{rcl} \min 4x_1^3 + x_2^2 + 3 & & \\ -2x_1^2 + x_2 - 3 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \min 4x_1^3 + x_2^2 + 3 & & \\ -2x_1^2 + x_2 - 3 & \geq & 0 \end{array}$$

Si considerino il punto $x = [1\ 5]^T$ e la direzione $d = [-1\ \ -3]^T$. Per ciascuno dei due problemi P1 e P2, rispondere alle seguenti domande: Partendo dal punto x, la direzione d è una direzione di discesa ammissibile? Se si', soddisfa la condizione d'angolo con $\epsilon = 0.5$?

Svolgimento

La direzione d nel problema P1 è direzione di discesa ($\nabla f(x)^T d = -12 - 30 \leq 0$) ma non una direzione ammissibile (essendo il vincolo di uguaglianza una direzione ammissibile deve essere ortogonale al gradiente del vincolo nel punto). Infatti $\nabla g(x)^T d = 4 - 3 \neq 0$. La direzione d nel problema P2 è direzione di discesa ($\nabla f(x)^T d = -12 - 30 \leq 0$) e ammissibile ($\nabla g(x)^T d = 4 - 3 \geq 0$). d soddisfa la condizione d'angolo $|\nabla f(x)^T d| \geq \epsilon ||\nabla f(x)|| ||d||$ in quanto risulta $42 \geq 0.5(15.62 \times 3.16) = 24.67$.

2.6 Prima prova 2002-2003

Indichiamo con P1 e P2 i seguenti problemi di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 & \\ x_1^2 + x_2^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 & \\ x_1^2 + x_2^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

Si considerino il punto $x = [1\ 0]^T$ e la direzione $d = [-1\ \ -1]^T$. Per ciascuno dei due problemi P1 e P2, rispondere alle seguenti domande: Partendo dal punto x, la direzione d è una direzione di discesa ammissibile? Se si', soddisfa la condizione d'angolo con $\epsilon = 0.5$?

2.7 11/7/03

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min x_1 + 3x_2 & \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 &\leq 2 \\ g_2(x) = x_1 + x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

la cui soluzione ottima è $x^* = [1\ \ -1]^T$. Supponiamo ora che il secondo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$x_1 + x_2 \geq -\epsilon ||\nabla g_2(x^*)||$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ, ossia quanto vale $\frac{df}{d\epsilon}$ nell'intorno di x^*?

2.8 31/3/03

Siano P1 e P2 i seguenti problemi di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min x_1^3 + 2x_1^2 x_2 - x_2 & \\ x_1^2 + 4x_2^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min x_1^3 + 2x_1^2x_2 - x_2 & \\ x_1^2 + 4x_2^2 &\leq 4 \end{aligned}$$

Dati il punto $x = [0\ 2]^T$ e la direzione $d = [-1\ \ -1]^T$, dire per ciascuno dei due problemi P1 e P2, se d è una direzione di discesa ammissibile per f in x, e se soddisfa la condizione d'angolo con $\epsilon = 0.5$.

2.9 29/5/03

Indichiamo con P1 e P2 i seguenti problemi di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min x_1^3 + x_2^3 + 5 & \\ -2x_1^2 + x_2 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min 4x_1^3 + x_2^2 + 3 & \\ -2x_1^2 + x_2 - 3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si considerino il punto $x = [1\ 5]^T$ e la direzione $d = [-1\ \ -3]^T$. Per ciascuno dei due problemi P1 e P2, rispondere alle seguenti domande: Partendo dal punto x, la direzione d è una direzione di discesa ammissibile? Se si', soddisfa la condizione d'angolo con $\epsilon = 0.5$?

2.10 11/7/03

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2 & \\ -x_1^2 - x_2^2 &\geq -4 \\ -x_1 + x_2 &\geq -2 \\ x_1^2 - x_2 &\geq 2 \end{aligned}$$

Dire, per ciascuno dei seguenti punti, quali si possono escludere come punti di minimo: $A = (0, 0)$, $B = (0, -2)$, $C = (2, 0)$, $D = (\sqrt{3}, 1)$.

Svolgimento

Nel punto A nessun vincolo risulta attivo e le condizioni di KKT non sono rispettate. Nel punto B sono attivi tutti i vincoli e le condizioni di KKT sono rispettate. Nel punto C risultano attivi i primi due vincoli ma le condizioni di KKT non sono rispettate. Nel punto D risulta attivo il terzo vincolo e le condizioni di KKT non sono rispettate. Le condizioni di qualificazione dei vincoli sono rispettate in tutti i punti ad eccezione del punto B. Solamente il punto B non si pu escludere che sia un punto di minimo.

2.11 31/3/03

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{array}{rcl}\min x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_1 + 2x_2 & & \\ x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 & \geq & 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 & \geq & 0 \\ x_1^2 + 2x_2^2 & \leq & 16 \\ x_2 & \geq & 0\end{array}$$

Dire se $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (0, 2\sqrt{2})$, $D = (0,1)$ possono essere punti di minimo locale.

2.12 16/4/03

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{array}{rcl}\min 4x_1^3 - 3x_2 & & \\ x_1 - x_2^2 & \geq & 0 \\ 2 - x_1 - x_2 & \geq & 0 \\ x_1 & \geq & 0\end{array}$$

Dire quali dei seguenti punti possono essere eventuali punti di minimo: $A = (0,0)$, $B = (1,1)$, $C = (2,0)$, $D = (1,0)$.

2.13 24/7/03

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{array}{rcl}\min x_1^3 + x_2 & & \\ x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 & \geq & 0 \\ x_1^2 + x_2^2 & \leq & 4 \\ x_2 & \geq & 0\end{array}$$

Dire quali dei seguenti punti possono essere eventuali punti di minimo: $A = (-2,0)$, $B = (0,0)$, $C = (2,0)$.

2.14 Prima prova 2003-2004

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{array}{rcl}\min x_2 & & \\ 1 - (1/4)x_1^2 - x_2^2 & \geq & 0 \\ 1 - x_1^2 - x_2 & \geq & 0 \\ x_1 + 1 & \geq & 0\end{array}$$

Quali di questi punti $A = (0;1)$, $B = (1;0)$, $C = (0;-1)$ possiamo escludere che siano punti di minimo locale? Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

2.15 Prima prova 2003-2004

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{array}{rcl} \min x_1^2 + x_2 & & \\ 1 - x_1^2 - (1/4)x_2^2 & \geq & 0 \\ x_1 + x_2^2 - 1 & \geq & 0 \\ x_2 + 1 & \geq & 0 \end{array}$$

Quali di questi punti $A = (0;2)$, $B = (1;0)$, $C = (0;-1)$ possiamo escludere che siano punti di minimo locale? Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

2.16 Prima prova 2003-2004

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{array}{rcl} \min x_1^2 + x_2 & & \\ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 & \geq & 0 \\ 1 + x_1 + x_2^2 & \geq & 0 \\ 2 - x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Quali di questi punti $A = (1;2)$, $B = (-1;0)$, $C = (-5;2)$ possiamo escludere che siano punti di minimo locale? Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

2.17 Prima prova 2003-2004

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{array}{rcl} \min -x_1 - x_2 & & \\ 1 - x_1^2 - x_2^2 & \geq & 0 \\ 1 - x_1^2 + x_2 & \geq & 0 \\ x_1 - x_2 + 1 & \geq & 0 \end{array}$$

Quali di questi punti $A = (0;1)$, $B = (1;1)$, $C = (0;-1)$ possiamo escludere che siano punti di minimo locale? Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

2.18 Prima prova 2003-2004

Si consideri il problema

$$\begin{array}{rcl} \min x_2 & & \\ 1-(1/4)x_1^2-x_2^2 & \geq & 0 \\ 1-x_1^2-x_2 & \geq & 0 \\ x_1+1 & \geq & 0 \end{array}$$

- Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = [0\ \ -1]^T$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità.
- Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

  $$1-(1/4)x_1^2-x_2^2 \geq -\epsilon||\nabla g_1(x^*)||$$

  In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ?

2.19 Prima prova 2003-2004

Si consideri il problema

$$\begin{array}{rcl} \min -x_1 & & \\ x_1^2+(x_2+1)^2-4 & \geq & 0 \\ 1-x_1+x_2^2 & \geq & 0 \\ -x_2 & \geq & 0 \\ x_2+2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = [5\ \ -2]^T$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità.
- Supponendo che il secondo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

  $$1-x_1+x_2^2 \geq -\epsilon||\nabla g_2(x^*)||$$

  In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ?

2.20 Prima prova 2003-2004

Si consideri il problema

$$\begin{array}{rcl} \min -x_1-x_2 & & \\ 1-x_1^2-x_2^2 & \geq & 0 \\ 1-x_1^2+x_2 & \geq & 0 \\ x_1-x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = [\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}]^T$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità.
- Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

  $$1 - x_1^2 - x_2^2 \geq -\epsilon||\nabla g_1(x^*)||$$

  In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ?

2.21 Prima prova 2003-2004

Si consideri il problema

$$\min x_1$$
$$g_1(x) = -x_1x_2 \geq 0$$
$$g_2(x) = x_2 - x_1^2 - 2 \geq 0$$

E si consideri il punto $x = [-1\ 3]^T$ e la direzione $d = [1\ 2]^T$. Partendo dal punto x, la direzione d è una direzione di discesa ammissibile? Se no, individuare (graficamente o analiticamente) una direzione di discesa ammissibile.

2.22 20/4/04

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{array}{rcl} \min 4x_1 + x_2 & & \\ 1 - (1/4)x_1^2 - x_2^2 & \geq & 0 \\ 2 + x_1 - 2x_2 & \geq & 0 \\ 2 + x_1 + 2x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Quali di questi punti $A = (-2; 0)$, $B = (0; 1)$, $C = (2; 0)$, $D = (0; 0)$ possiamo escludere che siano punti di minimo locale? Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

2.23 1/9/04

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{array}{rcl} \min x_1^3 + 2x_2^4 & & \\ x_1^2 + x_2^2 & \geq & 1 \\ \sqrt{2} - x_1 - x_2 & \geq & 0 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Verificare se i punti $A = (0, 0)$, $B = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $C = (1, 0)$, $D = (\sqrt{2}, 0)$ possono essere punti di minimo. Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

2.24 30/9/04

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min x_1^3 + 2x_2^4 & \\ g_1(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2 &\geq 0 \\ g_2(x) = 2 + x_1 + x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = [-2\ 0]^T$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità. Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale? Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$4 - x_1^2 - x_2^2 \geq -\epsilon||\nabla g_1(x^*)||$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ?

2.25 30/9/04

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + x_2^3 & \\ h(x) = 2 - 3x_1^2 - 2x_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

e si considerino i punti $A = [\sqrt{2/3}\ 0]^T$ e $B = [0\ 1]^T$ e la direzione $d = [0\ \ -1]^T$. Per ciascuno dei due punti A e B, la direzione d è una direzione di discesa ammissibile?

2.26 Prima prova 2004-2005

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1 + x_2^2 & \\ g_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2 &\geq 0 \\ g_2(x) = -x_1 + x_2 + 2 &\geq 0 \\ g_3(x) = x_1 + 2 &\geq 0 \\ g_4(x) = 2 - x_2 &\geq 0 \\ g_5(x) = x_1 x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Quali di questi punti $A = (4, 2)$, $B = (-1, -2)$ e $C = (-2, 0)$ possono essere punti di minimo locale?
- Partendo dal punto $x^* = (0, 1)$ si studi la sensibilità della funzione obiettivo ad una variazione $\epsilon||\nabla g_5(x^*)||$ del vincolo g_5.
- Partendo dal punto $E = (3, 1)$ si determini (in maniera analitica) una direzione di discesa ammissibile. Si consideri il punto $F = (-4, -2)$ e la direzione $d = [1\ \ -1]^T$, la direzione d è una direzione di discesa ammissibile?

2.27 7/4/05

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min -x_2^2 \\ g_1(x) = 4 - (x_1 - 1)^2 - x_2^2 &\geq 0 \\ g_2(x) = x_2 + 1 &\geq 0 \\ g_3(x) = -x_1 x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Quali di questi punti $P = [-1\ 0]^T$, $Q = [0\ \ -1]^T$, $R = [3\ 0]^T$, $S = [1\ 2]^T$, possono escludere che siano punti di minimo locale?

2.28 29/4/05

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min 2x_1^2 + 9x_2^2 \\ g_1(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2 &\geq 0 \\ g_2(x) = x_1 + x_2 &\geq 0 \\ g_3(x) = x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Studiare l'esistenza dei punti di minimo.

2.29

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min x_1 \\ g_1(x) = 4 - (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 &\geq 0 \\ g_2(x) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 &\geq 0 \\ g_3(x) = x_1 x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Quali di questi punti $A = [1\ 1]^T$, $B = [1\ 0]^T$, $C = [0\ 1]^T$, $D = [0\ 0]^T$, possono essere punti di minimo locale?

2.30 7/4/05

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min -x_2^2 \\ g_1(x) = 4 - (x_1 - 1)^2 - x_2^2 &\geq 0 \\ g_2(x) = x_2 + 1 &\geq 0 \\ g_3(x) = -x_1 x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = [0\ \sqrt{3}]^T$. Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$4 - (x_1 - 1)^2 - x_2^2 \geq -\epsilon ||\nabla g_1(x^*)||$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ?

2.31

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min -x_1^2 & \\ g_1(x) = 4 - (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 &\geq 0 \\ g_3(x) = x_1 x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = [1\ 3]^T$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità. Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$4 - (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 \geq -\epsilon ||\nabla g_1(x^*)||$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da ϵ?

2.32

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 - 3x_2^2 + x_1 x_2 & \\ 2 - x_1^2 - x_2^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

E si considerino i punti $A = [0\ 1]^T$ e $B = [1\ 0]^T$ e la direzione $d = [-1\ \ -1]^T$. Per ciascuno dei due punti A e B, la direzione d è una direzione di discesa ammissibile?

2.33 7/4/05

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 & \\ 2x_1^2 + x_2 - 5 &\geq 0 \\ x_1 x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

E si considerino i punti $P = [1\ 3]^T$ e $Q = [0\ \ -2]^T$ e la direzione $d = [1\ \ -5]^T$. Per ciascuno dei due punti P e Q, dire se la direzione d è una direzione ammissibile di discesa o meno (e perché).

2.34 5/7/05

Si consideri il problema

$$\begin{aligned}
\min 4x_1^2 + x_1x_2 & \\
g_1(x) = x_1 + x_2 - 10 &\geq 0 \\
g_2(x) = -x_1^2 - x_2 + 100 &\geq 0 \\
g_3(x) = x_1 - x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Quali di questi punti $A = [10\ 0]^T$ $B = [6\ 5]^T$ $C = [5\ 5]^T$ $D = [1\ 1]^T$ si possono escludere che siano punti di minimo locale?

Svolgimento

Nel punto $A = [10\ 0]^T$ sono attivi i vincoli g_1 e g_2, le condizioni di qualificazione dei vincoli attivi sono rispettate, e $\lambda_1 = \frac{120}{19}$, $\lambda_2 = -\frac{70}{19}$ $\lambda_3 = 0$. Il punto non rispetta le condizioni KKT e quindi non può essere un minimo locale. Il punto $B = [6\ 5]^T$ si trova all'interno della regione ammissibile (nessun vincolo attivo) e $\lambda_1 =$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Il punto non rispetta le condizioni KKT e quindi non può essere un minimo locale. Nel punto $C = [5\ 5]^T$ sono attivi i vincoli g_1 e g_3. Il punto rispetta le condizioni KKT (con $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 0$ $\lambda_3 = 20$), e quindi può essere un minimo locale. Il punto $D = [1\ 1]^T$, violando il vincolo g_1, si trova fuori dalla regione ammissibile.

2.35 Prima prova 2005-2006

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned}
\min x_1 + x_2^2 & \\
g_1(x) = 4x_1^2 - x_2 + 2 &\geq 0 \\
g_2(x) = -x_1 + x_2^2 &\geq 0 \\
g_3(x) = -x_1x_2 + 1 &\geq 0 \\
g_4(x) = x_1 &\geq 0 \\
g_5(x) = -x_2 + 2 &\geq 0
\end{aligned}$$

- Quali di questi punti $A = (0, 2)$, $B = (1/2, 2)$ e $C = (3/4, 4/3)$ possiamo escludere essere punti di minimo locale?
- Partendo dal punto $D = (0, 0)$, si studi la sensibilità della funzione obiettivo ad una variazione ϵ del vincolo g_2.
- Partendo dal punto $E = (1, 1)$, si determini (in maniera analitica) una direzione di discesa ammissibile.
- Partendo dal punto $F = (0, 1)$, la direzione $d = [-1\ \ 1]^T$ è una direzione di discesa o salita? È una direzione ammissibile o no?

3

Formulazioni di PL

3.1 5/7/2005

La società petrolifera Benzine&Benzine, produce tre carburanti: Super, Diesel, SuperUltra, i cui prezzi di vendita sono, rispettivamente, 40, 30 e 50 centesimi di euro al litro. Il profitto sulla SuperUltra è pari a 20% del prezzo di vendita, mentre il profitto su Super e Diesel è pari al 10% del prezzo di vendita. La società desidera ottenere un venduto mensile non inferiore a mezzo milione di euro. Il processo produttivo di Super e Diesel genera un residuo tossico da smaltire pari a 5 grammi di residuo per litro prodotto e 8 grammi di residuo per litro di SuperUltra prodotto. Il residuo tossico viene smaltito in un impianto apposito nello stesso mese di produzione, l'impianto di smaltimento ha una capacità massima di 2 tonnellate/mese. La SuperUltra è meno richiesta dal mercato, per cui per poter vendere un litro di SuperUltra è necessario vendere almeno 2 litri di Super. Formulare il problema come un problema di PL al fine di massimizzare i profitti della Benzine&Benzine.

Svolgimento

Indicando con x_1, x_2, x_3 il quantitativo in litri di Super, Diesel e SuperUltra prodotte la formulazione diviene:

$$
\begin{array}{rcl}
\max 0.04x_1 + 0.03x_2 + 0.1x_3 & & \\
0.4x_1 + 0.3x_2 + 0.5x_3 & \geq & 500000 \\
5x_1 + 5x_2 + 8x_3 & \leq & 2000000 \\
2x_1 - x_3 & \geq & 0 \\
x & \geq & 0
\end{array}
$$

Dove i coefficenti della funzione obiettivo rappresentano la percentuale di profitto sul costo di vendita, il primo vincolo rappresenta il vincolo sul venduto totale, il secondo sui residui tossici, mentre il terzo vincolo rappresenta il vincolo sulla produzione di SuperUltra.

3.2 20/4/04

La Seafood&C si compone di tre stabilimenti (che chiameremo A, B e C) in cui si allevano vongole. La produzione di vongole comporta l'emissione di sostanze inquinanti. Per ogni inquinante, nella tabella seguente sono riportate le emissioni di ogni stabilimento per unità di produzione (quintale di vongole) e la produzione attuale (in quintali di vongole). Nel

	fosfati	carbonati	nitrati	azoto	produzione attuale
A	4	2	1	9	20
B	3	1	5	6	30
C	1	7	3	7	10

prossimo periodo, si richiede che ogni stabilimento abbia un livello di produzione almeno pari a quello attuale, e che non produca più di 500 quintali di vongole.
Leggi sulla tutela ambientale impongono che nella zona interessata non si possano avere valori complessivi degli inquinanti più alti di quelli riportati in tabella seguente, Sapendo

	fosfati	carbonati	nitrati	azoto
quintali	100	210	180	250

ogni stabilimento vende un quintale di vongole al prezzo riportato nella tabella seguente, formulare come PL il problema di massimizzare il profitto complessivo.

	A	B	C
Prezzo (q)	50	60	40

Svolgimento

Indicando con x_A, x_B, x_C il quantitativo di vongole (in quintali) prodotte da ogni stabilimento la formulazione diviene:

$$
\begin{array}{rcl}
\max 50x_A + 60x_B + 40x_C & & \\
4x_A + 3x_B + x_C & \leq & 100 \\
2x_A + x_B + 7x_C & \leq & 210 \\
1x_A + 5x_B + 3x_C & \leq & 180 \\
9x_A + 6x_B + 7x_C & \leq & 250 \\
x_A & \geq & 20 \\
x_B & \geq & 30 \\
x_C & \geq & 10 \\
x & \leq & 500
\end{array}
$$

Dove i coefficenti della funzione obiettivo rappresentano il profitto ottenibile dalla vendita di vongole, i primi quattro vincoli rappresentano i vincoli di tutela ambientale, mentre i rimanenti vincoli rappresentano i limiti produttivi inferiori (dati dalla produzione nel periodo precedente) e superiori (dati dalla massima capacit degli stabilimenti).

3.3 29/4/05

La BancaBassotti deve acquistare dei titoli di stato di varie nazioni che andranno a formare delle quote di due prodotti finanziari venduti dalla banca (Sviluppo e CivilWar). La BancaBassotti può acquistare fino a 100000 titoli di stato del Ruanda (7 euro l'uno), 200000 titoli di stato dell'Argentina (13 euro l'uno), 300000 titoli di stato dell'Iraq (4 euro l'uno), e una quota di ogni prodotto finanziario è composta esattamente da 100 titoli di stato. La BancaBassotti ha stimato di poter vendere precisamente 7000 quote Sviluppo

Prodotto	Ruanda	Argentina	Iraq
Sviluppo	assenti	almeno 40%	almeno 40%
CivilWar	non più 40%	assenti	almeno 80%

e 3000 quote CivilWar. Si formuli il problema di PL di formare le quote richieste cercando di minimizzare i costi di acquisto dei titoli da parte della BancaBassotti.

Svolgimento

Indicando ad apice la nazione (R per Ruanda, A per Argentina e I per Iraq) e a pedice il prodotto finanziario (S per Sviluppo, C per CivilWar) le quattro variabili per formulare il problema sono $x_S^A, x_S^I, x_C^R, x_C^I$. La variabili rappresentano il numero di titoli di stato che componogono una quota di ogni tipo di prodotto finanziario. La formulazione diviene:

$$
\begin{array}{rcl}
\multicolumn{3}{l}{\min 7(3000x_C^R) + 13(7000x_S^A) + 4(7000x_S^I + 3000x_C^I)} \\
3000x_C^R & \leq & 100000 \\
7000x_S^A & \leq & 200000 \\
3000x_C^I + 7000x_S^I & \leq & 300000 \\
x_S^A & \geq & 40 \\
x_S^I & \geq & 40 \\
x_S^A + x_S^I & = & 100 \\
x_C^R & \leq & 40 \\
x_C^I & \geq & 80 \\
x_C^R + x_C^I & = & 100 \\
x & \geq & 0
\end{array}
$$

Dove i coefficenti della funzione obiettivo rappresentano il costo di acquisto delle 3000 quote di Sviluppo e delle 7000 quote di CivilWar da parte della BancaBassotti. I primi vincoli rappresentano il massimo numero di titoli di stato reperibili sul mercato, mentre i seguenti sei vincoli rappresentano i vincoli di composizione delle quote dei due prodotti finanziari e il fatto che devono essere composti esattamente da 100 titoli di stato ognuno.

3.4 1/9/04

L'azienda Program&Co produce software e deve decidere quanto tempo impiegare la prossima settimana su ogni progetto che sta portando avanti. In tabella sono indicati i progetti che possono essere eseguiti la prossima settimana, il minimo e massimo numero di ore di programmazione da impiegare su ogni progetto e il profitto per ogni ora di progetto svolto. La Program&Co dispone di quattro dipendenti programmatori. Formulare il problema di massimizzare il profitto dell'azienda, sapendo che ogni dipendente lavora al più 40 ore alla settimana e che ogni programmatore non può lavorare per più di 20 ore alla settimana sullo stesso progetto.

Progetti	Numero di ore minimo-massimo	Profitto orario
sviluppo di portali web	50-80	60 euro
applicativi bancari	30-120	80 euro
gestionali per benzinai	5-80	50 euro

Svolgimento

Indicando con x_{ij} il numero di ore lavorate dal programmatore i sul progetto j la formulazione diviene:

$$\begin{aligned}
\max 60(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}) &+ 80(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42})+50(x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43})\\
x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} &\leq 80\\
x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} &\geq 50\\
x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} &\leq 120\\
x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} &\geq 30\\
x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} &\leq 80\\
x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} &\geq 5\\
x_{11}+x_{12}+x_{13} &\leq 40\\
x_{21}+x_{22}+x_{23} &\leq 40\\
x_{31}+x_{32}+x_{33} &\leq 40\\
x_{41}+x_{42}+x_{43} &\leq 40\\
x &\leq 20\\
x &\geq 0
\end{aligned}$$

Dove i termini della funzione obiettivo rappresentano il guadagno della Program&Co. Le prime tre coppie di vincoli limitano il numero minimo e massimo di ore svolte dai programmatori sui tre progetti, mentre i quattro vincoli seguenti rappresentano il massimo numero di ore che ogni programmatore pu lavorare in una settimana. Infine gli ultimi due vincoli definiscono il numero massimo e minimo di ore che un programmatore pu svolgere su ogni progetto software.

3.5 30/9/04

Un'azienda produttrice di alimenti esotici precotti deve decidere la quantità di ogni alimento che deve essere prodotta la prossima settimana. Sono dati il catalogo dell'azienda, riportante i prezzi al kg dei singoli alimenti, il ricettario della cucina e le disponibilità di magazzino dei vari ingredienti. L'obiettivo dell'azienda è di massimizzare il profitto derivante dalla vendita degli alimenti prodotti. Ulteriori vincoli impongono che alcuni alimenti rispettino una soglia minima di produzione. In Tabella, sono riportati i profitti derivanti dalla vendita di ogni alimento (Euro/kg). Di seguito sono riportati gli ingredi-

Alimenti	profitto (Euro al kg)
crespelle alla darwin	80
iguana alla bismarck	130
frittata di rane del borneo	90
cotoletta alla tarzan	110
zabaione galapagos	60

enti necessari alla preparazione di una porzione di alimento (corrispondente a 250 g di alimento):

1. crespelle alla darwin: mezza iguana, 150g fegato di rana del borneo, 200g uova di tartaruga panamense, 80g farina di cocco.

2. iguana alla bismarck: mezza iguana, 100g uova di tartaruga panamense, 100g fegato di rana del borneo.

3. frittata di rane del borneo: 80g uova di tartaruga panamense, 20g fegato di rana del borneo, 10g farina di cocco, 1 dl latte di gnu.

4. cotoletta alla tarzan: una iguana, 120g uova di tartaruga panamense, 100g farina di cocco, 1/2 dl latte di gnu.

5. zabaione galapagos: 3 dl latte di gnu, 50g uova di tartaruga panamense, 10g farina di cocco.

Esigenze di mercato impongono che la prossima settimana siano prodotte almeno 50 kg di crespelle alla darwin e non più di 40 kg di zabaione galapagos.
Sapendo che in magazzino sono disponibili 100kg di uova di tartaruga panamense, 1000 iguane, 100kg di fegato di rana del borneo, 2000 kg di farina di cocco e 5000 litri di latte di gnu stabilire la quantità di ogni alimento da produrre in modo da massimizzare il profitto dell'azienda.

Svolgimento

Indicando con x_1 il numero di porzioni da 250g di alimento prodotte (x_1 corrsiponde alle crespelle alla Darwin, x_5 allo zabaione galapagos) la formulazione diviene:

$$\max(80x_1 + 130x_2 + 90x_3 + 110x_4 + 60x_5)/4$$

$$\begin{aligned} 0.5x_1 + 0.5x_2 + x_4 + 10x_5 &\leq 1000 \\ 150x_1 + 100x_2 + 20x_3 + 100x_4 &\leq 100000 \\ 200x_1 + 100x_2 + 80x_3 + 120x_4 + 50x_5 &\leq 100000 \\ 80x_1 + 100x_4 &\leq 2000000 \\ x_3 + 0.5x_4 + 3x_5 &\leq 50000 \\ x_1 &\geq 4(50) \\ x_5 &\leq 4(40) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Dove i termini della funzione obiettivo rappresentano il profitto derivato dalla vendita, siccome i prezzi di vendita sono dati in euro al kg. si è provveduto ad una scalatura. I primi cinque vincoli (uno per ogni risorsa) permettono di tener conto degli ingredienti in magazzino, mentre i rimanenti impongono vincoli sui quantitativi totali prodotti (riportati in numero di porzioni).

3.6 2004

In una segheria si vogliono produrre dei pezzi di legno per delle scaffalature a partire da un insieme di assi di legno lunghe un metro. Le assi di legno possono essere tagliate in diverse modalità al fine da produrre pezzi da 30cm, 50cm e 70cm. In particolare si vogliono produrre 70 pezzi da 30cm, 62 da 50cm e 37 da 70cm, avendo a disposizione 150 assi. L'obiettivo quello di minimizzare i costi. Tenendo presente che per ogni taglio che viene effettuato secondo una data configurazione costa come riportato in tabella. Formulare il

Pezzi prodotti da un'asse	Costo in centesimi di euro
1	10
2	25
3	40

problema come un problema di PL.

Svolgimento

Si indica con x_i il numero di assi tagliate secondo una data modalità di taglio. In particolare, le configurazioni possibili di tagli sono 8: x_1 un pezzo da 70cm, x_2 un pezzo da 50cm e x_3 un pezzo da 30cm, x_4 un pezzo da 70cm e uno da 30cm, x_5 un pezzo da 50cm e uno da 30cm, x_6 due pezzi da 50cm x_7 due pezzi da 30cm e infine x_8 produce 3 pezzi da 30cm. La formulazione diviene:

$$\min 10(x_1 + x_2 + x_3) + 25(x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + 40x_8$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &\geq 37 \\ x_2 + x_5 + 2x_6 &\geq 62 \\ x_3 + x_4 + x_5 + 2x_7 + 3x_8 &\geq 70 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Dove la funzione obiettivo tende a minimizzare i costi di taglio, ed i vincoli tengono conto del numero di pezzi prodotti da ogni tipologia di taglio.

3.7 seconda prova 2004

La SweetDreams, azienda leader nella produzione di materassi, deve pianificare la produzione nella prossima settimana dell'operaio Mario. Mario ha a sua disposizione l'uso di due macchine, A e B. Nella possima settimana la macchina A può essere usata al più 27 ore, mentre la macchina B è a disposizione di Mario per non più di 18 ore. Inoltre si tenga conto che Mario, per contratto, deve lavorare *esattamente* 40 ore settimanali. Mario può produrre tre tipologie differenti di materassi, ogni materasso richiede un certo numero di ore lavorative sulla macchina A e sulla macchina B come riportato in tabella. In tabella viene anche riportato il costo delle materie prime necessarie alla produzione dei vari materassi ed il numero di ordini già effettuati da alcuni clienti, la cui domanda dovrà necessariamente essere soddisfatta. Formulare il problema di PL per decidere quanti mat-

	Ore Macchina A	Ore Macchina B	Costo (euro)	Domanda
Fachiro	3	2	68	3
Dormibene Bimbo	6	1	85	2
GoldenDream DeLuxe	2	6	103	1

erassi di ciascun tipo Mario debba produrre al fine di minimizzare i costi di produzione.

Svolgimento

Si indica con x_1 il numero di materassi prodotti da Mario per ogni tipologia (x_1 indica il numero di materassi Fachiro, e x_3 i GoldenDream DeLuxe). La formulazione diviene:

$$\min 68x_1 + 85x_2 + 103x_3$$
$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 & \leq & 27 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 & \geq & 18 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 & = & 40 \\ x_1 & \geq & 3 \\ x_2 & \geq & 2 \\ x_3 & \geq & 1 \end{array}$$

Dove la funzione obiettivo tende a minimizzare i costi di produzione dei vari tipi di materassi, mentre i primi tre vincoli impongono delle limitazioni sul numero di ore lavorate sulla macchina A, B e complessivamente da Mario. Mentre i rimanenti vincoli tengono conto dei materassi già prenotati dai clienti.

3.8 seconda prova 2004

Il Giocattolificio, azienda leader nella produzione di giocattoli, deve decidere la produzione per il prossimo mese. Il Giocattolificio produce due tipi di macchinine, TurboSpider e

Gippone. Ciascuna macchinina richiede diverse quantità di materie prime, come rappresentato in tabella. In tabella vengono anche riportati gli ordini effettuati da alcuni clienti, la cui domanda dovrà necessariamente essere soddisfatta. Il Giocattolificio ha a

	Metallo	Plastica	Ruote	Profitto (euro)	Domanda
TurboSpider	20 gr	30 gr	4	13	300
Gippone	6 gr	70 gr	5	25	400

disposizione nei magazzini 13 Kg di metallo, 55 Kg di plastica e 4800 ruote. Limitazioni produttive impongono che lo stabilimento non sia in grado di produrre più di 1000 macchinine al mese, e inoltre, per motivi di obsolescenza dei materiali, si vuole impiegare *tutto* il metallo presente in magazzino. Formulare il problema di PL per decidere quante macchinine di ciascun tipo debbano essere prodotte al fine di massimizzare i profitti de Il Giocattolificio.

Svolgimento

Indicando con x_1 il numero di TurboSpider prodotte, e con x_2 il numero di Gipponi prodotti la formulazione diviene:

$$
\begin{array}{rcl}
\max 13x_1 + 25x_2 & & \\
x_1 + x_2 & \leq & 1000 \\
20x_1 + 6x_2 & = & 13000 \\
30x_1 + 70x_2 & \leq & 55000 \\
4x_1 + 5x_2 & \leq & 4800 \\
x_1 & \geq & 300 \\
x_2 & \geq & 400
\end{array}
$$

Dove la funzione obiettivo tende a massimizzare i profitti. I primi vincoli impongono delle limitazioni sulla capacità produttiva dello stabilimento, e sulle materie prime presenti in magazzino. Mentre i rimanenti vincoli tengono conto degli ordinativi da soddisfare.

3.9 Gestione Progetto Sito Web (massimizzazione dei profitti)

E' stato commissionato alla vostra piccola software house il progetto di sviluppo di sito web. Il progetto consisite nello sviluppare una applicazione che si interfacci anche con un database, per cui richiede lo sviluppo di un programma. Visto che avete intenzione di accettare altre commesse simili avete deciso di dedicare il maggior tempo possibile allo sviluppo del programma, in modo da guadagnare esperienza nel campo e nella speranza di riuscire a sviluppare più rapidamente progetti simili. Per lo scopo è quello di riuscire a massimizzare le ore spese nella programmazione. Sono stati individuati i seguenti compiti da svolgere:

- Supervisione (1): Questo compito richiede almeno 20 ore a cui vanno aggiunte almeno il 10% delle ore spese nella programmazione.
- Relazioni esterne (2): Richiede almeno 25 ore.
- Grafica (3): Lo sviluppo del layout grafico del sito richiede almeno 5 ore, a cui vanno aggiunte il 10% delle ore spese nella programmazione.
- Sistemista (4): Per amministrare i sistemi sono necessarie almeno 40 ore.
- Programmazione (5): Lo sviluppo dei programmi richiede almeno 10 ore.

Il personale che si ha a disposizione per svolgere questo progetto consiste in tre persone, un direttore, un tecnico e un segretario. Tutto il personale è disponibile per lo sviluppo del progetto per una settimana, ovvero per 40 ore di lavoro. Il direttore è in grado di svolgere i compiti di supervisione, e di relazioni esterne. Inoltre è in grado di usare un programma di grafica, per cui pu svolgere il compito di Grafica. Va comunque specificato che il direttore non è molto esperto nell'uso di questo programma, per cui ogni sua ora spesa in questo compito equivale ad un avanzamento di mezz'ora. Il tecnico è in grado di programmare, sviluppare grafica, e amministrare il sistema. Il segretario sa svolgere il compito di relazioni esterne, e inoltre è in grado di usare un programmare e svolgere i compiti da sistemista, ma in entrambi questi compiti ogni ora spesa equivale ad un avanzamento di mezz'ora.

Svolgimento

Si introducono le seguenti 9 variabili che rappresentano le ore spese da una persona (d, t, s) su ogni compito (1, 2, 3, 4, 5): x_{d1}, x_{d2}, x_{d3} (direttore), x_{t3}, x_{t4}, x_{t5} (tecnico) e x_{s2}, x_{s4}, x_{s5} (segretario). La funzione obiettivo è di massimizzare le ore spese nella programmazione, rispettando i vincoli sul compito di supervisione, sul compito di relazioni esterne, sul compito di grafica, sul compito di sistemista, sul compito di programmazione e i vincoli sulle ore di lavoro del direttore, del tecnico, del segretario, e i vincoli di non negatività delle variabili.

$$
\begin{aligned}
& \max x_{t5} + x_{s5}/2 \\
x_{d1} &\geq 20 + 0.1(x_{t5} + x_{s5}/2) \\
x_{d2} + x_{s2} &\geq 25 \\
x_{d3}/2 + x_{t3} &\geq 5 + 0.1(x_{t5} + x_{s5}/2) \\
x_{t4} + x_{s4}/2 &\geq 40 \\
x_{t5} + x_{s5}/2 &\geq 10 \\
x_{d1} + x_{d2} + x_{d3} &\geq 40 \\
x_{t3} + x_{t4} + x_{t5} &\geq 40 \\
x_{s2} + x_{s4} + x_{s5} &\geq 40 \\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$

3.10 Gestione Progetto Sito Web (minimizzazione degli straordinari)

Un altro sito web è stato commissionato alla vostra piccola software house. Questo progetto ha dimensioni maggiori del precedente, e richiede lo sviluppo di un elegante layout grafico e anche il riuso di parte del software sviluppato nel progetto precedente. Lo scopo è quello di riuscire a minimizzare gli straordinari da pagare al team di sviluppo. Sono stati individuati i seguenti compiti da svolgere:

- Supervisione (1): Questo compito richiede almeno 30 ore.
- Relazioni esterne (2): Richiede almeno 30 ore.
- Grafica (3): Lo sviluppo del layout grafico del sito richiede almeno 20 ore.
- Sistemista (4): Per amministrare i sistemi sono necessarie almeno 40 ore.
- Programmazione (5): Lo sviluppo dei programmi richiede almeno 5 ore.

Il personale che si ha a disposizione per svolgere questo progetto consiste in tre persone, un direttore, un tecnico e un segretario. Tutto il personale è disponibile per lo sviluppo del progetto per una settimana, ovvero per 40 ore di lavoro. Inoltre tutto il personale può svolgere fino a 10 ore di straordinario che verranno retribuite con 100 euro l'ora per il direttore, 50 euro l'ora per il tecnico e 30 euro l'ora per il segretario. Il direttore è in grado di svolgere i compiti di supervisione, e di relazioni esterne. Inoltre è in grado di usare un programma di grafica, per cui pu svolgere il compito di Grafica. Va comunque specificato che il direttore non è molto esperto nell'uso di questo programma, per cui ogni sua ora spesa in questo compito equivale ad un avanzamento di mezz'ora. Il tecnico è in grado di programmare, sviluppare grafica, e amministrare il sistema. Il segretario sa svolgere il compito di relazioni esterne, e inoltre è in grado di usare un programmare e svolgere i compiti da sistemista, ma in entrambi questi compiti ogni ora spesa equivale ad un avanzamento di mezz'ora.

Svolgimento

Si introducono le seguenti 9 variabili che rappresentano le ore spese da una persona (d, t, s) su ogni compito (1, 2, 3, 4, 5): x_{d1}, x_{d2}, x_{d3} (direttore), x_{t3}, x_{t4}, x_{t5} (tecnico) e x_{s2}, x_{s4}, x_{s5} (segretario). Inoltre introduciamo anche tre variabili che rappresentano gli straordinari per ogni persona (s_d, s_t, s_s). La funzione obiettivo è di minimizzare gli straordinari, rispettando i vincoli sul compito di supervisione, sul compito di relazioni esterne, sul compito di grafica, sul compito di sistemista, sul compito di programmazione e i vincoli sulle ore di lavoro del direttore, del tecnico, del segretario, e i vincoli sul massimo numero di straordinari e di non negatività delle variabili.

$$
\begin{aligned}
&\min 100s_d + 50s_t + 30s_s \\
&\qquad\qquad x_{d1} \geq 30 \\
&\qquad\qquad x_{d2} + x_{s2} \geq 30
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{d3}/2 + x_{t3} &\geq 20 \\
x_{t4} + x_{s4}/2 &\geq 40 \\
x_{t5} + x_{s5}/2 &\geq 5 \\
x_{d1} + x_{d2} + x_{d3} &\leq 40 + s_d \\
x_{t3} + x_{t4} + x_{t5} &\leq 40 + s_t \\
x_{s2} + x_{s4} + x_{s5} &\leq 40 + s_s \\
s &\leq 10 \\
x, s &\geq 0
\end{aligned}
$$

3.11 Atelier del Depliant

L'Atelier del Depliant è uno studio di design, e deve produrre un depliant per un cliente. Il depliant deve essere consegnato entro due settimane, e al termine della prima settimana, si terrà una riunione con il cliente per verificare il lavoro svolto. Due persone sono adibite alla produzione di questo depliant: Alberto e Bruno. Alberto e Bruno sono comunque impegnati anche in altri progetti e possono dedicare a questo lavoro solamente 20 ore (Alberto) e 15 ore (Bruno) nella prima settimana e 10 ore (Alberto) e 15 ore (Bruno) nella seconda settimana. I compiti da svolgere sono i seguenti: disegno del logo, scrittura del testo e impaginazione del testo. Il disegno del logo richiede almeno 30 ore di lavoro, la scrittura del testo richiede almeno 20 ore di lavoro, e l'impaginazione del testo richiede almeno 10 ore di lavoro. La scrittura del testo va ultimata entro la prima settimana. Per quanto riguarda il disegno del logo alla fine della prima settimana bisogna presentare un bozzetto, il che richiede almeno 10 ore di lavoro e non più di 20 ore. Naturalmente al termine della seconda settimana il logo va terminato. Infine durante la prima settimana non è possibile lavorare all'impaginazione del testo, per cui l'impaginazione va svolta interamente nella seconda settimana. Alberto è un bravo disegnatore, e ogni ora impiegata a disegnare il logo fanno avanzare il compito di 1 ora, mentre 2 ore di lavoro nel compito dell'impaginazione fanno avanzare il compito di 1 ora. Inoltre Alberto non è un bravo scrittore e 3 ore di lavoro portano all'avanzamento di 1 ora. Bruno è abile a scrivere i testi, infatti ogni ora di lavoro in questo compito portano ad un avanzamento di 1 ora, mentre 2 ore di lavoro di Bruno nel disegno del logo sono equivalenti ad 1 ora di avanzamento del compito. Sfortunatamente Bruno non è in grado di usare il programma dell'impaginazione e quindi non può lavorare a quel compito. L'obiettivo è quello di minimizzare i costi, sapendo che Alberto viene pagato 80 euro all'ora la prima settimana e 100 euro l'ora nella seconda settimana, mentre Bruno viene pagato 50 euro l'ora sia la prima che la seconda settimana.

Svolgimento

Si introducono le seguenti variabili: x_{ijk}, con $i = \{a, b\}$ (dove a = Alberto, e b = Bruno) e $j = \{L, S, I\}$ (con L = Logo, S = Scrittura, I = Impaginazione) e $k = \{1, 2\}$ (1 = Prima Settimana, 2 = Seconda Settimana) che rappresentano le ore spese dalla persona i a lavorare sul compito j nella settimana k.

In particolare le variabili x_{bIk}, x_{iI1}, x_{iS2} sono superflue per cui non verranno considerate. Infatti Bruno non può lavorare al compito Impaginazione, e la scrittura va terminata entro la prima settimana, mentre l'impaginazione non può essere svolta nella seconda settimana.

La funzione obiettivo sarà la minimizzazione dei costi con i vincoli rappresentati dal massimo numero di ore di lavoro di alberto e bruno nella prima e seconda settimana, e dai vincoli sul numero di ore spese per la creazione del Logo, e della Scrittura e dell'Imapginazione. La formulazione di PL è data dal seguente sistema:

$$\min 80*(x_{aL1}+x_{aS1})+100*(x_{aL2}+x_{aI2})+50*(x_{bL1}+x_{bS1}+x_{bL2})$$
$$\begin{aligned} x_{aL1}+x_{aS1} &\leq 20 \\ x_{aL2}+x_{aI2} &\leq 15 \\ x_{bL1}+x_{bS1} &\leq 10 \\ x_{bL2} &\leq 15 \\ x_{aL1}+x_{bL1}/2 &\geq 10 \\ x_{aL1}+x_{bL1}/2 &\leq 20 \\ x_{aL1}+x_{bL1}/2+x_{aL2}+x_{bL2}/2 &\geq 30 \\ x_{aS1}/3+x_{bS1} &\geq 20 \\ x_{aI2}/2 &\geq 10 \end{aligned}$$

3.12 Distribuzione di mazzette

Si ha un budget di 100000 euro per corrompere persone in una commissione. La commissione è composta da 15 membri influenti e 30 membri poco influenti. Corrompere un membro influente costa 10000 euro, mentre la corruzione di un membro poco influente costa solo 1000 euro. Le probabilità di veder accettata la propria proposta nella commissione aumentano nel seguente modo. I primi 5 membri influenti corrotti danno un +5% a membro, i secondi 5 danno +3% a membro, mentre gli ultimi 5 danno un +2% a membro. I primi 10 membri influenti danno un +3%, i secondi 10 un +2%, mentre gli ultimi dieci solo un +1%. Si vuole massimizzare la probabilità di ottenere un giudizio favorevole.

Svolgimento

Si introducono le seguenti variabili x_{I1}, x_{I2}, x_{I3} sul numero di membri influenti (nel primo, secondo e terzo gruppo, rispettivamente), e x_{N1}, x_{N2}, x_{N3} sui membri non influenti (nel primo, secondo e terzo gruppo). Il problema diviene:

$$\max 5x_{I1}+3x_{I2}+2x_{I3}+3x_{N1}+2x_{N2}+1x_{N3}$$
$$\begin{aligned} 10000(x_{I1}+x_{I2}+x_{I3})+1000(x_{N1}+x_{N2}+x_{N3}) &\geq 100000 \\ x_I &\leq 5 \\ x_N &\leq 10 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Con i vincoli sul budget e sulla numerosità dei gruppi influenti e non influenti, ed i vincoli di non negatività.

3.13 25-03-03

In un'officina meccanica, per far fronte alla produzione del prossimo periodo, devono essere effettuati alcuni tipi di lavorazione, per un certo numero di ore-macchina. Ciascun tipo di lavorazione può essere distribuito tra alcune macchine, in grado di effettuarlo, secondo quanto indicato in tabella. Il problema è quello di distribuire il tempo richiesto dalle

	ore	può essere eseguita da
tornitura	20	M_1, M_2
fresatura	30	M_2, M_3
taglio	15	M_3
perforazione	15	M_1,M_2,M_3
rifinitura	40	M_1, M_3
rivettatura	20	M_2

varie lavorazioni alle macchine, in modo da minimizzare il carico di lavoro della macchina più carica (ovvero terminare le lavorazioni il più presto possibile). Formulare il problema come PL.

3.14 25-03-03

Il laboratorio di ricerca di un'acciaieria vuole sperimentare un nuovo materiale metallico, il Metalok. I requisiti di questo materiale sono che deve avere una percentuale di carbone compresa fra il 3,2% e il 3,5%, una percentuale di silicio tra 1,8% e 2,5% e infine una percentuale di nickel tra 0,9% e 1,2%. Per fabbricare il Metalok viene utilizzata una miscela di tre leghe, A, B e C, il cui contenuto percentuale di carbone, silicio e nickel è riportato in tabella, oltre al costo (in migliaia di euro) per tonnellata. Determinare in quale proporzione devono essere utilizzate le tre leghe per minimizzare il costo di una tonnellata di Metalok.

	Lega A	Lega B	Lega C
Carbone	3	3,2	4
Silicio	2	2,5	1,5
Nickel	0,5	1	1,5
Costo per ton.	0,19	0,2	0,3

3.15 25-03-03

Si considerino i seguenti cinque punti: si vuole trovare la parabola $y = ax^2 + bx + c$ tale

x_i	y_i
1	5
2	2
3	1
4	3
5	6

che sia minima la somma degli scarti, in valore assoluto, tra il punto sulla parabola e i punti dati. Formulare il problema come PL.

3.16 25-03-03

Un'azienda che costruisce turbine vuole pianificare la produzione per i prossimi 4 mesi. All'inizio del mese corrente una turbina è disponibile in magazzino. Il numero di turbine che devono essere consegnate ai vari clienti alla fine dei prossimi 4 mesi sono rispettivamente 2, 1, 1 e 0. Inoltre l'azienda vuole che all'inizio del quinto mese sia disponibile una turbina di scorta in magazzino. Ciò richiede quindi la produzione di un totale di 4 turbine nei prossimi 4 mesi.
L'ordine alla fine di un dato mese può essere soddisfatto dalla produzione del mese corrente e/o prelevando dal magazzino. Non più di due turbine possono essere prodotte ogni mese. Il costo per produrre 0, 1 o 2 turbine in un dato mese è rispettivamente 10 (dovuto al costo di mantenimento dell'impianto), 17 e 20 migliaia di Euro. Il costo mensile di giacenza in magazzino di 0, 1 o 2 turbine è rispettivamente 0, 3 e 7 migliaia di Euro. Formulare e risolvere su un opportuno grafo il problema di scegliere quante turbine produrre ogni mese in modo da soddisfare le richieste e minimizzare il costo complessivo di produzione.

3.17 25-03-03

In un reparto di una fabbrica di componenti metallici per macchine agricole, da lamine rettangolari di acciaio vengono tagliati due tipi di componenti: dischi e piastre. Da una lastra possono ricavarsi:

- 4 dischi
- 3 dischi e 1 piastra
- 1 disco e 2 piastre

Le lamine di acciaio sono di due tipi: *grezze* o *lucidate*. Gli ordini da soddisfare nel prossimo periodo sono riportati in tabella. Formulare come PL il problema di soddisfare gli ordini al costo minimo, tenendo conto che una lamina lucidata costa 1.4 volte una lamina grezza.

	quantità	rifinitura
dischi	200	grezzi
dischi	400	lucidati
piastre	150	grezze
piastre	300	grezze o lucidate

3.18 25-03-03

Una fabbrica di sedie deve pianificare la produzione per il prossimo periodo. Esistono tre tipi di sedie. Ogni sedia richiede una certa quantità di legno e un certo numero di ore di manodopera. Sono disponibili 150 kg di legno, 130 di metallo e 350 ore di manodopera. Per quanto concerne il profitto, si ha che le prime 100 sedie (di ciascun tipo) sono vendute a un certo prezzo, mentre le successive a un prezzo inferiore. Formulare come PL il

tipo	legno (kg)	manod. (ore)	euro/sedia prime 100	euro/sedia successive
A	0.5	2	250	150
B	0.4	1.5	200	120
C	0.6	2.5	350	170

problema di determinare il piano di produzione ottimo.

3.19 25-03-03

Una pasticceria produce due tipi di torta, A e B. Ciascuna torta richiede una certa quantità di latte, zucchero e panna. La panna viene prodotta dalla pasticceria stessa, che può anche venderla direttamente al pubblico. La pasticceria dispone di 25 litri di latte e 15 kg di

	latte (litri)	zucchero (kg)	panna (kg)	prezzo vendita unitario (euro)
torta A	0.5	0.3	0.2	10
torta B	0.6	0.2	0.4	15
panna (1 kg)	0.7	0.3	–	3

zucchero. Il problema è quello di programmare la produzione (di torte e panna) al fine di massimizzare il profitto. Formulare come PL questo problema.

3.20 25-03-03

Un'industria chimica produce due tipi di plastiche (A e B), secondo tre diversi processi chimici (1, 2 e 3). Questi tre processi si differenziano per come utilizzano le risorse produttive, vale a dire manodopera e teflon. In particolare, in un'ora, ciascun processo richiede un certo numero di operai (dunque, di ore/uomo) e una certa quantità di teflon. Sempre in un'ora, ciascun processo produce una certa quantità di plastica A e di plastica B (vedi tabella). Nel prossimo periodo sono disponibili complessivamente 800 ore/uomo e 450 kg di teflon. Un kg di plastica A viene venduta a 16 euro, un kg di plastica B a 14 euro. Determinare come attivare i vari processi in modo da massimizzare il profitto.

	operai	teflon (kg)	plastica A (kg)	plastica B (kg)
processo 1	2	1	0,23	0,15
processo 2	3	2	0,4	0,35
processo 3	4	2	0,5	0,25

Table 3.1: Assorbimento di risorse e produzione di plastiche in un'ora di ciascun processo.

3.21 seconda prova 2005

Antonio e Beatrice devono divedersi una serie di pratiche da svolgere. Le pratiche da svolgere si dividono in 4 diverse categorie, e sono anche lavorabili da Antonio e Beatrice simultaneamente. In una giornata lavorativa, Antonio è in grado di completare 20 Acquisti, oppure 40 Bonifici, oppure 60 Catalogazioni, oppure 25 DataProcessing. In una giornata lavorativa, Beatrice riesce a completare 8 Acquisti, oppure 50 Bonifici, oppure 80 Catalogazioni oppure 40 DataProcessing. I dati del problema sono rappresentati nella seguente tabella. Formulare il problema di PL per decidere come Antonio e Beatrice

	Numero di Pratiche da svolgere
Acquisti	50
Bonifici	100
Catalogazione	150
DataProcessing	230

possano dividersi le pratiche in modo da riuscire a terminare il lavoro prima possibile.

3.22 seconda prova 2005

La Melamangio azienda agricola specializzata in produzione di mele deve decidere la produzione per il prossimo anno. Sono possibili quattro produzioni. Nella tabella, tutti i dati sono riferiti a una tonnellata di mele A causa di regolamentazioni ambientali la

	Pesticidi (quintali)	Lavoro Mesi/Uomo	Guadagno Euro
Poor	5	0.5	200
Standard	1	0.5	300
Bio	0	0.8	500
BioExcellence	0	1	700

Melamangio non può utilizzare più di 3 quintali di pesticidi; un quintale di pesticidi costa 100 euro. Il magazzino aziendale ha una capacità limitata e può contenere al più 10 tonnellate di mele. Inoltre si hanno a disposizione 7 mesi/uomo di lavoro. Formulare il problema di PL per decidere la produzione della Melamangio in modo da riuscire a massimizzare il guadagno.

3.23 seconda prova 2005

Il mister della nazionale di calcio, Luppi, deve selezionare tre portieri da convocare per una amichevole tra una rosa di 8 giocatori. Ogni portiere è caratterizzato da tre caratteristiche Parate, Rigori e Forma. Si vuole che, nei giocatori convocati, la somma dei valori di Parata sia maggiore della somma dei valori di Rigori; mentre la somma della Forma dei giocatori convocati sia non inferiore all'80% della somma dei Rigori e non superiore al 120% della somma delle Parate. Formulare il problema di PL (si supponga che una soluzione frazionaria sia accettabile) per decidere quali portieri convocare in maniera tale che la somma delle Parate sia massimizzata.

Giocatore	Parate	Rigori	Forma
Albertozzi	9	7	6
Buffone	5	9	5
Pagliuva	6	6	9
Peruzza	7	8	7
Renga	10	4	8
Tancreti	6	8	7
Tordo	8	6	8
Ziff	9	5	10

3.24 seconda prova 2005

La Micheloni, azienda leader nella produzione di pneumatici, deve pianificare la produzione nel prossimo mese dello stabilimento Gommotto. La dirigenza ha stimato che devono essere consegnati ai clienti 2000 pneumatici da asciutto, 100 pneumatici da neve e 50 pneumatici da corsa. In un mese, l'impianto può produrre al massimo 2500 pneumatici da asciutto, ma la produzione di pneumatici da neve richiede il doppio del tempo di quelli da asciutto, mentre quelli da corsa richiedono 3 volte il tempo di uno da asciutto. Inoltre, il numero di pneumatici da asciutto prodotti non può essere più del doppio del numero di pneumatici prodotti degli altri due tipi messi insieme. Il magazzino può contenere al massimo 800 pneumatici e la dirigenza vuole avere in magazzino a fine mese almeno 100 tra pneumatici da corsa e da neve. Attualmente in magazzino sono presenti 150 pneumatici da neve e 300 da asciutto. Formulare il problema di PL per massimizzare a fine mese le scorte in magazzino di pneumatici da asciutto.

3.25 29-05-03

Una fonderia produce tre leghe metalliche L_1, L_2 e L_3. Per la produzione delle leghe L_1 e L_2 sono utilizzate a due materie prime principali P_1 e P_2. In Tabella 3.5, sono riportate le quantità (in quintali) di materie che devono essere impiegate per produrre un quintale di L_1 e di L_2. Per la produzione di un quintale di L_3 devono essere impiegati P_1 e L_2 nelle quantità riportate in Tabella 3.3. Per il prossimo periodo devono essere immessi

	P_1	P_2
L_1	0.6	0.4
L_2	0.3	0.7

Table 3.2:

	P_1	L_2
L_3	0.4	0.6

Table 3.3:

sul mercato almeno 600, 800 e 1300 quintali di L_1, L_2 e L_3 rispettivamente. In Tabella 3.4, sono riportati i prezzi (euro/quintale) di vendita delle tre leghe. Sapendo che sono

L_1	L_2	L_3
70	60	85

Table 3.4:

disponibili in totale 1500 quintali di P_1 e 3000 quintali di P_2, formulare come problema di Programmazione Lineare il problema di massimizzare il profitto nel prossimo periodo produttivo.

3.26 11-07-03

Una società di autonoleggio, all'inizio di ciascun mese, vuole avere un certo numero di autovetture in ciascuna delle città in cui opera. Per le sette città A, B,..., G, il numero desiderato di macchine rispettivamente di 30, 40, 55, 60, 80, 40, 55. Alla fine del mese corrente, si trovano invece, in queste città, rispettivamente 65, 90, 95, 15, 60, 10, 25 macchine. Spostare una macchina da una città all'altra ha un costo che possiamo assumere proporzionale alla distanza tra queste due città. La tabella indica le distanze (centinaia di km) tra ogni coppia di queste città. Formulare come PL il problema consistente nel portarsi nella situazione desiderata minimizzando i costi. Che proprietà ha la matrice dei coefficienti?

da... a...	D	E	F	G
A	5	6	10	9
B	9	11	9	15
C	12	10	14	15

3.27 seconda prova 2006-2007

L'azienda agricola “Baciata dal sole” vende succo di arancia e arance in busta. Le arance sono classificate da qualità 1 (scadenti) a qualità 10 (eccellenti). L'azienda ha 100000 Kg di arance di qualità 9 e 120000 Kg di qualità 6. Le arance in busta devono avere qualità media almeno pari a 7, quelle per il succo almeno 8. Un kg di arance per il succo dà un profitto netto di 0.45 euro, un kg di arance vendute in busta 0.35 euro. Formulare come PL il problema di come allocare i due tipi di arance tra succo e buste al fine di massimizzare i profitti.

3.28 seconda prova 2006-2007

Un pronto soccorso è aperto tutti i giorni, dal lunedì alla domenica, e richiede al minimo un numero di persone in servizio come da tabella:

Giorno	personale
Lun	16
Mar	14
Mer	15
Gio	19
Ven	19
Sab	16
Dom	11

Il sindacato impone che ogni lavoratore deve seguire un turno costituito da 5 giorni consecutivi seguito da due giornate di riposo. (Dunque, possono esservi in tutto 7 turni diversi.)

Formulare come PL (trascurando i vincoli di interezza) il problema di stabilire il numero minimo di persone da assumere per soddisfare tutte le richieste minime giornaliere.

3.29 seconda prova 2006-2007

La ditta Barby produce un profumo che può essere prodotto con due processi diversi. Col processo 1, un'ora di lavoro e 2 unità di essenza di bergamotto consentono di produrre 3 bottiglie di profumo. Col processo 2, 2 ore di lavoro e 3 unità di essenza di bergamotto consentono di avere 5 bottiglie di profumo. Alla Barby un'ora di lavoro costa 30 euro e un'unità di essenza di bergamotto 20 euro. Ogni anno sono disponibili 20000 ore di lavoro e 35000 unità di essenza. Ogni bottiglia viene venduta a 50 euro.

La Barby sa di poter vendere nel prossimo periodo fino a 1000 bottiglie di profumo. Tuttavia, può aumentare le sue vendite investendo in pubblicità. In particolare, può assumere la modella Blondie che pretende un pagamento di 100 euro ogni 10 minuti di lavoro. L'aumento previsto di vendite, per ogni 10 minuti di lavoro della modella, è di 200 bottiglie.

Formulare come PL il problema di determinare la strategia di produzione/pubblicità che rende massimo il profitto.

3.30 seconda prova 2006-2007

Una compagnia di assicurazioni decide di prendere in affitto alcuni personal computer per soddisfare la sua necessità. Le proprie necessità (numero di pc) per i prossimi sei mesi sono indicate nella tabella:

mese	pc
Gen	9
Feb	5
Mar	7
Apr	9
Mag	10
Giu	5

I computer possono essere presi per 1 mese pagando 200 euro, per 2 mesi pagando 350 euro e per 3 mesi pagando 450 euro. Considerando che alla fine di giugno non serve avere più alcun computer, si vuole determinare il piano di affitto a costo minimo. Formulare il problema come PL (trascurando i vincoli di interezza).

3.31 seconda prova 2006-2007

Una compagnia produce 3 tipi di prodotto (A, B, C) e può venderli in quantità illimitata ai seguenti prezzi unitari: A 10 euro, B 56 euro, C 100 euro. Produrre un'unità di A richiede un'ora di lavoro, produrre un'unità di B richiede 2 ore di lavoro e un'unità di A, produrre un'unità di C richiede 3 ore di lavoro e un'unità di B. Sono disponibili 40 ore di lavoro. Formulare come PL il problema di determinare il piano di produzione che massimizza il profitto.

3.32 seconda prova 2006-2007

Una compagnia petrolifera produce 3 tipi di prodotti raffinati (A, B, C) che possono essere venduti, per un massimo di 300 Kg l'uno, ai seguenti prezzi: A 10 euro/kg, B 12 euro/kg, C 20 euro/kg. Ogni Kg di prodotto finito di tipo A o B, richiede 5 euro di materiale grezzo. Spendendo 7 euro, 1 Kg di A può essere trasformato in 0.6 Kg di B e 0.4 Kg di C. Spendendo 5 euro, 1 Kg di B può essere trasformato in 0.8 Kg di C. Formulare come PL il problema di determinare la produzione in modo da massimizzare il profitto.

3.33 seconda prova 2006-2007

La Candy-Candy cosmetica produce un profumo con due processi. Con il processo 1, un'ora di lavoro e 2 unità di essenza di mandarino consentono di produrre 300 ml di profumo. Col processo 2, 2 ore di lavoro e 3 unità di essenza di mandarino consentono di avere 500 ml di profumo. Alla Candy-Candy un'ora di lavoro costa 20 euro e un'unità di essenza di mandarino 15 euro. Ogni anno sono disponibili 20000 ore di lavoro e 35000 unità di essenza. La Candy-Candy si aspetta di vendere 1000 bottigliette di profumo da 100ml. Ogni bottiglietta viene venduta a 5 euro. Formulare come PL il problema di determinare la strategia di produzione che renda massimo il profitto dell'azienda.

3.34 seconda prova 2006-2007

Una ditta produce moto e deve pianificare la produzione per l'anno successivo. Ogni trimestre ha una diversa richiesta. Per ogni moto invenduta alla fine di ogni trimestre, si

Trimestre	moto
T1	40
T2	70
T3	50
T4	20

ha un costo di immagazzinamento pari a 100 euro/moto. Un incremento di produzione da un trimestre al successivo rappresenta un costo (training per nuovi operai) quantificabile in 200 euro per ogni moto in più prodotta rispetto al trimestre precedente. Analogamente, una diminuzione di produzione da un trimestre al successivo è anch'essa valutata come un costo (dovuto ai licenziamenti) pari a 150 euro per ogni moto in meno. Formulare come PL il problema di pianificare la produzione in ciascun trimestre in modo da minimizzare i costi complessivi, e volendo soddisfare tutta la domanda nei vari trimestri.

3.35 16-04-03

La *Photo&C.* sta studiando i tempi di reazione di un nuovo acido per lo sviluppo di fotografie professionali. Sperimentalmente sono stati calcolati i tempi di sviluppo di una fotografia in base alla quantità di acido impiegato. In Tabella 3.5, sono riportati i tempi di sviluppo t rilevati sperimentalmente per alcuni valori delle quantità q di acido. Sulla base

q (litri)	t (secondi)
0.1	30
0.2	10
0.3	3.5
0.4	2
0.5	1.3

Table 3.5:

dei dati sperimentali si vuole trovare una legge del tipo $t = aq^2 + bq + c$ che approssimi il più possibile l'andamento del tempo di reazione dell'acido, nel senso che minimizza il *massimo* scarto in valore assoluto tra il valore di t sulla parabola e il tempo di sviluppo rilevato sperimentalmente, per ciascun valore di q. Fornire un modello di programmazione lineare per tale problema.

3.36 20-04-06

State giocando a Rosiko e volete conquistare il Sud America. Il Sud America è composto da quattro territori (Argentina, Brasile, Perù e Venezuela). Il Perù ed il Brasile confinano e possono attaccare tutti gli altri territori, mentre l'Argentina ed il Venezuela non confinano tra di loro e non si possono attaccare. Gli attacchi si possono portare solo tra territori adiacenti.

La situazione è la seguente: voi possedete il Perù con 7 carrarmatini ed il Brasile con 14 carrarmatini. Nel Venezuela ci sono 3 carrarmatini nemici, mentre l'Argentina è difesa da 3 carramatini.

Un carrarmatino può attaccare un solo territorio, oppure rimanere in difesa senza partecipare agli attacchi. Da un territorio possono partire più attacchi.

Si formuli, come problema di PL (trascurando i vincoli di interezza) il problema di conquistare i territori del Perù e dell'Argentina. In particolare si vuole massimizzare il numero di carrarmatini che partecipano all'attacco del Venezuela. Inoltre si vuole che il numero di carrarmatini in attacco (anche provenenti da più territori) sia pari ad almeno il doppio dei carrarmatini che presidiano il territorio nemico e che in Brasile rimangano almeno tre carrarmatini mentre in Perù ne può rimanere solo uno.

3.37 24-07-03

Un'azienda produce tre tipi di leghe metalliche, A, B, C, utilizzando diverse materie prime, delle quali la più critica è l'acciaio. Di quest'ultima per il prossimo mese sono disponibili dal fornitore 5500 kg. Un chilogrammo di acciaio costa all'azienda 4 Euro. Nella tabella seguente sono riportati rispettivamente i requisiti di acciaio (kg per 1 kg di prodotto), i costi di produzione (in Euro per kg di prodotto) al netto delle materie prime, e i profitti (in Euro per kg di prodotto) di vendita per ognuno dei prodotti A, B e C. La produzione di un kg di lega C necessita inoltre di $0,2$ kg di lega A. Formulare il problema

	Acciaio	costo	profitto
A	-	12	25
B	0,7	6	20
C	0,4	8	30

di pianificare la produzione del prossimo mese in modo ottimo, sapendo che la quantità di lega B prodotta deve essere almeno il doppio della quantità della lega C.

3.38 31-03-03

Nel laboratorio di ricerca del Gran Sasso si stanno studiando alcune soluzioni per eliminare gli scarti tossici dal composto Z utilizzato per gli esperimenti nucleari. A seguito di uno studio condotto dai ricercatori, si ha che i termini di legge sui rifiuti tossici sono soddisfatti se è presente una percentuale di nichel compresa fra il 2,7% e il 4,4%, una percentuale di cadmio tra 1,8% e 2,5% e infine una percentuale di manganese tra 0,9% e 1,2%. Ogni unità di composto è ottenuta, inoltre, tramite miscelazione di due diversi componenti, A e B, il cui contenuto di nichel, cadmio e manganese in percentuale è riportato, per ogni unità, nella tabella seguente. In tabella sono riportati anche i costi per ogni unità di componente. Si vuole trovare la miscelazione di componenti A e B che produce il composto Z a minor costo.

	Componente A	Componente B
Nichel	2	5
Cadmio	1,5	3
Manganese	0,5	2
Costo per ton.	0,3	0,4

3.39 31-03-03

Un mobilificio produce due tipi di scaffali. Ogni scaffale richiede una certa quantità di legno, un certo numero di viti e bulloni, e un certo numero di ore di manodopera. Sono disponibili complessivamente 100 kg di legno, 500 viti e bulloni (che sono sempre usati a coppie), e 300 ore di manodopera. Tutti i tipi di scaffali possono anche essere incollati, e quindi realizzati senza viti e bulloni, tuttavia questa scelta produce un prodotto di minore qualità, venduto quindi a un prezzo inferiore. Data la seguente tabella in cui sono riportati i dati del problema, formulare come PL il problema di determinare il piano di produzione ottimo.

tipo	legno (kg)	viti/bulloni	manod. (ore)	euro/scaffale avvit.	euro/scaffale incoll.
A	2	4	1.5	250	150
B	1.5	7	3	200	120

3.40 25-03-03

Unazienda vuole lanciare un nuovo prodotto sul mercato. Per il lancio del prodotto sono necessarie una serie di attività preliminari di preparazione, ed un'attività di produzione che consiste nell'assemblaggio di due diversi componenti. In tabella sono riportate le attività che devono essere eseguite per lanciare il nuovo prodotto sul mercato (colonna 1), e per ogni attività, le attività che devono la devono precedere (colonna 2) e la durata (colonna 3), ossia che devono essere terminate prima che possa iniziare l'attività in questione.

Attività	Predecessori	Durata (giorni)
A (Acquisto Materie Prime)	-	6
B (Formazione Operai)	-	9
C (Trasporto materie prime)	A	2
D (Produzione componente 1)	C, B	7
E (Produzione componente 2)	C, B	7
F (Testing componente 2)	E	1
G (Produzione prodotto finito)	D, F	12

Rappresentare il progetto per mezzo di un opportuno grafo e determinare la durata del progetto risolvendo un problema di cammino sul grafo.

3.41 20-03-06

Siete al trentottesimo piano di un grattacielo di 40 piani e dovete raggiungere il piano numero 23. Andando a piedi impiagate 20 secondi per salire un piano di scale e 15 per scendere di un piano. In alternativa potete prendere gli ascensori. Esistono tre tipi di ascensori:

- L'ascensore superveloce, che impiega 30 secondi per raggiungere il ventesimo piano e altri 30 secondi per arrivare all'ultimo piano. Può essere utilizzato sia in salita che in discesa.
- Gli ascensori veloci, che possono essere utilizzati solo in salita ed impiegano 10 secondi a piano e fermano solo al piano terra, al decimo al ventesimo al trentesimo e così via fin al cinquantesimo.
- Gli ascensori normali impiegano 10 secondi a piano, fermano a tutti i piani e possono essere utilizzati per salire e scendere.

Inoltre si consideri che il tempo di attesa dell'ascensore è di 30 secondi. Formulare il problema di raggiungere il ventitresimo piano come un problema di cammino minimo su un grafo opportuno e determinare con un opportuno algoritmo la soluzione ottima. Suggerimento: si può evitare di rappresentare esplicitamente tutti i piani del palazzo.

3.42 seconda prova 2004

Siete proprietari di una sala banchetti. Ricevete una serie di richieste, da parte di gruppi di persone, di utilizzo della sala: Il problema è decidere quali richieste accettare tenendo

Richiesta n.	Ora inizio	Ora fine	Numero Coperti
1	8	12	50
2	9	11	60
3	11	14	20
4	12	16	30
5	13	17	70
6	17	20	50
7	17	19	90
8	18	20	20
9	19	22	50
10	13	23	90

conto che ovviamente la sala banchetti può ospitare un solo gruppo di persone alla volta, con l'obiettivo di massimizzare il numero di coperti. Formulare e risolvere il problema come problema di ottimizzazione su grafi.

3.43 seconda prova 2004

Siete un autista proprietario di un pullman. Ricevete una serie di richieste per i primi giorni di Aprile, da parte di scolaresche, di utilizzo del vostro pullman: Il problema è

Richiesta n.	Data inizio	Data fine	Numero studenti
1	2-4-2004	4-4-2004	40
2	3-4-2004	5-4-2004	25
3	4-4-2004	6-4-2004	30
4	4-4-2004	7-4-2004	20
5	5-4-2004	6-4-2004	50
6	5-4-2004	7-4-2004	50
7	6-4-2004	8-4-2004	35
8	6-4-2004	9-4-2004	40
9	6-4-2004	10-4-2004	45
10	7-4-2004	10-4-2004	45

decidere quali richieste accettare tenendo conto che ovviamente il pullman può trasportare un solo gruppo di persone alla volta, con l'obiettivo di massimizzare il numero di studenti trasportati. Formulare e risolvere il problema come problema di ottimizzazione su grafi.

3.44 2004 Formulazione Grafi (2mod)

Grunt, il cavernicolo, possiede una clava e un certo numero di conchiglie. Grunt può barattare i suoi oggetti come indicato in seguito:
Clava + 3 conchiglie = Cane
Clava + 10 conchiglie = Bue
Cane + 6 conchiglie = Bue
Clava + 17 = Canoa
Cane + 13 = Canoa
Bue + 6 = Canoa
Clava + 50 conchiglie = Palafitta
Cane + 45 conchiglie = Palafitta
Bue + 35 conchiglie = Palafitta
Canoa + 15 conchiglie = Palafitta Quante conchiglie deve pagare (e quali scambi deve effettuare) Grunt per comprare una palafitta? Formulare e risolvere il problema come un problema di ottimizzazione su grafi.

3.45 seconda prova 2004

Volete volare da Milano a LosAngeles. Avete a vostra disposizione una serie di collegamenti aerei rappresentati in tabella. Il problema è decidere quali voli prendere per

Partenza	Arrivo	Orario Partenza	Orario Arrivo	Costo
Milano	Francoforte	08:00	10:00	180
Milano	NewYork	10:00	16:00	450
Milano	Atlanta	11:30	18:30	400
Francoforte	NewYork	11:30	16:00	350
Francoforte	LosAngeles	12:00	21:00	700
NewYork	LosAngeles	17:00	22:00	300
NewYork	Atlanta	18:00	20:30	150
Atlanta	LosAngeles	19:30	21:30	200
Atlanta	LosAngeles	21:00	23:30	200

arrivare a Los Angeles in giornata, cercando di minimizzare il costo. Formulare e risolvere il problema come problema di ottimizzazione su grafi.

3.46 seconda prova 2004

Volete volare da Milano a Tokio. Avete a vostra disposizione una serie di collegamenti aerei rappresentati in tabella. Il problema è decidere quali voli prendere per arrivare a Tokio in giornata, cercando di minimizzare il costo. Formulare e risolvere il problema come problema di ottimizzazione su grafi.

Partenza	Arrivo	Orario Partenza	Orario Arrivo	Costo
Milano	Mosca	06:00	11:00	500
Milano	Londra	08:30	10:30	150
Milano	Francoforte	09:30	11:00	100
Londra	Osaka	11:00	21:00	700
Francoforte	Londra	11:30	13:00	150
Francoforte	Tokio	12:30	22:30	850
Londra	Tokio	13:30	23:30	750
Mosca	Tokio	15:00	23:00	650
Osaka	Tokio	22:30	23:30	100

3.47 25-03-03

Un'azienda ha comperato alla fine del 2002 un nuovo veicolo per la consegna delle merci. Alla fine di ogni anno l'azienda può decidere di dare indietro il veicolo e di acquistarne uno nuovo oppure tenersi il vecchio. Il costo di manutenzione del veicolo aumenta al passare del tempo. L'azienda vuole decidere come comportarsi per i prossimi 4 anni (fino alla fine del 2006) in modo da minimizzare i costi complessivi. Un veicolo nuovo costa 12000 Euro (supponiamo questo prezzo non vari nei prossimi quattro anni). Alla fine del 2006 si prevede di cessare l'attività. In tabella sono riportati, in euro, le spese di manutenzione che devono essere sostenute in uno, due, tre e quattro anni dall'acquisto del veicolo rispettivamente, e la cifra che si ottiene ridandolo indietro dopo uno, due, tre o quattro anni dall'acquisto.

	Spese di manutenzione	Valore veicolo
a un anno	2100	11000
a due anni	3000	10000
a tre anni	5000	8000
a quattro anni	8000	6000

Formulare e risolvere il problema come problema di cammino su grafi.

4

Programmazione Lineare

4.1 2004-2005

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{aligned}
\min z = -6x_1 - 8x_2 & & \\
x_1 - x_2 &\geq -3 \\
x_1 &\leq 4 \\
x_2 &\leq 5 \\
1/2x_1 + x_2 &\leq 6 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Scrivere il problema duale e individuarne la soluzione ottima, sapendo che per la soluzione ottima del problema primale vale $x_1^* = 4$ e $x_2^* = 4$.

4.2 30-09-04

Si consideri il problema di PL

$$
\begin{aligned}
\min 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 & & \\
2x_1 + x_2 + x_3 &\geq 3 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Si trovi la soluzione ottima del problema sapendo che la soluzione ottima del problema duale è $(u_1, u_2) = (10/3; 11/3)$.

4.3 1-9-04

Si consideri il problema di PL

$$\begin{aligned}
\min \quad & -x_1 - 2x_2 && (4.1)\\
& x_1 + x_2 - x_3 = -3\\
& 3x_1 + x_2 \geq 3\\
& x_1 + 5x_2 \leq 3\\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

(4.2)

Trovare la soluzione ottima del problema duale sapendo che il valore ottimo della soluzione primale è $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 6$.

4.4 7-4-05

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned}
\min z = -x_1 - x_2 & &\\
x_1 &\geq& 1\\
x_2 - x_1 &\geq& -10\\
2x_1 + x_2 &\leq& 6\\
x_1, x_2 &\geq& 0
\end{aligned}$$

Scrivere il problema duale e individuarne la soluzione ottima, sapendo che per la soluzione ottima del problema primale vale $x_1^* = 1$ e $x_2^* = 4$.

4.5 seconda prova 2004

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned}
\min z = -2x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 & &\\
x_1 - 2x_2 + x_4 &=& 1\\
2x_1 - 2x_2 + x_5 &=& 2\\
-2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 &=& 2\\
x &\geq& 0
\end{aligned}$$

Scrivere il problema duale e individuarne la soluzione ottima, sapendo che nella soluzione ottima del problema primale $x_1^* \neq 0$ e $x_3^* \neq 0$, mentre $x_2^* = 0$, $x_4^* = 0$ e $x_5^* = 0$.

Svolgimento

Il duale è

$$\begin{aligned}
\max z = u_1 + 2u_2 + 2u_3 & &\\
u_1 + 2u_2 - 2u_3 &\leq& -2\\
-u_1 - 2u_2 &\leq& 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 &\leq -1 \\ u_1 + 2u_3 &\leq -2 \\ -u_2 - u_3 &\leq -2 \end{aligned}$$

Dalle condizioni di complementarietà si ricava soltanto che il primo e il terzo vincolo del duale devono essere attivi, da cui si ha $u_1^* + 2u_2^* = -4$ e $u_3^* = -1$. Si noti che non possiamo scegliere u_1^* completamente a caso, in quanto occorre poi soddisfare anche gli altri vincoli del duale. Ricordando però che, se B è una base ottima, una soluzione ottima del problema duale è data da $u^* = c_B^T B^{-1}$, basta scrivere una base ottima. Questa, dalle informazioni in nostro possesso, comprenderà senz'altro le colonne A_1 e A_3, e basta dunque completarla con una qualunque delle altre colonne, purché linearmente indipendente dalle prime due. Ad esempio, si può aggiungere A_2, ottenendo così :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, essendo $c_B^T = [-2 \quad -1 \quad 5]$ (attenti all'ordine negli elementi di c_B^T), si ha che $u^* = [-1 \quad -\frac{3}{2} \quad -1]$. Si noti che scegliendo diversamente la base B (anche le altre due scelte possibili sarebbero state corrette), si sarebbero ottenute diverse soluzioni ottime per il problema duale.

4.6 seconda prova 2004

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} &\max z = x_1 + x_2 \\ &8x_1 + 5x_2 + x_3 = 32 \\ &8x_1 + 6x_2 + x_4 = 33 \\ &8x_1 + 7x_2 + x_5 = 35 \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Scrivere il problema duale e individuarne la soluzione ottima, sapendo che la soluzione ottima del problema primale vale $x_2^* \neq 0$, $x_3^* \neq 0$ e $x_4^* \neq 0$, mentre $x_1^* = 0$ e $x_5^* = 0$.

Svolgimento

Il duale è

$$\begin{aligned} &\min z = 32u_1 + 33u_2 + 35u_3 \\ &8u_1 + 8u_2 + 8u_3 \geq 1 \\ &5u_1 + 6u_2 + 7u_3 \geq 1 \\ &u_1 \geq 0 \\ &u_2 \geq 0 \\ &u_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

4.7 Appello 05/07/2005

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{aligned}
&\min -10x_1 - x_2\\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 = 10\\
&\quad x_1 + x_4 = 6\\
&1/2x_1 + x_2 + x_5 = 8\\
&\quad x \geq 0
\end{aligned}
$$

Scrivere il problema duale e facendo uso delle condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare che nella soluzione ottima $x_1^* = 6$ e $x_2^* = 4$.

Svolgimento

Il duale è

$$
\begin{aligned}
&\min z = 10u_1 + 6u_2 + 8u_3\\
&\quad u_1 + u_2 + \frac{1}{2}u_3 \geq -10\\
&\quad u_1 + u_3 \geq -1\\
&\quad u_1 \leq 0\\
&\quad u_2 \leq 0\\
&\quad u_3 \leq 0
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Se nella soluzione ottima $x_1^* = 6$ e $x_2^* = 4$, la soluzione ottima del primale è necessariamente $x^* = [6 \;\; 4 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]$. Di conseguenza devono essere attivi il primo, il secondo e il quinto vincolo del duale, ottenendo così $u^* = [-1 \quad -9 \;\; 0]$, che soddisfa anche tutti gli altri vincoli del duale e dunque è ottima.

4.8 25-03-03

Sia dato il seguente problema di PL:

$$
\begin{aligned}
&\min z = 3x_1 + 2x_2 + x_3\\
&\quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 2\\
&\quad x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1\\
&\quad x_j \geq 0 \quad j = 1,2,3
\end{aligned}
$$

Trovare la soluzione ottima del problema duale sapendo che nella soluzione ottima del problema dato, x_1 è l'unica variabile uguale a 0. Sapreste dire per quali variazioni del termine noto del primo vincolo la base associata alla soluzione ottima rimane ancora ottima?

4.9 25-03-03

Sia dato il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} \min z = x_1 - 2x_2 + 4x_3 & \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1,2,3 \end{aligned}$$

Trovare la soluzione ottima del problema duale sapendo che, nella soluzione ottima del problema dato, x_2 è l'unica variabile uguale a 0. Sapreste dire per quali variazioni del termine noto del secondo vincolo la base associata alla soluzione ottima rimane ancora ottima?

4.10 25-03-03

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min z = x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 & \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 2 \\ x_2 - 2x_3 &\geq 3 \\ x_3 + 3x_4 &\leq 8 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Trovare la soluzione ottima del problema sapendo che la soluzione ottima duale è $u^*(0, 2, 1/3)$.

4.11 25-03-03

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 & \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 &\geq 5 \\ 3x_1 - 7x_2 - 3x_3 &\leq 6 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Dimostrare che la soluzione ottima del problema è $x^*(0, 0, 5/2)$.

4.12 seconda prova 2005

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} \min 4x_1 + x_2 + 5x_3 & \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\geq 3 \\ 3x_1 + 2x_3 &\geq 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si calcoli la soluzione del problema duale sapendo che la soluzione ottima del problema è $x_1^* = 4/3$, $x_2^* = 4/3$ e $x_3^* = 0$.

4.13 seconda prova 2005

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} &\min x_1 + x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 &\geq 5 \\ 2x_2 + 2x_3 &\geq 4 \\ 2x_1 + x_3 &\geq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si calcoli la soluzione del problema duale sapendo che nella soluzione ottima del problema $x_1^* = 3$, $x_2^* = 2$.

4.14 seconda prova 2005

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} &\min 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\geq 4 \\ x_1 + x_3 &\geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si calcoli la soluzione del problema duale sapendo che la soluzione ottima del problema è $x_1^* = 3/4$, $x_2^* = 0$ e $x_3^* = 9/4$.

4.15 31-03-03

Si consideri il seguente problema di PL.

$$\begin{aligned} &\min z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_3 + x_4 &\leq 5 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Trovare la soluzione ottima del problema duale sapendo che la la soluzione ottima del primale è $x^* = (2/3\ , 0\ , 2\ , 3)$. Dire inoltre di quanto può variare il termine noto del terzo vincolo del problema primale perché la base associata alla soluzione ottima rimanga la stessa.

4.16 16-04-03

Sia dato il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$
\begin{array}{rcll}
\min z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & & & \\
x_1 + 2x_2 & \geq & 3 & \\
4x_1 + 6x_2 + 3x_3 & \leq & 10 & \\
x_j & \geq & 0 & j = 1, \ldots, 3
\end{array}
$$

- Trovare la soluzione ottima del problema sapendo che la soluzione ottima del problema duale è $(1, 0)$.
- Sapreste dire per quali variazioni del coefficiente di costo della variabile x_1 la base associata alla soluzione ottima rimane ancora ottima?

4.17

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{array}{rcl}
\min z = 5x_1 + 15x_2 + 3x_3 & & \\
2x_1 + x_2 + 4x_3 & \leq & 11 \\
x_1 + x_2 & \geq & 1 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 & \geq & 4 \\
x_j & \geq & 0
\end{array}
$$

Trovare la soluzione ottima del problema sapendo che quella del problema duale è $u^* = (1, 0, 7)$.

4.18 20-03-06

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{array}{rcl}
\max z = 9x_1 + 15x_2 & & \\
3x_1 + 6x_2 & \leq & 6 \\
6x_1 + 9x_2 & \leq & 12 \\
3x_1 + 3x_2 & \leq & 3
\end{array}
$$

Determinare la soluzione ottima sapendo che la soluzione ottima del problema duale è $u^* = (2, 0, 1)$.

4.19 20-03-06

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min z = 8x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 10 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

Utilizzando la teoria della dualità dimostrare o confutare che la soluzione ottima è $x^* = (0, 1, 2)$.

4.20 24-07-03

Trovare la soluzione ottima del seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} &\min 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \\ &\qquad x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ &\qquad 2x_1 + 3x_4 \geq 1 \\ &\qquad x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, 4 \end{aligned}$$

sapendo che $y^* = (1, \frac{1}{3})$ è soluzione ottima del problema duale.

4.21 24-07-03

Utilizzando la teoria della dualità, dire cosa si può concludere riguardo il segno della funzione obiettivo del seguente problema di PL in un qualsiasi punto ammissibile:

$$\begin{aligned} &\min x_1 - 10x_2 + 2x_3 \\ &\qquad x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ &\qquad x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 5 \\ &\qquad x_2 \leq -2 \\ &\qquad x_1, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

4.22 11-07-03

Sia dato il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} &\min z = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 \\ &\qquad x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 7 \\ &\qquad x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 4 \\ &\qquad x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, 5 \end{aligned}$$

- Indicare se le matrici formate dalle colonne (A_1, A_2), (A_3, A_4) e (A_3, A_5) sono basi ammissibili e ottime.
- Calcolare la soluzione ottima del problema duale.

4.23 20-04-04

Si consideri il problema di PL

$$\begin{aligned} \min z = -x_1 - 2x_2 & \\ x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 10 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

e si consideri la base $B = (A_1, A_3)$. Verificare che la B è ammissibile ma non ottima. Applicando un opportuno algoritmo, trovare una soluzione ammissibile di base in cui la funzione obiettivo assume un valore inferiore rispetto alla soluzione associata alla base B.

4.24 20-03-06

Dato un poliedro in forma standard, caratterizzato dalle seguenti matrici A e b:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

enumerare tutti i vertici del poliedro.

4.25

Dato il problema di PL:

$$\begin{aligned} \min -4x_1 + 9x_2 + 3x_3 & \\ 8x_1 - 10x_2 + 7x_3 &\geq 0 \\ -8x_1 + 7x_2 + 6x_3 &\geq -2 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

e sapendo che la soluzione ottima di tale problema è $x = (\frac{1}{4}, 0, 0)$ determinare la soluzione ottima del duale.

4.26 7-4-05

Sia dato un poliedro in forma standard, caratterizzato dalle seguenti matrici A, b:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si elenchino tutti i vertici del poliedro.

4.27 25-03-03

Si considerino le seguenti tre matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per ognuna di esse sapete dire se è o meno totalmente unimodulare, e perché?

4.28 25-03-03

Dato il poliedro:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_j \geq 0 \end{aligned}$$

supponiamo che, per una certa funzione obiettivo, la base ottima risulti essere quella costituita dalle variabili x_1 e x_2.

- Qual è la soluzione ottima?
- Entro quale range di valori può variare il secondo termine noto (attualmente pari a -1) perché questa base rimanga ammissibile (e dunque ottima)?

4.29 25-03-03

Dato il poliedro:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 15 \\ x_j \geq 0 \end{aligned}$$

si considerino i seguenti punti $A = (23/2, 1, 0, 9/2)$, $B = (10, 0, 0, 5)$, e $C = (0, 0, 5, 0)$. Per ciascuno di essi, dire se si tratta di un vertice o meno (e perché).

4.30 25-03-03

Per risolvere un problema di PL, avete applicato la fase I del metodo del simplesso. Al termine della fase I, il tableau del problema artificiale si presenta così:

0	2	0	1	1	2	0
3	4	1	2	1	1	0
0	-3	2	0	0	2	1

(le ultime due colonne si riferiscono alle variabili artificiali). Sapreste ricavare una base ammissibile per il problema di partenza e la soluzione di base corrispondente?

4.31 25-03-03

Sia dato il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} \min z = 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 & \\ x_1 + 2x_2 + x_4 + 4x_5 &= 6 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 4 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, \ldots, 5 \end{aligned}$$

- Indicare se le matrici formate dalle colonne (A_1, A_2), (A_2, A_3) e (A_2, A_5) sono basi ammissibili e/o ottime.

- Calcolare la soluzione ottima del problema duale.

4.32 25-03-03

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min z = 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 & \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_3 - x_4 &= 2 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Dire se il set di colonne (A_1, A_2, A_3) rappresenta una base ammissibile, ed eventualmente indicare la soluzione corrispondente e dire se si tratta di una soluzione ottima.

4.33 seconda prova 2005

Sia dato un problema di PL in forma standard, caratterizzato dalle seguenti matrici A e b.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -5 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & -2 & -7 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Si considerino i punti $A = [2,0,0,0,0,1,0,0,0,0]^T$, $B = [1,0,1,1,0,0,0,0,0,0]^T$, $C = [0,0,0,1,0,0,0,2,0,-1]^T$, $D = [0,0,1,2,0,0,0,0,-1,0]^T$, $E = [3,0,1,0,0,0,0,0,0,0]^T$, $F = [1,1,4,0,0,0,0,0,0,0]^T$, $G = [0,2,0,0,1,1,0,0,0,0]^T$, $H = [0,0,1,3,0,0,0,0,0,0]^T$, $I = [1,0,1,0,0,0,-1,0,0,0]^T$. Per ciascuno dei punti, dire se si tratta di un vertice o meno. Motivare la risposta.

4.34 seconda prova 2005

Sia dato un problema di PL in forma standard, caratterizzato dalle seguenti matrici A e b.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si considerino i punti $A = [2,0,0,0,0,1,0,0,0,0]^T$, $B = [1,1,1,0,0,0,0,0,0,0]^T$, $C = [0,0,-1,0,0,0,0,1,1,0]^T$, $D = [0,1,0,1,0,0,0,0,-2,0]^T$, $E = [3,0,1,0,0,0,0,0,0,0]^T$, $F = [3,0,2,1,0,0,0,0,0,0]^T$, $G = [0,3,0,0,0,1,0,0,0,0]^T$, $H = [2,0,0,1,0,1,0,0,0,0]^T$ e $I = [1,1,0,0,0,0,-1,0,0,0]^T$. Per ciascuno dei punti, dire se si tratta di un vertice o meno. Motivare la risposta.

4.35 seconda prova 2005

Date le matrici A, B e C si dica per ogni matrice se rispetta o meno le condizioni di totale unimodularità. Si motivi la risposta.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.36 seconda prova 2005

Date le matrici A, B e C si dica per ogni matrice se rispetta o meno le condizioni di totale unimodularità. Si motivi la risposta.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.37 seconda prova 2005

Date le matrici A, B e C si dica per ogni matrice se rispetta o meno le condizioni di totale unimodularità. Si motivi la risposta.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.38 seconda prova 2006-2007

Si considerino le matrici A, B e C. Cosa si può dire circa la loro totale unimodularità?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.39 31-03-03

All'ottimo del problema artificiale (fase I del metodo del simplesso), il tableau si presenta così:

0	2	0	1	1	2	0
3	4	1	2	1	1	0
0	3	0	2	-1	2	1

(le ultime due colonne si riferiscono alle variabili artificiali). Come ottenere una base ammissibile e la corrispondente soluzione di base per il problema originario?

4.40 seconda prova 2006-2007

Dato il problema di PL:

$$\begin{aligned} \min -4x_1 + 9x_2 + 3x_3 & \\ 8x_1 - 10x_2 + 7x_3 &\geq 0 \\ -8x_1 + 7x_2 + 6x_3 &\geq -2 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

e sapendo che la soluzione ottima di tale problema è $x = (\frac{1}{4}, 0, 0)$ determinare la soluzione ottima del duale.

4.41 seconda prova 2006-2007

Si consideri il seguente poliedro:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 8x_5 &= 1 \\ -4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 - 6x_5 &= 1 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

indicare per ciascuna delle matrici (A_1, A_3), (A_2, A_5) e (A_1, A_5) se si tratti di una base, ed eventualmente se è ammissibile o meno.

5

Teoria dei grafi

5.1 Flusso (esame) 2004

Si consideri la seguente rete di flusso Si risolva il problema di individuare il massimo

Arco	(0,1)	(0,2)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(3,4)	(4,5)
Capacitá	11	5	7	2	5	2	1	4	6	8
Flusso	11	0	7	2	3	2	1	4	4	6

flusso (evidenziando il taglio a capacità minima) che può transitare dal nodo 0 al nodo 5 utilizzando l'algoritmo di Ford-Fulkerson, a partire dal flusso iniziale specificato in tabella.

5.2 7-4-05

Si consideri il seguente grafo Si risolva il problema di individuare il cammino di costo

Arco	(0,1)	(0,2)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(3,4)	(4,5)
Costo	5	10	3	10	2	5	20	200	7	15

minimo per andare dal nodo 0 a tutti gli altri nodi utilizzando l'algoritmo di Dijkstra (evidenziando l'albero dei cammini minimi).

5.3 seconda prova 2004

Si consideri la seguente rete di flusso Si risolva il problema di individuare il massimo

Arco	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,5)	(4,6)	(5,4)	(5,6)
Capacità	5	6	3	5	8	10	4	3
Flusso	5	4	3	2	7	6	4	3

flusso che può transitare dal nodo 1 al nodo 6 utilizzando l'algoritmo di Ford-Fulkerson, a partire dal flusso iniziale specificato in tabella.

5.4 seconda prova 2004

Si consideri la seguente rete di flusso Si risolva il problema di individuare il massimo

Arco	(1,2)	(1,3)	(1,5)	(2,3)	(2,4)	(3,5)	(4,3)	(4,5)
Capacità	20	5	5	7	6	10	3	5
Flusso	13	0	5	7	6	10	3	3

flusso che può transitare dal nodo 1 al nodo 5 utilizzando l'algoritmo di Ford-Fulkerson, a partire dal flusso iniziale specificato in tabella.