Formulazione di problemi di ottimizzazione su grafi

A. Agnetis*

1

Un'azienda dispone, alla fine del 2014, di un nuovo veicolo per la consegna delle merci. Alla fine di ogni anno successivo, l'azienda può decidere di dare indietro il veicolo e di acquistarne uno nuovo oppure tenersi il vecchio. Il costo di manutenzione del veicolo aumenta al passare del tempo. L'azienda vuole decidere come comportarsi per i prossimi 4 anni (fino alla fine del 2018) in modo da minimizzare i costi complessivi. Un veicolo nuovo costa 12000 euro (supponiamo questo prezzo non vari nei prossimi quattro anni). In ogni caso, si sa che all'inizio del 2019 verrà comprato un veicolo nuovo.

In tabella sono riportati, in euro, le spese di manutenzione complessive che devono essere sostenute per un veicolo se questo viene tenuto per uno, due, tre o quattro anni, ed il prezzo a cui si può rivendere il veicolo se si decide di venderlo dopo uno, due, tre o quattro anni dall'acquisto.

	Spese di manutenzione	Valore veicolo
a un anno	2000	11000
a due anni	3000	10000
a tre anni	5000	8000
a quattro anni	8000	6000

Formulare e risolvere, in termini di cammino su grafi, il problema di decidere la politica di manutenzione/acquisto che minimizza i costi complessivi.

2

Un'azienda vuole produrre un nuovo tipo di registratore di cassa. Per avere disponibile il prototipo del prodotto sono necessarie una serie di attività preliminari di preparazione, ed un'attività di produzione che consiste nell'assemblaggio di due diversi componenti. In tabella sono riportate le attività che devono essere eseguite. Per ogni attività sono

*Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche - Università di Siena

indicati i predecessori (ossia le attività che devono essere terminate prima che possa iniziare l'attività in questione) e la durata in giorni.

Attività	Predecessori	Durata (giorni)
A (Acquisto Materie Prime)	-	6
B (Formazione Operai)	-	9
C (Trasporto materie prime)	A	2
D (Produzione componente 1)	C, B	6
E (Produzione componente 2)	C, B	7
F (Testing componente 2)	E	1
G (Produzione prodotto finito)	D, F	2

Rappresentare il progetto per mezzo di un opportuno grafo e determinare la durata del progetto risolvendo un problema di cammino sul grafo.

3

Un'azienda che costruisce turbine vuole pianificare la propria produzione per i primi 3 mesi dell'anno. All'inizio di gennaio una turbina è disponibile in magazzino. Il numero di turbine che devono essere consegnate ai vari clienti alla fine di gennaio, febbraio e marzo è pari rispettivamente 2, 1 e 0. Inoltre l'azienda vuole che all'inizio di aprile sia disponibile una turbina di scorta in magazzino. Ciò richiede quindi la produzione di un totale di 3 turbine nei prossimi mesi. L'ordine alla fine di un dato mese può essere soddisfatto dalla produzione del mese corrente e/o prelevando dal magazzino. Non più di due turbine possono essere prodotte ogni mese. Il costo per produrre 0, 1 o 2 turbine in un dato mese è rispettivamente 10 (dovuto al costo di mantenimento dell'impianto), 18 e 20 migliaia di Euro. Il costo legato al fatto di avere a fine mese in magazzino 0, 1 o 2 turbine (invendute) è rispettivamente pari a 0, 4 e 7 migliaia di Euro. Il problema consiste nel decidere quante turbine produrre ogni mese in modo da soddisfare le richieste e minimizzare il costo complessivo di produzione. Formulare il problema in termini di ottimizzazione su grafi.

4

Avete deciso di organizzare una cena a casa vostra. Poiché però siete troppo impegnati a studiare per l'esame di Metodi di Ottimizzazione, avete pensato bene di far cucinare i vostri amici, che d'altra parte sono ben lieti di aiutarvi. Dopo aver lungamente meditato sulle capacità culinarie dei vostri amici, siete giunti a stilare la seguente tabella, dove la cifra indica il vostro giudizio sulla corrispondente pietanza preparata dal vostro amico/a.

amico/a	Antipasti	Primi	Secondi	Contorni	Dolci
Andrea	7	6	5	7	8
Barbara	6	8	7	6	5
Ciccio	6	5	4	4	8
Doriana	7	8	6	6	6
Everardo	5	6	7	5	0
Florinda	7	8	8	8	6
Gimmi	7	7	5	5	6

Il problema è quello di decidere *se* e cosa far preparare a ognuno, considerando che la vostra cena consisterà di una pietanza di ciascun tipo (ossia un antipasto, un primo, un secondo etc.) e che per discrezione non intendete chiedere a nessuno di preparare più di una pietanza. Formulare il problema in termini di ottimizzazione su grafi e risolverlo facendo uso di un opportuno algoritmo.

5

Un centro di supercalcolo dispone di un insieme di processori (1,2,...,10). Voi dovete eseguire un insieme di job (A,...,I). Tutti i job richiedono lo stesso tempo (un'ora) e due processori contemporaneamente, i quali durante tale tempo non possono dedicarsi ad altri job. Formulare e risolvere (con un opportuno algoritmo) il problema di selezionare il massimo sottoinsieme di job, avendo solo un'ora a disposizione.

job	processori
A	1,6
B	1,7
C	1,10
D	2,6
E	3,6
F	4,10
G	5,8
H	5,9
I	1,9

6

Un insieme di centri di lavorazione deve eseguire operazioni di vario tipo su un insieme di pezzi meccanici. Ciascun tipo di operazione (1, 2, 3, 4) può essere svolto su un sottoinsieme di centri (A, B, C). Il fabbisogno di ciascun tipo di operazione è espresso in minuti.

operazioni	centri	tempo
1	A,B	50
2	A,C	20
3	A,B,C	10
4	B	70

Considerando che nel prossimo turno i centri A, B e C saranno disponibili per 30, 80 e 40 minuti rispettivamente, il problema consiste nel determinare se è possibile o meno portare a termine tutte le lavorazioni nel prossimo turno. Formulare il problema in termini di ottimizzazione su grafi e risolverlo con un opportuno algoritmo

7

Siete i proprietari di una sala banchetti, e avete ricevuto una serie di richieste nell'arco di una giornata. Di ogni richiesta è indicata l'ora di inizio, l'ora di fine e il numero di coperti. Il problema è selezionare un sottoinsieme di richieste tale che la sala non sia mai usata da due gruppi contemporaneamente e che sia massimizzato il numero di coperti serviti in una giornata. Formulare il problema in termini di ottimizzazione su grafi.

richiesta	ora inizio	ora fine	numero coperti
1	8	10	60
2	9	11	50
3	10	12	20
4	10	13	50
5	11	12	40
6	11	13	60
7	12	14	50
8	12	15	70
9	13	16	20

8

È lunedi mattina. In un mobilificio, la stazione di verniciatura deve essere utilizzata per processare quattro lotti di ante da cucina, tutti di colore diverso. Siccome passare da una vernice a un'altra richiede molto tempo per la pulizia degli apparecchi, ciascun lotto deve essere lavorato in un giorno diverso. Un lotto i è caratterizzato da un peso w_i e da una *due date* d_i. Se il lotto viene verniciato entro e non oltre d_i, sarà consegnato in tempo. Altrimenti, per ogni giorno di ritardo rispetto a d_i si pagano w_i euro di penale.

i	w_i	d_i
1	80	mercoledi
2	160	martedi
3	200	martedi
4	120	martedi

Formulare il problema in termini di ottimizzazione su grafi e risolverlo con un opportuno algoritmo.

9

L'allenatore della nazionale di nuoto deve decidere la composizione della staffetta per i 200 metri misti per le prossime olimpiadi. Ha a disposizione 6 atleti, ciascuno dei quali ha un proprio record personale (sui 50 metri) in ciascuno dei quattro stili (espresso in secondi).

nuotatore	dorso	rana	farfalla	stile libero
1	19	22	16	13
2	17	25	17	14
3	20	21	15	12
4	20	22	18	13
5	18	20	18	14
6	18	21	19	15

Il problema è ovviamente quello di scegliere la formazione più competitiva possibile, supponendo che ogni atleta sia in grado di ripetere il proprio record personale. Formulare il problema in termini di ottimizzazione su grafi e risolverlo con un opportuno algoritmo.

10

L'autorità per le telecomunicazioni decide di mettere in vendita le frequenze di una nuova banda per il segnale video. La banda va da 903 MHz a 951 MHz, con un intervallo di 6 MHz tra l'una e l'altra. Per partecipare al bando occorre specificare un *intervallo* di frequenze (estremi inclusi), e formulare un'offerta per tale intervallo. Alla scadenza del bando, risultano pervenute le seguenti offerte:

operatore	da	a	offerta (milioni di euro)
A	903	909	13
B	903	915	15
C	909	915	12
D	915	921	10
E	915	933	32
F	921	927	8
G	921	939	40
H	927	939	25
I	927	945	31
J	933	945	22
K	939	951	29
L	945	951	15

Ciascuna frequenza può essere assegnata ad al più un operatore. Formulare in termini di ottimizzazione su grafi il problema di determinare quali offerte accettare per massimizzare gli introiti statali.

11

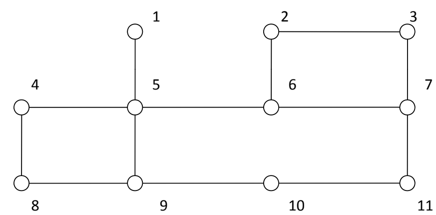
Alcune telecamere devono essere dislocate per sorvegliare i corridoi di un museo. Le figure che seguono mostrano due piani del museo, in cui gli archi corrispondono ai corridoi e i nodi ai punti di incontro di diversi corridoi. Una telecamera, posta in un nodo, è in grado di sorvegliare tutti e soli i corridoi corrispondenti agli archi incidenti il nodo. Il problema, in ciascun piano, consiste nel determinare il numero minimo di telecamere (e la loro ubicazione) in grado di sorvegliare tutti i corridoi.

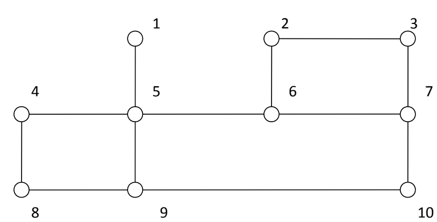
1) Formulare il problema in termini di programmazione lineare a numeri interi

2) Cosa si può dire sulla possibilità di risolvere il problema facendo uso della sola programmazione lineare, nei due casi?

12

Un alchimista è riuscito a individuare alcuni procedimenti magici che consentono di trasformare un metallo in un altro. Purtroppo però ciascun procedimento riesce solo con una certa probabilità:


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

trasformazione da...	a...	probabilità di riuscita
ferro	zinco	0.5
ferro	rame	0.25
rame	zinco	0.25
zinco	stagno	0.125
stagno	rame	0.5
rame	argento	0.5
stagno	argento	0.03125
stagno	oro	0.0625
argento	oro	0.125

Sapreste indicare all'alchimista quale successione di magie potrebbe fargli trasformare ferro in oro, massimizzando la probabilità di riuscita? Formulare il problema in termini di ottimizzazione su grafi e risolverlo con un opportuno algoritmo.

13

Un gruppo di 100 turisti deve essere trasferito da Roma a Sydney. Purtroppo, data l'alta stagione e la ravvicinata data di partenza, non possono essere trasferiti con un unico volo diretto. Dopo una accurata ricerca, avete raccolto alcune informazioni su alcuni voli disponibili per la data di partenza ed i relativi posti liberi. Supponendo che il vostro obiettivo sia quello di riuscire a far partire alla data di partenza tutti i turisti e di farli arrivare a Sydney, formulare il problema in termini di un opportuno problema di ottimizzazione su grafi, e applicare un opportuno algoritmo per capire se esiste questa possibilità.

tratta	posti disp.
Roma-Cairo	60
Roma-Katmandu	50
Cairo-Katmandu	40
Cairo-Tokyo	50
Katmandu-Delhi	20
Katmandu-Seul	30
Delhi-Tokyo	15
Tokyo-Seul	20
Seul-Delhi	15
Seul-Sydney	60
Tokyo-Sydney	40

14

Un venditore di componenti stereo usati dispone di 6 diffusori (A, B, C, D, E, F). Per ciascun diffusore, è stata misurata la risposta su un insieme di otto frequenze di riferimento (1,...,8). La tabella indica in quali di queste frequenze la risposta di ciascun diffusore è accettabile. Il produttore intende mettere in vendita questi diffusori a coppie, ma una coppia ha un funzionamento accettabile, e può quindi essere messa in vendita, solo se lo spettro dei due diffusori ha almeno 5 frequenze in comune di quelle in cui il funzionamento è accettabile.

diffusore	1	2	3	4	5	6	7	8
A		X	X	X	X	X		
B			X	X	X	X	X	X
C	X	X	X	X	X			
D	X	X	X	X	X	X	X	
E			X	X	X	X	X	
F	X	X	X	X	X	X		

1) Formulare il problema di massimizzare il numero di coppie da mettere in vendita in termini di problema di ottimizzazione su grafi

2) Cosa si può dire sulla possibilità di risolvere questo problema facendo uso della sola programmazione lineare?

15

Un'area geografica sulla quale deve essere costruito un nuovo centro commerciale è molto sconnessa, in quanto sono presenti molti avvallamenti e collinette. Dividendo l'area in dieci zone, è possibile indicare per ciascuna zona la *quota* attuale rispetto a quello che dovrà essere il livello stradale. Tali quote sono misurate in numero di camion (truckload) di terra in più o in meno rispetto al livello stradale.

zona	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
livello	-2	5	0	-1	4	-8	3	-2	-1	2

Il costo per spostare un camion di terra a pieno carico dalla zona i alla zona j è proporzionale alla distanza tra le due zone, indicata nella seguente matrice. (Si noti che tali distanze soddisfano la disuguaglianza triangolare, ossia $c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj}$ per qualsiasi i, j, k.)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1.4 & 3.2 & 5.1 & 3 & 1.4 & 5 & 5 & 2.8 & 5 \\ 1.4 & 0 & 2.8 & 4 & 2.2 & 2 & 3.6 & 3.6 & 1.4 & 4.1 \\ 3.2 & 2.8 & 0 & 2.8 & 1 & 2 & 4.1 & 5 & 3.2 & 2.2 \\ 5.1 & 4 & 2.8 & 0 & 2.2 & 4.5 & 2.2 & 3.6 & 3.2 & 1 \\ 3 & 2.2 & 1 & 2.2 & 0 & 2.2 & 3.2 & 4 & 2.2 & 2 \\ 1.4 & 2 & 2 & 4.5 & 2.2 & 0 & 5 & 5.4 & 3.2 & 4.1 \\ 5 & 3.6 & 4.1 & 2.2 & 3.2 & 5 & 0 & 1.4 & 2.2 & 3.2 \\ 5 & 3.6 & 5 & 3.6 & 4 & 5.4 & 1.4 & 0 & 2.2 & 4.5 \\ 2.8 & 1.4 & 3.2 & 3.2 & 2.2 & 3.2 & 2.2 & 2.2 & 0 & 3.6 \\ 5 & 4.1 & 2.2 & 1 & 2 & 4.1 & 3.2 & 4.5 & 3.6 & 0 \end{pmatrix}$$

Il problema è quello di spostare la terra in modo da spianare il terreno a costo minimo.

1) Scrivere la *formulazione* del problema in termini di programmazione lineare a numeri interi (non si chiede di risolvere il problema)

2) Cosa si può dire sulla possibilità di risolvere questa formulazione facendo uso della sola programmazione lineare?

16

Sei centrali nucleari (A, B, C, D, E, F) producono scorie, che devono essere adeguatamente smaltite in un centro di smaltimento. Vi sono quattro centri di smaltimento, ciascuno in grado di smaltire solo alcuni tipi di scorie prodotte. In particolare, la tabella indica la quantità annua di scorie prodotte (migliaia di tonnellate) e i centri in grado di smaltirle. Ciascun centro riesce a smaltire un massimo di 30 tonnellate di scorie all'anno. Si vuole determinare se è possibile o meno smaltire tutte le scorie prodotte dalle sei centrali. Formulare il problema per mezzo di un opportuno modello di ottimizzazione su grafi e risolverlo applicando un opportuno algoritmo.

	quantità scorie prodotte	centri di smaltimento
A	25	1,3
B	10	2,4
C	20	2,3
D	30	1,2
E	20	1,4
F	15	3,4

17

Un progetto consiste di 6 fasi (A, B, C, D, E, F), ciascuna avente durata nota. Esistono dei vincoli di precedenza tra le fasi, nel senso che alcune possono iniziare solo dopo la fine di altre. Tali dati sono riassunti nella tabella.

fase	durata	deve precedere...
A	20	C, D, E
B	15	D, E
C	25	F
D	30	F
E	40	–
F	15	–

Disegnare il grafo del progetto e calcolarne la durata per mezzo di un opportuno algoritmo.

18

Sia dato un insieme di n valute. Per ciascuna coppia (i, j) di valute, è dato un valore p_{ij} che esprime la quantità di valuta j che si può comprare con un'unità di valuta i. (Ad esempio, se i=euro e j=dollaro, $p_{ij} = 1.4$ indica che con un euro è possibile acquistare 1.4 dollari.) Vale la proprietà che $p_{ij} = 1/p_{ji}$. Supponendo che non vi siano commissioni per ciascuna transazione, uno speculatore vuole scoprire se sia possibile individuare un ciclo di valute $i_1 \to i_2 \to i_3 \to \ldots \to i_k \to i_1$ tale da poter realizzare un guadagno netto semplicemente comprando i_2 con la valuta i_1, i_3 con la valuta i_2, ..., e infine comprando i_1 con la valuta i_k. Illustrare come andrebbe impostato e risolto il problema in termini di ottimizzazione su grafi.

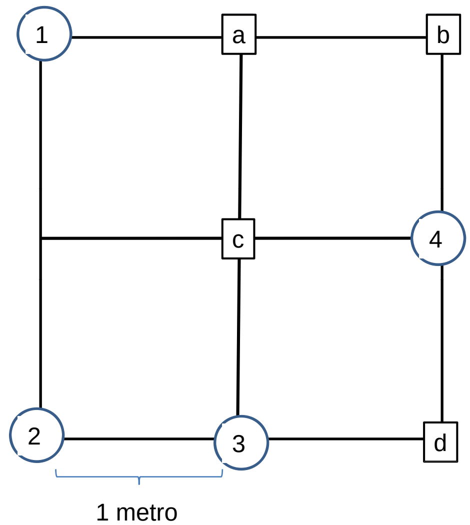
19

Un impianto video deve stimare la velocità di alcuni oggetti (identici) in movimento su un piano. Ad un certo istante, viene scattata una foto che raffigura quattro oggetti nelle posizioni indicate in figura con 1, 2, 3 e 4. Dopo alcuni secondi, viene scattata un'altra foto e gli stessi oggetti appaiono nelle posizioni indicate con a, b, c, d. Il problema consiste nell'identificare la posizione dei quattro oggetti originari, nella seconda foto. Si ritiene che l'identificazione più plausibile sia quella per cui è minima la somma delle distanze euclidee tra la nuova e la vecchia posizione di ciascun punto.

Formulare (*non* si chiede di risolvere) il problema in termini di un opportuno problema di ottimizzazione su grafi.

20

In un impianto di produzione sono presenti 3 macchine, che devono essere usate per produrre 7 stampi di acciaio (A,...,G). Gli stampi sono tutti uguali ma provengono da



clienti diversi, e hanno quindi diversa importanza (peso). Inoltre le tre macchine non sono identiche: mentre la macchina 1 impiega 1 ora a produrre uno stampo, la 2 impiega 40 minuti e la 3, più veloce, ne impiega 30. Per ciascuno stampo è indicato un orario (*due time*, espresso in ore a partire da adesso) entro il quale lo stampo dovrebbe essere completato. Per ogni stampo il cui tempo di completamento eccede tale ora, si paga una penale pari al ritardo (in minuti) moltiplicato per il peso. Il problema è quello di allocare gli stampi alle macchine e sequenziarli in modo da minimizzare la penale complessiva. Formulare (non si chiede di risolvere) il problema in termini di un opportuno problema di ottimizzazione su grafi.

stampo	peso	due time
A	2	1 ora
B	3	1 ora e mezza
C	2	1 ora
D	5	2 ore
E	3	1 ora e mezza
F	4	1 ora
G	2	1 ora e mezza

21

Siete al trentottesimo piano di un grattacielo di 40 piani e dovete raggiungere il piano numero 23. Andando a piedi impiegate 20 secondi per salire un piano di scale e 15 per scendere di un piano. In alternativa potete prendere gli ascensori. Esistono tre tipi di ascensori:

- L'ascensore superveloce, che impiega 30 secondi per raggiungere il ventesimo piano e altri 30 secondi per arrivare all'ultimo piano. Può essere preso solo al piano terra, al ventesimo o al quarantesimo piano, e può essere utilizzato sia in salita che in discesa.

- Un ascensore veloce, che può essere utilizzato solo in salita ed impiega 7 secondi a piano. Può essere preso solo al piano terra, al decimo, al ventesimo o al trentesimo piano.

- Gli ascensori normali servono tutti i piani, impiegano 12 secondi a piano, e possono essere utilizzati per salire e scendere.

Si assuma che il tempo di attesa di qualsiasi ascensore è di 30 secondi. Formulare il problema di raggiungere il ventitreesimo piano come un problema di cammino minimo su un grafo opportuno e determinare con un opportuno algoritmo la soluzione ottima. Suggerimento: si può evitare di rappresentare esplicitamente tutti i piani del palazzo.

22

Siete un autista proprietario di un pullman. Ricevete una serie di richieste per i primi giorni di Aprile, da parte di scolaresche, di utilizzo del vostro pullman.

Richiesta n.	Data inizio	Data fine	Numero studenti
1	2-4-2004	4-4-2004	40
2	3-4-2004	5-4-2004	25
3	4-4-2004	6-4-2004	30
4	4-4-2004	7-4-2004	20
5	5-4-2004	6-4-2004	50
6	5-4-2004	7-4-2004	50
7	6-4-2004	8-4-2004	35
8	6-4-2004	9-4-2004	40
9	6-4-2004	10-4-2004	45
10	7-4-2004	10-4-2004	45

Il problema è decidere quali richieste accettare tenendo conto che il camion è impegnato per tutta la durata della richiesta (data di inizio e di fine incluse), e che ovviamente il pullman può trasportare un solo gruppo di persone alla volta. L'obiettivo è di massimizzare il numero di studenti trasportati. Formulare e risolvere il problema come problema di ottimizzazione su grafi.

23

Grunt, il cavernicolo, possiede una clava e un certo numero di conchiglie. Grunt può barattare i suoi oggetti come indicato in seguito:
Clava + 3 conchiglie = Cane
Clava + 10 conchiglie = Bue
Cane + 6 conchiglie = Bue
Clava + 17 conchiglie = Canoa
Cane + 13 conchiglie = Canoa
Bue + 6 conchiglie = Canoa
Clava + 50 conchiglie = Palafitta
Cane + 45 conchiglie = Palafitta
Bue + 35 conchiglie = Palafitta
Canoa + 15 conchiglie = Palafitta

Qual è il numero minimo di conchiglie che Grunt deve pagare (e quali scambi deve effettuare) per comprare una palafitta? Formulare e risolvere il problema come un problema di ottimizzazione su grafi.

24

Un libero professionista deve pianificare i propri impegni per il periodo gennaio–settembre. Sono disponibili diversi lavori. Il lavoro i richiede al professionista di lavorare dall'*inizio* del mese r_i alla *fine* del mese d_i. Ciascun lavoro richiede un certo investimento iniziale INV_i, e garantisce un guadagno *netto* g_i finale (ad esempio, il lavoro E può essere svolto se il professionista, all'inizio di marzo, dispone di almeno 10000 euro; se lo svolge, al termine di maggio il professionista recupera i 10000 e in più ne intasca altri 4000). Non è possibile impegnarsi in più di un lavoro alla volta.

Il problema è quello di massimizzare il guadagno totale, sapendo che all'inizio del mese di gennaio il professionista dispone di 8.000 euro. Formulare il problema in termini di ottimizzazione su grafi.

i	INV_i	g_i (k euro)	r_i	d_i
A	8	4	gennaio	febbraio
B	7	5	gennaio	marzo
C	8	3	febbraio	aprile
D	9	3	marzo	aprile
E	10	4	marzo	maggio
F	12	5	marzo	giugno
G	10	3	aprile	giugno
H	12	4	aprile	luglio
I	12	5	maggio	agosto

25

Un'azienda produce caldaie e deve programmare la produzione dei primi cinque mesi dell'anno. Per ciascun mese è specificato un costo di produzione unitario p_i, variabile da mese a mese, una domanda d_i, ossia il numero di caldaie che devono essere consegnate alla fine del mese i, e una capacità produttiva K_i, ossia il massimo numero di caldaie che possono essere prodotte nel mese i. Le caldaie eventualmente prodotte ma non vendute alla fine di un mese sono immagazzinate (e dunque possono essere usate per soddisfare la domanda nei mesi successivi). Per ciascuna caldaia rimasta in magazzino alla fine del mese i si ha un costo h_i. Alla fine di maggio non si vogliono avere caldaie in magazzino.

i	d_i	p_i	K_i	h_i
Gennaio	20	300	30	15
Febbraio	10	250	30	10
Marzo	15	320	30	8
Aprile	20	320	35	12
Maggio	10	350	35	–

Formulare (senza risolverlo) in termini di un opportuno problema di ottimizzazione su grafi il problema di pianificare la produzione in modo da minimizzare i costi complessivi, rispettando i vincoli di capacità e soddisfacendo la domanda.

26

Un insieme di fusti, ciascuno contenente varie sostanze chimiche e avente un certo peso, deve essere spedito per mezzo di camion. Le sostanze A e B, come pure le sostanze C e D, non possono essere messe sullo stesso camion perché in caso di incidente potrebbero venire a contatto ed esplodere.

fusto	contiene	peso
1	A, C, E	270
2	C, E	260
3	A, D, E	190
4	B, C	260
5	B, E	250
6	A, E	220
7	B, E	260
8	D	250

Considerando che un camion non può portare più di 500 kg, formulare (senza risolverlo) in termini di ottimizzazione su grafi il problema di determinare il numero minimo di camion necessari per spedire tutti i fusti.

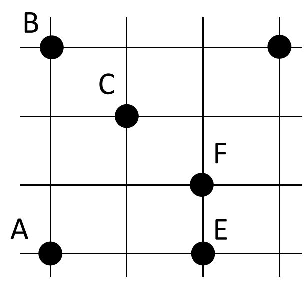
27

Un'acciaieria fa uso di varie sbarre di metallo, tutte aventi la stessa sezione ma lunghezza (classe) diversa. Il prezzo di una sbarra di classe i è pari a C_i, mentre creare un magazzino per ospitare sbarre di classe i implica un costo fisso K_i (indipendentemente da quante sbarre ospiterà; supponiamo per semplicità che non vi siano limiti di capacità). Una volta creato, il magazzino potrà ospitare solo sbarre della classe corrispondente. Tuttavia, una sbarra di una certa classe i può essere *sempre* utilizzata al posto di una sbarra di lunghezza inferiore, ossia di classe $k < i$. Considerando che è noto il numero D_i di sbarre di classe i che saranno necessarie alla produzione nel prossimo periodo, il problema è quello di decidere per quali classi di sbarre creare un magazzino, in modo da minimizzare i costi complessivi. Formulare il problema in termini di ottimizzazione su grafi e risolverlo per mezzo di un opportuno algoritmo.

classe	C_i	D_i	K_i
1	15	8	100
2	20	6	170
3	30	5	220
4	35	9	250
5	40	10	300

28

A Nevazzo è in corso la sagra del gelato al forno. Per intrattenere i visitatori, in 6 punti della città (indicati nella mappa con A, B, C, D, E, F) si esibiscono altrettanti gruppi di artisti di strada. Al termine della mattinata, gli organizzatori vogliono far cambiare posto ai 6 gruppi, in modo tale però che la distanza che complessivamente gli artisti dovranno percorrere sia minimizzata (nella mappa, le linee rappresentano le vie lungo le quali è possibile muoversi). Formulare il problema di determinare in che modo dovranno spostarsi gli artisti in termini di ottimizzazione su grafi e risolverlo per mezzo di un opportuno algoritmo.



29

Una compagnia di navigazione possiede un vaporetto, che effettua viaggi tra alcuni porti, trasportando passeggeri e merci. Per ogni coppia di porti (i, j) è noto il tempo t_{ij} (espresso in ore) necessario a compierlo, nonché il guadagno p_{ij} (espresso in centinaia di euro) realizzato se quel viaggio viene effettuato. Questi dati sono presentati nelle due matrici T e P:

$$T = \begin{pmatrix} - & 2 & 3 & 3 \\ 6 & - & 3 & 3 \\ 6 & 4 & - & 3 \\ 4 & 5 & 4 & - \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} - & 5 & 4 & 2 \\ 2 & - & 3 & 2 \\ 3 & 1 & - & 2 \\ 3 & 1 & 1 & - \end{pmatrix}$$

Dato un ciclo W, il guadagno per unità di tempo di W è definito come

$$\frac{\sum_{(i,j)\in W} p_{ij}}{\sum_{(i,j)\in W} t_{ij}}.$$

I dirigenti della compagnia si chiedono se sia possibile effettuare un ciclo che abbia un guadagno per unità di tempo superiore a 100 euro/ora.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione su grafi e risolverlo per mezzo di un opportuno algoritmo.

Suggerimento: si osservi che il problema equivale a chiedersi se esiste un ciclo W tale che

$$\sum_{(i,j)\in W} t_{ij} < \sum_{(i,j)\in W} p_{ij}.$$

30

Alcuni aerei devono atterrare su una pista. L'ordine di atterraggio è *prefissato* (1, 2, 3, 4, 5). Per ciascun aereo è dato l'orario nominale di arrivo e inoltre due pesi, w_i^- e w_i^+, che indicano il costo (euro/minuto) per ogni minuto, rispettivamente, di ritardo o di anticipo rispetto all'orario nominale. Tra un atterraggio e il successivo devono intercorrere almeno 10 minuti, per dar modo di liberare la pista (ossia se un aereo atterra alle 9:30, il successivo non può atterrare prima delle 9:40). Tenendo conto che sono le 9:20, e che gli aerei sono già tutti pronti per atterrare, *formulare* (non risolvere) in termini di cammino minimo il problema di determinare l'orario effettivo di atterraggio di ciascun aereo in modo da minimizzare i costi complessivi.

Suggerimento: si utilizzino come unità di misura elementare blocchi di 5 minuti, e si consideri un nodo per ciascuna coppia (t, p) dove t è l'orario di atterraggio dell'aereo p $(p = 1, \ldots, 5)$.

i	orario nom.	w_i^-	w_i^+
1	9:30	2	0.20
2	9:35	3	0.30
3	9:45	2.50	0.20
4	9:50	1	0.10
5	10:10	4	0.20

31

Un ospedale deve riorganizzare il proprio magazzino medicinali. I medicinali sono conservati in *contenitori*. Precisamente, per ciascun tipo di medicinale deve essere utilizzato esattamente *un* contenitore – in altre parole, un solo contenitore è sufficiente a contenere tutte le scatole di un certo medicinale, e, per motivi di ordine, ciascun contenitore ospita un solo tipo di medicinale. I contenitori disponibili differiscono uno dall'altro per la loro *larghezza*. Un contenitore di tipo j ha larghezza w_j e può contenere qualsiasi medicinale i le cui confezioni abbiano larghezza $\ell_i \leq w_j$. Esistono 5 *tipi* possibili di contenitori, per ciascuno dei quali sono dati: la larghezza w_j, il costo unitario (per contenitore ordinato) c_j, e il costo fisso f_j che si paga se quel tipo di contenitore è utilizzato, indipendentemente dal *numero* di contenitori ordinati di quel tipo (poiché infatti i vari tipi di contenitori sono prodotti da ditte diverse, vi sono delle spese di trasporto per ciascun tipo di contenitore). Si noti che al crescere della dimensione del contenitore, aumentano sia i costi fissi che quelli unitari.

Il problema è decidere quali tipi di contenitori ordinare, e quale utilizzare per ciascuno degli 8 medicinali, in modo da minimizzare i costi complessivi. Formulare il problema in termini di ottimizzazione su grafi (non è richiesta la soluzione).

medicinale	larghezza ℓ_i (cm)
1	10
2	12
3	14
4	16
5	18
6	20
7	22
8	25

contenitore	w_j (cm)	f_j (euro)	c_j (euro/contenitore)
A	10	100	20
B	15	120	25
C	17	130	25
D	20	140	27
E	26	150	38

32

Si consideri il grafo aciclico in figura, in cui è data una numerazione topologica. Il problema consiste nel determinare il cammino di peso minimo dal nodo 1 al nodo 10 *costituito* *da esattamente 4 archi*. Mostrare come tale problema possa essere risolto in termini di cammino minimo su un altro grafo aciclico opportunamente definito.

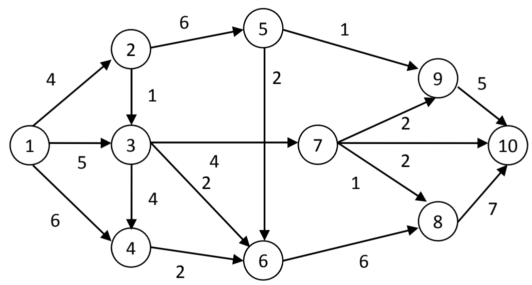


Figura 1: Grafo per l'esercizio 32.

33

Il grafo in figura rappresenta una rete stradale che unisce s a t. La polizia è venuta a sapere che un camion sospettato di trasportare droga partirà da s per raggiungere t. Dislocare una pattuglia lungo una strada (arco della rete) consente di controllare tutti i camion che passano per quella strada. Si vuole dislocare lungo i punti della rete il minimo numero di pattuglie per essere sicuri di riuscire a intercettare il camion. Formulare il problema in termini di ottimizzazione su grafi e risolvere il problema per mezzo di un opportuno algoritmo.

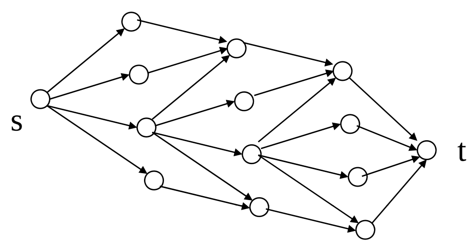


Figura 2: Grafo per l'esercizio 33.

34

Una cella flessibile di lavorazione produce schede elettroniche. Nella cella sono presenti due postazioni, su ciascuna delle quali può essere montata una scheda. Associata a ogni postazione c'è un robot, che effettua operazioni di pick-and-place, attingendo i componenti da alcuni *feeder*. Due schede possono essere montate in parallelo sulle rispettive postazioni solo se gli insiemi di feeder relativi alle due schede non hanno elementi in comune. Un robot impiega esattamente un'ora a montare una scheda.

Il problema è decidere un assegnamento di schede alle due postazioni e un loro sequenziamento in modo da terminare tutte le operazioni nel più breve tempo possibile. Formulare il problema in termini di ottimizzazione su grafi.

scheda	feeder
1	A, B, C
2	A, B, E
3	A, C, D
4	A, E, F
5	A, D
6	C, D, G
7	B, F, G
8	D, E, G
9	C, E, G
10	B, E, G

35

La figura mostra la mappa stradale di un quartiere, consistente in quattro strade verticali e quattro orizzontali. La polizia vuole dislocare quattro pattuglie di agenti per controllare tutte le strade. Una pattuglia dislocata in un incrocio controlla ambedue le strade corrispondenti. Per ciascun incrocio è specificato un valore numerico che ne esprime la pericolosità (1=molto sicuro, 10=molto pericoloso). Il problema consiste nel decidere dove dislocare le 4 pattuglie, minimizzando il totale dei valori numerici. Formulare il problema in termini di ottimizzazione su grafi e risolvere il problema per mezzo di un opportuno algoritmo.

36

Una compagnia aerea ha deciso di istituire un insieme di voli che connettono varie città, precisamente: A–F; A–G; A–H; B–G; B–I; C–F; C–G; C–J; D–H; D–J; E–H; E–I.

Il problema consiste nel decidere in quali città andrà collocata una sede logistica in modo tale che, per ciascun volo, in almeno una tra la città di partenza e quella di destinazione sia collocata una sede logistica.

Formulare il problema di minimizzare il numero di sedi logistiche in termini di ottimizzazione su grafi.

37

Un'azienda effettua la personalizzazione di camper a seconda delle richieste dei clienti, e dispone di due impianti, A e B. Nell'impianto A è presente personale altamente specializzato, che è in grado di configurare un camper in 2 giorni. Nell'impianto B, essendovi

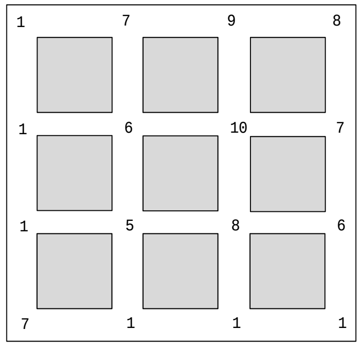


Figura 3: Mappa del quartiere nell'esercizio 35.

disponibili meno risorse, la configurazione richiede 3 giorni. All'istante 0, sono disponibili gli ordini indicati in tabella. Per ognuno di essi, sono indicate tre quantità: la data ideale di consegna (*due date*), la penale (w_i^+, euro/giorno) per ogni giorno di cui la consegna eccede la due date, e la penale (w_i^-,euro/giorno) per ogni giorno di anticipo rispetto alla due date. Il problema è quello di allocare gli ordini ai due impianti minimizzando i costi totali.

1. Formulare il problema per mezzo di un opportuno modello di ottimizzazione su grafi

2. Risolverlo applicando un opportuno algoritmo.

ordine	due date	w_i^+	w_i^-
A	4	100	10
B	4	250	20
C	5	200	25
D	4	150	30
E	5	450	10
F	5	300	20
G	6	50	30

38

Sulle 20 caselle di una scacchiera 5x5 devono essere collocate 5 torri (del gioco degli scacchi), in modo tale che nessuna minacci nessun'altra: in altre parole, si vuole fare in modo che nessuna torre si trovi sulla stessa riga o sulla stessa colonna di un'altra torre. Il *valore* di una collocazione è dato dal punteggio totale delle caselle su cui sono collocate le 5 torri. Il problema consiste nel determinare la collocazione ammissibile di valore minimo. Formulare il problema in termini di ottimizzazione su grafi e risolverlo per mezzo di un opportuno algoritmo.

3	6	10	6	3
6	5	6	5	6
10	6	12	6	10
6	5	6	5	6
3	6	10	6	3

39

Il comune di Nevazzo ha indetto una gara per affidare il servizio di scuolabus. Tre ditte rispondono alla gara, offrendosi di coprire determinate linee a determinati prezzi. Il quadro delle offerte ricevute è riportato nella tabella. Ciascuna ditta non può ricevere l'incarico di coprire più di *due* linee.

ditta	linea 1	linea 2	linea 3	linea 4	linea 5
A	2500	3000	1500	–	6000
B	–	4000	–	4000	7000
C	3000	2000	2000	3500	–

Il problema consiste nel decidere a quale ditta affidare ciascuna delle 5 linee minimizzando la spesa da parte del comune. Formulare il problema in termini di ottimizzazione su grafi e risolverlo tramite un opportuno algoritmo.

40

In un'officina meccanica, tre centri di lavorazione devono essere utilizzati per produrre 7 lotti di pezzi meccanici di tre tipi: bielle, pistoni e carter. Ciascun centro di lavorazione impiega esattamente un'ora a produrre un lotto di pezzi, ma i centri non sono uguali. Precisamente, ciascun centro può produrre i tipi di pezzi indicati in tabella.

centro	tipi di pezzi
A	bielle, pistoni, carter
B	bielle, pistoni
C	carter

Sono le 8 di mattina. Il centro A è disponibile solo fino alle 10, mentre gli altri due centri sono disponibili fino alle 11. Per ogni lotto è specificato un orario (*due time*) entro il quale deve essere pronto.

lotto	tipo	due time
1	bielle	9
2	bielle	11
3	pistoni	9
4	pistoni	11
5	carter	10
6	carter	11
7	carter	10

Il problema consiste nel determinare se è possibile produrre tutti i lotti entro i rispettivi due time. Formulare il problema in termini di ottimizzazione su grafi.

41

Nel mondo ultraterreno di Nangijala esistono varie valute, corrispondenti ai nodi del grafo aciclico raffigurato. Il peso di ciascun arco (i, j) del grafo indica quante unità di j si ricevono per ogni unità di i. Così ad esempio, con un tallero è possibile comprare 32 scudi. Jonathan dispone di uno zecchino, e vuole riuscire a ottenere il massimo numero possibile di reali. Come deve fare? Formulare il problema in termini di ottimizzazione su grafi e risolverlo con un opportuno algoritmo.

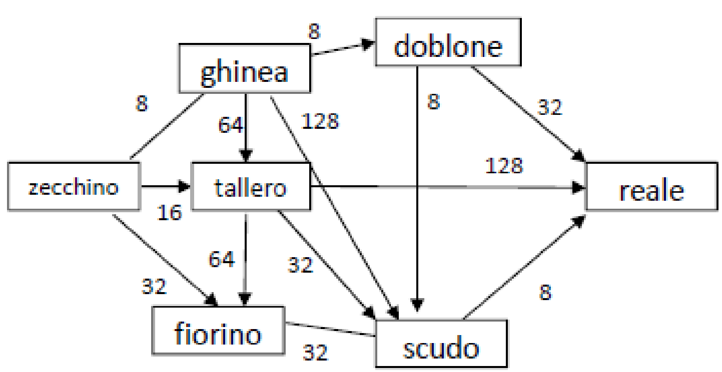


Figura 4: Grafo per il Problema 41.

42

La mattina del giorno 1, un centro logistico riceve alcuni lotti di pezzi meccanici che devono essere spediti presso vari clienti.

lotto	d_i	w_i
A	3	400
B	4	5000
C	4	1200
D	5	2000
E	5	1500
F	5	3000

I lotti vengono spediti per mezzo di treni merci. È possibile utilizzare tre treni, ciascuno dei quali può caricare al massimo *due* lotti, e il cui orario di partenza è fissato come in tabella. Ciascun lotto i è caratterizzato da una certa due date d_i; se la partenza di un lotto avviene oltre la data d_i, vi è una penale pari a w_i euro per ciascun giorno di ritardo.

treno	partenza
1	la sera del giorno 2
2	la sera del giorno 5
3	la sera del giorno 6

Il problema consiste nel decidere in come organizzare le spedizioni in modo da minimizzare i costi delle penali. Formulare il problema in termini di ottimizzazione su grafi e risolverlo con un opportuno algoritmo.

43

A un centro di car-pooling arriva un insieme di richieste (*trip*), comprese tra le 8 e le 17.30. Ciascun trip inizia e termina nel centro, ed è definito da un'ora di inizio e un'ora di fine. Voi disponete di una macchina, con cui vi offrite di svolgere alcuni trip. Per ciascun trip si riceve un compenso proporzionale alla *durata* del trip stesso. Il problema consiste nello scegliere l'insieme di trip tale da massimizzare il compenso, tenendo presente che, al termine di ciascun trip, la macchina non può ripartire prima che sia passata almeno mezz'ora, a causa del disbrigo di alcune pratiche burocratiche.

Formulare il problema in termini di ottimizzazione su grafi.

trip	ora inizio	ora fine
1	8	10
2	9	11
3	8,30	10,30
4	10,30	13
5	11	12,30
6	11	14
7	11,30	13,30
8	12	14
9	14	15,30
10	15,30	16,30
11	16	17

44

Il reparto manutenzione di una compagnia aerea deve decidere la migliore politica di gestione degli pneumatici di un aereo. Se questi vengono sostituiti frequentemente, si va incontro a un'elevata spesa per la manodopera e per gli stessi pneumatici, mentre nel caso opposto si ha comunque una elevata spesa di manutenzione. La tabella riporta il costo complessivo (in €) connesso alla installazione e manutenzione di pneumatici installati all' inizio del mese x e sostituiti alla fine del mese y. Considerando che siamo all'inizio di gennaio, che è stato appena installato un treno di gomme nuovo, e che in ogni caso alla fine di giugno sarà installato un treno di gomme nuovo, formulare in termini di ottimizzazione su grafi il problema di determinare la migliore politica di sostituzione degli pneumatici.

$x \downarrow y \rightarrow$	GEN	FEB	MAR	APR	MAG	GIU
GEN	5000	6700	8200	12500	16800	19000
FEB	–	5250	6900	8500	13000	17200
MAR	–	–	5400	7000	8600	13700
APR	–	–	–	5500	7200	9000
MAG	–	–	–	–	5600	7400
GIU	–	–	–	–	–	5900