Dimensionamento dei lotti di produzione: il caso con variabilità nota

A. Agnetis*

In questi appunti studieremo alcuni modelli per il problema del *lot sizing*, vale a dire il problema di programmare la dimensione dei lotti di produzione, in un orizzonte temporale discreto e in un ambiente produttivo manifatturiero. Questo è un problema centrale nella pianificazione e controllo della produzione, e nasce dalla necessità di contemperare nel modo migliore le due esigenze contrastanti di minimizzare i costi fissi e i costi di immagazzinamento. I primi sono legati al fatto che, quando si inizia la produzione di un certo bene, vi sono da pagare dei costi che sono sostanzialmente indipendenti dall'entità della produzione stessa. Esempi di costi fissi sono quelli legati al tempo necessario per effettuare l'attrezzaggio, la configurazione, l'accensione delle macchine. I costi di immagazzinamento sono invece legati al fatto che il materiale presente in produzione (materiale grezzo, semilavorati, prodotti finiti) non produce profitto prima del momento in cui è venduto, ossia rappresenta un capitale immobilizzato. I costi di immagazzinamento sono quindi legati agli interessi mancati per effetto dell'immobilizzazione, ma possono anche esservi dei costi diretti, quali quelli di affitto dei locali per immagazzinare il prodotto finito, costi legati all'obsolescenza del materiale etc. Queste due voci di costo sono contrastanti, in quanto la prima spinge verso pochi lotti di produzione grandi (in modo da non pagare troppo spesso i costi fissi), mentre per la seconda la situazione ideale sarebbe quella in cui si produce di volta in volta solo ciò che viene assorbito dal mercato, con molti lotti piccoli.

I modelli di lot sizing che analizziamo si applicano in tutte quelle situazioni in cui la domanda di mercato è discreta (come per chi lavora su commessa) e nota su un certo orizzonte temporale.

Nel seguito supponiamo che siano note al lettore le nozioni di base sui problemi di costo su reti di flusso. Si consideri un grafo orientato $G = (N, A)$, in cui $n = |N|$ è il numero di nodi e $m = |A|$ il numero di archi del grafo G. Indichiamo poi con A la matrice di incidenza nodi-archi del grafo, mentre $K \in Z_+^m$ e $c \in I\!R^m$ sono rispettivamente il vettore delle *capacità* e dei *costi*. Infine, un vettore $d \in Z^n$ indica la domanda di flusso ai vari nodi ($d_i > 0$ indica il fatto che nel nodo i vi è *assorbimento* di flusso, $d_i < 0$ indica

*Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione - Università di Siena

che nel nodo i vi è *produzione* di flusso, $d_i = 0$ se i è un nodo di passaggio). Dato dunque il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ Ax &= b \\ 0 &\leq x \leq K \end{aligned} \tag{1}$$

ricordiamo che vale il seguente teorema:

Teorema 1 *Data una soluzione di base ammissibile $\tilde{x}$, l'insieme degli archi non saturi e non vuoti forma una foresta.*

Un altro risultato di cui faremo uso è il seguente.

Teorema 2 *Data una funzione $f(x)$ concava e un politopo P, esiste almeno un vertice v^* di P tale che*

$$f(v^*) = \min\{f(x) : x \in P\}$$

Dim.- Sia x^* tale che $f(x^*) = \min\{f(x) : x \in P\}$. Se x^* non è un vertice di P, per il teorema di Minkowsky-Weyl può esprimersi come combinazione convessa dei vertici, ossia, supponendo vi siano k vertici $v^1, v^2, \ldots, v^k$:

$$x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v^i$$

ove $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Definendo poi $f(v^*) = \min\{f(v^i) : 1 \leq i \leq k\}$, a causa della concavità della f si ha

$$f(x^*) = f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v^i) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(v^i) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(v^*) = f(v^*).$$

e dunque esiste almeno un vertice ottimo. $\square$

1 Il modello di Wagner-Whitin

Il primo modello che vediamo (Wagner-Whitin) non considera la possibilità di soddisfare una domnda in ritardo rispetto alla data di consegna (no backlogging), e non pone vincoli sulla capacità produttiva.

Si consideri un'azienda che deve pianificare la propria produzione per un orizzonte temporale di T periodi (ad esempio, mesi). Per ciascun periodo t, deve essere deciso il numero x_t di unità che devono essere prodotte. È nota la domanda d_t di prodotto finito, il costo A_t di set-up, il costo variabile p_t di produzione per unità di prodotto, e il costo h_t di immagazzinamento per unità di prodotto alla fine del mese t (ossia, si paga h_t per ogni unità di prodotto presente in magazzino alla fine del mese t). I costi di set-up sono costi fissi, nel senso che sono indipendenti dal numero di unità prodotte nel periodo t, purché $x_t > 0$. Il problema consiste nel determinare i valori x_t, $t = 1, \ldots, T$, con l'obiettivo di minimizzare i costi complessivi di set-up, produzione e immagazzinamento, e con il vincolo di soddisfare la domanda in ciascun periodo (si suppone che la quantità prodotta nel periodo t sia subito disponibile). La quantità non venduta alla fine di ogni mese viene depositata in magazzino. Indicando con I_t il livello del magazzino alla fine del periodo t, e con y_t una variabile binaria che è pari a 1 se in t vi è produzione e 0 altrimenti, il problema può essere formulato come segue (*modello di Wagner-Whitin*):

$$\min \sum_{t=1}^{T} (p_t x_t + h_t I_t + A_t y_t) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} x_t + I_{t-1} = &\quad I_t + d_t \quad t = 1, \ldots, T \\ x_t \leq &\quad M y_t \quad t = 1, \ldots, T \\ x_t, I_t \geq &\quad 0, \quad t = 1, \ldots, T \end{aligned}$$

dove M è un valore sufficientemente elevato (ad esempio $M = \sum_{t=1}^{T} d_t$), e si suppone di conoscere il valore iniziale del livello di magazzino I_0, che nel seguito per semplicità supporremo nullo (il caso $I_0 > 0$ presenta alcune differenze con quello visto qui, ma non particolarmente rilevanti dal punto di vista concettuale).

Data un'istanza del problema (2), si consideri la rete di flusso R in Fig.1. Questa rete consiste di $2T + 1$ nodi. Oltre al nodo-sorgente S, abbiamo una coppia di nodi (U_t, V_t) associata a ciascun periodo. Il nodo U_t corrisponde alla dinamica del magazzino mentre V_t alla domanda. C'è un arco (S, U_t) per ogni $t = 1, \ldots, T$; il flusso in quest'arco corrisponde alla produzione nel periodo t, ossia è pari a x_t. C'è poi un arco (U_t, U_{t+1}), per ogni $t = 1, \ldots, T-1$; il flusso in quest'arco corrisponde al livello del magazzino alla fine di t, ossia è pari a I_t. Infine, c'è un arco (U_t, V_t) per ogni $t = 1, \ldots, T$. Il nodo S produce una quantità di flusso pari a $\sum_{t=1}^{T} d_t$, mentre il nodo V_t consuma un flusso pari a d_t. Questo implica che il flusso negli archi (U_t, V_t) è necessariamente pari a d_t. E' immediato verificare che esiste una corrispondenza biunivoca tra flussi ammissibili su R e soluzioni ammissibili del problema (2). Osserviamo che nel problema (2), la funzione obiettivo è lineare, ma vi sono variabili intere. Possiamo allora associare agli archi di R una funzione di costo $f(\cdot) = p(\cdot) + h(\cdot)$ cosi' definita:

$$p(x_t) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_t = 0 \\ A_t + p_t x_t & \text{if } x_t > 0 \end{cases} \tag{3}$$

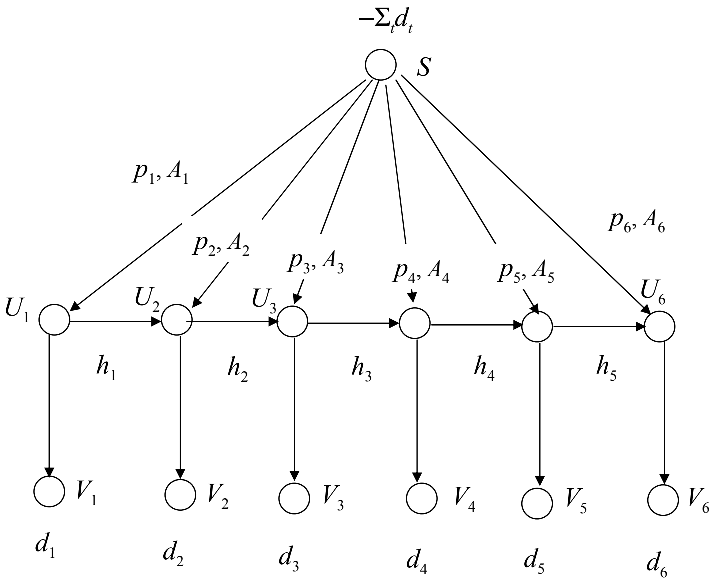

Figura 1: La rete di flusso per il modello di Wagner-Whitin senza capacità.

$$h(I_t) = h_t I_t$$

mentre gli archi (U_t, V_t) non hanno costi associati. Ricordando che non vi sono vincoli di capacità, il problema (2) può allora riscriversi

$$\min \sum_{t=1}^{T} (p(x_t) + h(I_t)) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} x_t + I_{t-1} = {} & I_t + d_t \quad t = 1, \ldots, T \\ x_t, I_t \geq {} & 0, \qquad t = 1, \ldots, T \end{aligned}$$

Dunque, data una soluzione ammissibile (x_t, I_t) del problema (4), il valore della funzione obiettivo coincide con il costo del flusso. Si noti che tale costo è una funzione *concava*, a causa della forma delle (3). In conclusione, vale il seguente teorema.

Teorema 3 *Data un'istanza del problema (2), esiste una soluzione ottima tale che gli archi di R attraversati da flusso non nullo formano una foresta.*

Dim.- Per il Teorema 2, l'ottimo di (2) è sicuramente su un vertice del politopo

$$\begin{aligned} x_t + I_{t-1} = {} & I_t + d_t \quad t = 1, \ldots, T \\ x_t, I_t \geq {} & 0, \qquad t = 1, \ldots, T \end{aligned}$$

ovvero in una soluzione di base ammissibile. Dal Teorema 1, osservando che nel nostro caso non vi possono essere archi saturi, segue la tesi. □

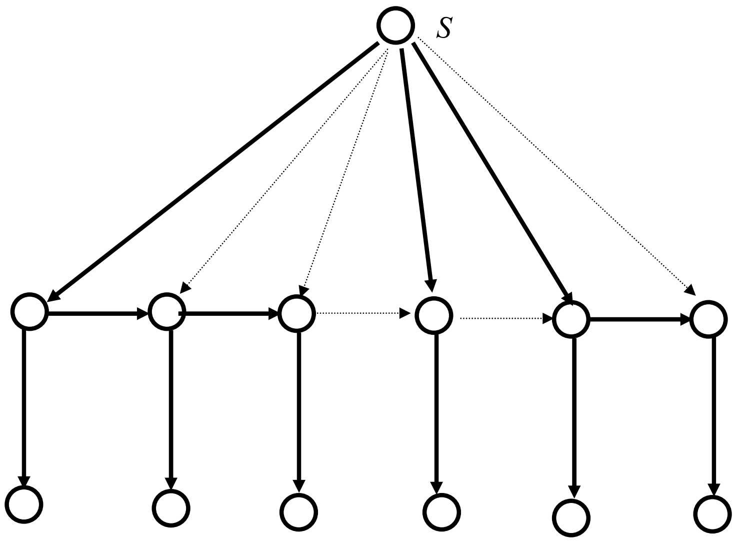

Figura 2: Struttura delle soluzioni ottime del modello di Wagner-Whitin senza capacità.

La proprietà espressa nel Teorema 3 può essere utilizzata per risolvere in modo efficiente il problema (2).

1.1 Soluzione del modello di Wagner-Whitin

Il Teorema 3 implica che la struttura delle soluzioni ottime, avendo supposto $I_0 = 0$, è del tipo illustrato in Fig.2. Si noti che, in una soluzione di questo tipo non può mai verificarsi che la domanda del periodo t venga soddisfatta *sia* dalla produzione che dal magazzino, ossia si avrà sempre:

$$I_{t-1} x_t = 0; \ t = 1, \ldots, T$$

Chiamiamo *regeneration point* un periodo t per cui $I_t = 0$. Il nome è dovuto al fatto che ciò che accade dopo t è disaccoppiato da ciò che accade prima di t (in un certo senso il sistema perde "memoria"). In definitiva, l'orizzonte temporale di pianificazione appare suddiviso in intervalli. In ciascuno di essi, c'è un primo periodo in cui viene prodotto quanto necessario a soddisfare la domanda in tutti i periodi dell'intervallo. Il valore complessivo della funzione di costo è dato dalla somma dei contributi di ciascun intervallo. È importante sottolineare ancora che tale contributo, per ciascun intervallo, dipende solamente dai dati relativi a quell'intervallo, e non da quanto accade prima o dopo.

Nel seguito, per semplicità di notazioni indicheremo con D_{jk} la domanda complessiva tra i periodi j e k (estremi inclusi), ossia

$$D_{jk} = \sum_{t=j}^{k} d_t.$$

(e dunque $D_{jj} = d_j$.) Si considerino due regeneration point $j-1$ e k senza altri regeneration point intermedi, ossia un intervallo che va da j a k, con $j \leq k$. Indichiamo allora con M_{jk} il contributo, che ora vogliamo calcolare, di tale intervallo alla funzione di costo. I costi saranno di tre tipi: set-up, produzione e immagazzinamento. Per quanto concerne i primi, dal momento che la produzione avviene solo nel periodo j, avremo

$$A_j \tag{5}$$

per i costi di produzione, tenendo conto che nel periodo j verrà prodotto quanto necessario a soddisfare la domanda da j a k, si ha

$$p_j \sum_{t=j}^{k} d_t \tag{6}$$

e infine, nel calcolare i costi di immagazzinamento, va considerato che alla fine del periodo t il livello del magazzino sarà pari al numero di unità che verranno vendute nei periodi successivi. Si ottiene quindi

$$\sum_{t=j}^{k-1} h_t D_{t+1,k}$$

e in definitiva si ha:

$$M_{jk} = A_j + p_j D_{jk} + \sum_{t=j}^{k-1} h_t D_{t+1,k} \tag{7}$$

A questo punto, il problema può essere ricondotto al calcolo di un cammino minimo su grafi aciclici. Possiamo definire un grafo $G = (N, A)$ in cui $|N| = T + 1$, e i nodi sono numerati $0, 1, 2, \ldots, T$. Esiste un arco (j, k) per ogni $j \leq k$, e il suo peso è $M_{j+1,k}$. È facile verificare che esiste una corrispondenza biunivoca tra i cammini da 0 a T su G e le foreste sulla rete R. In particolare, un cammino che usi gli archi $(0, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_r, T)$ corrisponde ad una soluzione in cui vi è produzione nei periodi $1, i_1 + 1, i_2 + 1, \ldots, i_r + 1$. Il peso del cammino coincide con il valore della funzione di costo.

2 Il modello con backlogging

Nel modello visto nel capitolo precedente, la domanda di ciascun mese è vincolata a essere soddisfatta interamente. In realtà, vi possono essere situazioni in cui questo non è vero, ossia può essere possibile soddisfare la domanda in un mese t con la produzione in mesi successivi (*backlogging*). Ovviamente, questo ha però dei costi (che tipicamente sono superiori a quelli di immagazzinamento). Noi supporremo che tali costi siano lineari rispetto alla quantità richiesta in un mese t e prodotta invece nel mese $t+1$, e indicheremo il corrispondente costo unitario con h_t^-, mentre i normali costi di immagazzinamento li indicheremo qui con h_t^+. Se invece un'unità richiesta in t viene prodotta in $q > t$, il costo è pari a $\sum_{i=t}^{q-1} h_i^-$. In definitiva, possiamo scrivere il livello del magazzino come $I_t = I_t^+ - I_t^-$, e il modello di Wagner-Whitin si generalizza quindi nel seguente modo (modello di *Zangwill*):

$$\min \sum_{t=1}^{T} (p_t x_t + h_t^+ I_t^+ + h_t^- I_t^- + A_t y_t) \tag{8}$$

$$\begin{aligned} x_t + I_{t-1}^+ + I_t^- &= I_t^+ + I_{t-1}^- + d_t & t = 1, \ldots, T \\ x_t &\leq M y_t & t = 1, \ldots, T \\ x_t, I_t^+, I_t^- &\geq 0, & t = 1, \ldots, T \end{aligned}$$

cui corrisponde la rappresentazione per mezzo di reti di flusso in figura 3.

Si noti che l'applicazione del Teorema 3 al problema in esame dà luogo a una struttura di soluzioni di base più generale di quanto avveniva nel caso precedente. Infatti, supponendo che $j-1$ e k siano due regeneration point successivi, è ancora vero che in una soluzione di base vi è un solo periodo produttivo, ma questo non è più necessariamente il primo. In altre parole, tutta la domanda da j a k può essere prodotta in uno qualunque dei periodi da j a k (vedi figura 4).

Il problema può essere risolto per mezzo dello stesso approccio già utilizzato per il caso senza backlogging, cioè in termini di problema di percorso minimo su grafi aciclici. Si tratta solo di ridefinire la quantità M_{jk}.

Siano dunque ancora $j-1$ e k due regeneration point successivi, e supponiamo che vi sia produzione nel periodo t, $j \leq t \leq k$. In questo caso, è facile verificare che il contributo alla funzione di costo è dato da

$$\mathcal{M}_{jkt} = A_t + p_t D_{jk} + \sum_{i=j}^{t-1} h_i^- D_{ji} + \sum_{i=t}^{k-1} h_i^+ D_{i+1,k}$$

e in definitiva

$$M_{jk} = \min_{j \leq t \leq k} \{\mathcal{M}_{jkt}\} \tag{9}$$

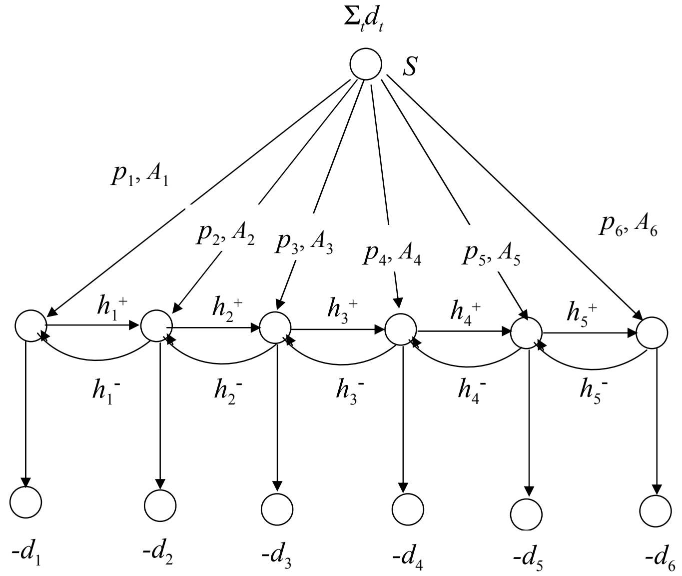

Figura 3: Rappresentazione del modello con backlogging.

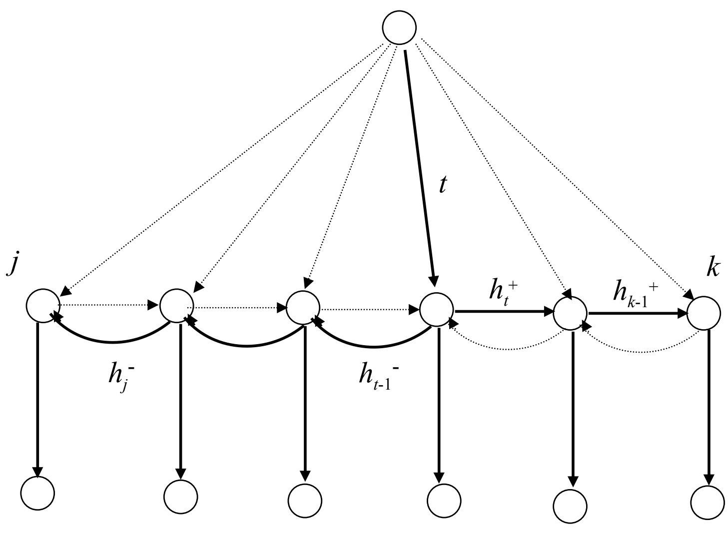

Figura 4: Struttura delle soluzioni di base (tra due regeneration point) nel modello con backlogging.

3 Capacità limitata

I modelli visti in precedenza non prevedono il fatto che la capacità produttiva in un periodo sia limitata. Nel seguito vediamo invece un'estensione del modello di Wagner-Whitin (senza backlogging) in cui in ciascun periodo la massima produzione è limitata dal valore C, ossia consideriamo il seguente modello (modello di *Florian-Klein*):

$$\min \sum_{t=1}^{T}(p(x_t) + h(I_t)) \tag{10}$$

$$\begin{aligned} x_t + I_{t-1} = {} & I_t + d_t \quad t = 1, \ldots, T \\ x_t \leq {} & C \quad t = 1, \ldots, T \\ x_t, I_t \geq {} & 0 \quad t = 1, \ldots, T \end{aligned}$$

L'approccio risolutivo è concettualmente analogo a quello visto per il modello di Wagner-Whitin. Infatti, anche nel nostro caso è possibile decomporre una soluzione in una serie di intervalli, ciascuno dei quali risulta disaccoppiato dal resto della soluzione. Supponiamo allora che j sia un regeneration point, e che k sia quello successivo. Come nei casi precedenti, il contributo alla funzione obiettivo dei periodi tra $j+1$ e k è del tutto indipendente dai periodi che precedono $j+1$ e che seguono k. Continuando a indicare con M_{jk} questo contributo, abbiamo che mentre nel caso del modello di Wagner-Whitin il valore di M_{jk} si ottiene effettuando una semplice somma (espressione (7)), e nel caso di Zangwill effettuando il minimo di $O(T)$ somme (espressione (9)), in questo caso il suo valore deriva dalla soluzione di un problema di cammino minimo. Comunque, una volta calcolati tutti i valori M_{jk}, la soluzione ottima del problema si calcola ancora per mezzo dello stesso modello di cammino minimo su grafi aciclici già visto nel caso precedente. Occorre dunque solamente specificare come vanno calcolati i contributi M_{jk}.

3.1 Struttura delle soluzioni di base

Ricordando che il nostro è un problema di costo su reti di flusso con funzione obiettivo concava, per il Teorema 3 sappiamo che possiamo limitarci a cercare la soluzione ottima tra le soluzioni di base ammissibili, le quali sono caratterizzate dal fatto che gli archi non vuoti e non saturi formano una foresta. Dunque, tali archi in ciascun blocco non potranno formare cicli. Mentre nei modelli precedenti non potevano esistere archi saturi, qui evidentemente è possibile.

Consideriamo due regeneration point consecutivi, siano essi $j-1$ e k. Essendo nullo il magazzino alla fine di $j-1$ e di k, la domanda complessiva D_{jk} in questi periodi sarà pari alla produzione complessiva in tali periodi. Da (S, U_j) a (S, U_k) ci potrà essere al più

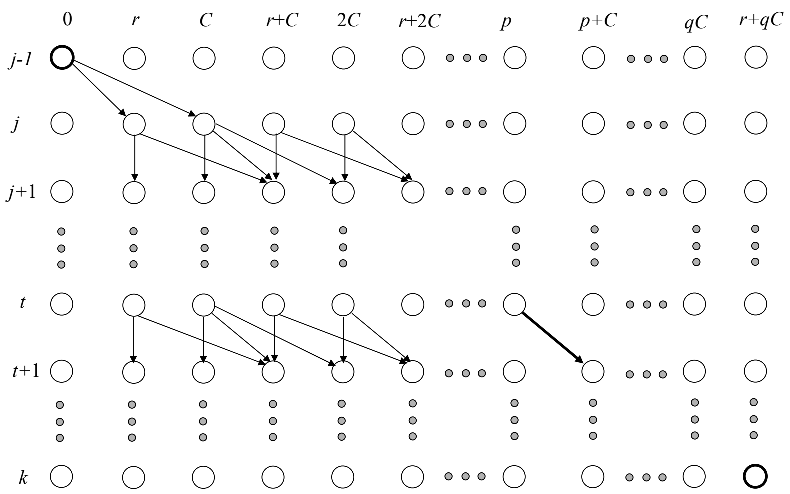

Figura 5: Grafo $\mathcal{G}$ per il calcolo di M_{jk} nel modello con capacità.

un solo arco non saturo e non vuoto, dal momento che se ne esistessero due si creerebbe sicuramente un ciclo (non orientato). Inoltre, dovendo essere tutti gli altri archi vuoti oppure saturi, in quest'unico arco-produzione con $0 < x_t < C$ scorrerà un flusso pari a $r = D_{jk} \bmod C$. Se allora esprimiamo D_{jk} come $D_{jk} = qC + r$, avremo che esattamente in q periodi la produzione è al valore massimo C, in un periodo è pari a r, e negli altri non vi è produzione. Non sappiamo però ancora in *quali* periodi la produzione è pari a $0, r$ o C.

3.2 Calcolo dei valori M_{jk}

Si consideri un grafo a griglia $\mathcal{G}_{jk}$, in cui cioè i nodi sono disposti secondo righe e colonne. Ciascuna colonna corrisponde a un possibile valore della produzione *cumulativa* da $j+1$ in poi. Ricordando che solo in un periodo la produzione può assumere il valore r, l'insieme dei possibili valori cumulativi è

$$\{0, r, C, C+r, 2C, 2C+r, \ldots, (q-1)C, (q-1)C+r, qC, qC+r = D\}$$

e dunque avremo un totale di $2(q+1)$ colonne (Figura 5). Ciascuna riga della griglia corrisponde invece a un periodo da $j-1$ a k. Indicheremo il nodo corrispondente alla riga t e alla colonna p come (t, p). Tale nodo corrisponde al fatto che nei periodi $j, j+1, \ldots, t$ si è complessivamente prodotto p.

Per quanto riguarda gli archi della griglia, essi esprimono la (eventuale) variazione nella produzione cumulativa che si ha tra la fine di un periodo e la fine del successivo. Dunque, ciascun nodo avrà alcuni archi uscenti, corrispondenti a variazioni possibili in tale produzione cumulativa. Consideriamo allora un nodo (t,p). Se p è un multiplo di C, ciò vuol dire che fino al periodo $t-1$ non si è ancora avuta la produzione di r. Di conseguenza, la produzione nel periodo t può valere $0, r$ o C. Quindi, avremo tre archi uscenti dal nodo (t,p), aventi l'altro estremo in $(t+1,p)$, $(t+1,p+r)$ e $(t+1,p+C)$ rispettivamente. Se invece $p \bmod C = r$, vuol dire che l'arco con flusso r è stato già incontrato (tra $j+1$ e $t-1$), e la produzione in t potrà essere pari solamente al valore 0 oppure C. Avremo in tal caso solo due archi uscenti, diretti dal nodo (t,p) ai nodi $(t+1,p)$ e $(t+1,p+C)$ rispettivamente (Figura 5).

Osserviamo che ciascun cammino dal nodo $(j,0)$ al nodo (k,D_{jk}) rappresenta una possibile distribuzione dei periodi con produzione $0, r$ o C. Affinché tale distribuzione sia anche *ammissibile* (ricordiamo che in questo modello *non* è consentito il backlogging), deve essere soddisfatto il vincolo che vuole che, a ogni periodo t, la produzione cumulativa sia almeno pari alla domanda cumulativa fino a quel momento, ossia

$$\sum_{i=j}^{t} x_i \geq D_{j,t}; \text{ per tutti i } t = j, \ldots, k$$

Per fare questo, è sufficiente eliminare dalla griglia tutti quei nodi (t,p) per i quali risulta $p < D_{j,t}$. A questo punto, a ciascun cammino corrisponde una soluzione di base ammissibile per il problema, limitatamente al blocco che va da j a k.

Questa rappresentazione non sarebbe di grande utilità se non fosse possibile associare a ciascun arco di $\mathcal{G}_{jk}$ il corrispondente contributo alla quantità M_{jk}. Come sappiamo, i contributi sono di tre tipi: costi fissi, costi variabili di produzione e costi di imagazzinamento. Consideriamo allora un generico arco intermedio, relativo al fatto che fino al periodo t (escluso) vi è stata una produzione cumulativa di p, e che in t viene prodotto x_t, ossia l'arco che va da (t,p) a $(t+1,p+x_t)$, dove, come abbiamo visto, x_t può valere $0, C$ oppure (una sola volta) r.

Per quanto riguarda i costi fissi e i costi variabili di produzione, essi sono pari rispettivamente a $A_t\delta_{-1}(x_t)$ e $p_t x_t$ (ove $\delta_{-1}(\cdot)$ è la funzione gradino). Nel computo dei costi di immagazzinamento dobbiamo invece considerare il livello del magazzino alla fine del mese t per effetto del fatto che la produzione fino a $t-1$ era stata di p, e che in t si è prodotto x_t. Tale quantità sarà pari a tutto ciò che è stato prodotto da j fino a t, meno, chiaramente, ciò che è stato venduto, ossia

$$I_t = p + x_t - D_{jt}$$

In definitiva, il peso dell'arco che va da (t,p) a $(t+1,p+x)$ è quindi dato da:

$$A_t\delta_{-1}(x_t) + p_t x_t + h_t(p + x_t - D_{jt})$$

e in definitiva, con questi pesi, il valore di M_{jk} è dato dal peso del cammino di peso minimo dal nodo $(j-1,0)$ al nodo (k, D_{jk}) su $\mathcal{G}_{jk}$.