Appunti sul duale del problema del massimo flusso

A. Agnetis*

Il problema del massimo flusso può essere formulato come segue:

$$\max \quad \phi_0 \tag{1}$$

$$\sum_{(s,j)\in\delta^+(s)} x_{sj} - \sum_{(i,s)\in\delta^-(s)} x_{is} = \phi_0 \tag{2}$$

$$\sum_{(t,j)\in\delta^+(t)} x_{tj} - \sum_{(i,t)\in\delta^-(t)} x_{it} = -\phi_0 \tag{3}$$

$$\sum_{(h,j)\in\delta^+(h)} x_{hj} - \sum_{(i,h)\in\delta^-(h)} x_{ih} = 0, \quad h \in V - \{s,t\} \tag{4}$$

$$x_{ij} \leq k_{ij} \quad (i,j) \in A \tag{5}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i,j) \in A \tag{6}$$

dove le variabili x_{ij} indicano il valore del flusso nell'arco (i,j) e ϕ_0 è il valore del flusso che vogliamo massimizzare. Associando ai vincoli (2),(3), (4) rispettivamente le variabili duali u_s, u_t e u_j $(j \neq s,t)$, e ai vincoli (5) le variabili y_{ij}, $(i,j) \in A$, possiamo scrivere la formulazione del problema duale:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} k_{ij} y_{ij} \tag{7}$$

$$u_i - u_j + y_{ij} \geq 0, (i,j) \in A \tag{8}$$

$$-u_s + u_t = 1 \tag{9}$$

$$y_{ij} \geq 0 \tag{10}$$

Vogliamo ora analizzare la struttura delle soluzioni di base del problema duale. Anzitutto facciamo due semplici osservazioni. La prima è che la matrice dei coefficienti del problema duale, non essendo altro che la trasposta della corrispondente matrice nel primale, è totalmente unimodulare. Dunque abbiamo la certezza che tutte le soluzioni di base saranno a coordinate intere (supponendo ovviamente interi i valori k_{ij}). La seconda osservazione è che, nel problema duale, le variabili $\{u_j\}$ non compaiono nella funzione

*Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione - Università di Siena

obiettivo, e in ciascun vincolo compare sempre la *differenza* di due di queste variabili. Dunque, l'unica cosa che interessa ai fini della minimizzazione della funzione obiettivo del duale, non è il valore assoluto di queste variabili, ma solo il loro valore relativo. In altri termini, data una qualunque soluzione ammissibile duale $\{u_j, y_{ij}\}$, sommando a tutte le variabili $\{u_j\}$ una stessa costante, si ottiene un'altra soluzione ammissibile e di uguale valore di funzione obiettivo. In definitiva, possiamo fissare arbitrariamente il valore di una di queste variabili. Per comodità, fissiamo $u_s = 0$. Poiché il vincolo (9) impone che il valore della u_t sia superiore a quello della u_s di 1, possiamo dunque limitarci a considerare soluzioni di base in cui $u_s = 0$ e $u_t = 1$, e in cui tutte le variabili hanno valori interi.

TEOREMA 1 *Data una sezione S del grafo, è possibile associare ad essa una soluzione ammissibile del problema duale così definita:*

- $u_i = 0$ *se* $i \in S$
- $u_i = 1$ *se* $i \notin S$
- $y_{ij} = 1$ *se* $(i, j) \in \delta^+(S)$
- $y_{ij} = 0$ *se* $(i, j) \notin \delta^+(S)$

Dim. Per dimostrare il risultato, basta mostrare che i vincoli del duale sono tutti soddisfatti. Preso quindi un vincolo del duale, corrispondente all'arco $(i, j) \in A$, consideriamo i quattro casi possibili.

(i) $i \in S, j \in S$. In questo caso ambedue gli estremi dell'arco (i, j) sono in S: nel vincolo (8) corrispondente si ha che $u_i = 0, u_j = 0$ e anche $y_{ij} = 0$ (dal momento che l'arco è tutto contenuto in S), e dunque il vincolo è soddisfatto all'uguaglianza.

(ii) $i \notin S, j \notin S$. In questo caso ambedue gli estremi dell'arco (i, j) non sono in S, e in (8) si ha $u_i = 1, u_j = 1$ e $y_{ij} = 0$, e dunque anche in questo caso il vincolo è soddisfatto all'uguaglianza.

(iii) $i \in S, j \notin S$. In questo caso l'arco (i, j) è uscente da S, e dunque $y_{ij} = 1$. Inoltre $u_i = 0$ e $u_j = 1$, e quindi il vincolo è ancora soddisfatto all'uguaglianza.

(iv) $i \notin S, j \in S$. In questo caso l'arco (i, j) è entrante in S, e dunque $y_{ij} = 0$, mentre $u_i = 1$ e $u_j = 0$. Il vincolo (8) è soddisfatto strettamente.

□

Il precedente teorema stabilisce dunque che a ogni sezione S si può far corrispondere una soluzione ammissibile del duale. Si noti che, poiché le uniche variabili $\{y_{ij}\}$ pari a 1 sono quelle relative agli archi uscenti da S, il valore della soluzione ammissibile è pari alla capacità della sezione S.

La cosa interessante è che è possibile stabilire anche il risultato inverso

TEOREMA 2 *Data una soluzione ammissibile $\{u_j, y_{ij}\}$ (in cui $u_s = 0$ e $u_t = 1$) di valore w, è possibile definire una sezione S tale che il valore della funzione obiettivo del duale è non superiore a w ed è pari alla capacità della sezione S.*

Dim. Si consideri una soluzione $\{u_j, y_{ij}\}$ del duale. Osserviamo anzitutto che, per ogni arco (i, j), la variabile y_{ij} compare solo in *un* vincolo (8), e dunque possiamo supporre senza perdita di generalità che il valore di y_{ij} sia pari al minimo necessario a soddisfare il corrispondente vincolo, ossia avremo

$$y_{ij} = \max\{0, u_j - u_i\}. \tag{11}$$

Infatti, valori più alti di y_{ij} porterebbero solo un peggioramento della funzione obiettivo. Inoltre, a causa della totale unimodularità della matrice dei coefficienti, in una soluzione di base ammissibile per il duale tutte le variabili sono intere. Ora, dal momento che $u_s = 0$ e $u_t = 1$, si ha che *lungo ogni cammino esistente da s a t* incontreremo sempre almeno un arco (i, j) tale che $y_{ij} > 0$, ossia $y_{ij} \geq 1$. Questo perché dal valore 0 occorrerà prima o poi "salire" almeno al valore 1, e in questo caso una variabile y_{ij}, come detto, deve assumere valore positivo. Rimuoviamo allora dal grafo tutti gli archi per i quali $y_{ij} > 0$: chiaramente t diviene non più raggiungibile da s. Sia allora S la sezione costituita da tutti i nodi raggiungibili da s una volta rimossi gli archi in questione, e indichiamo con $A(S)$ e $A(N \setminus S)$ l'insieme degli archi, rispettivamente, con ambedue gli estremi in S e ambedue gli estremi in $N \setminus S$. Chiaramente, tutti i nodi in S hanno $u_j = 0$: altrimenti, la (11) implicherebbe che $y_{ij} > 0$ per qualche arco $(h, j) \in A(S)$. Analogo discorso per i nodi in $N \setminus S$: tutti questi nodi avranno $u_j = 1$, in quanto solo così le variabili y_{ij} corrispondenti ad archi di $A(N \setminus S)$ possono essere poste a zero. Inoltre, per tutti gli archi (i, j) con $i \notin S$ e $j \in S$, la (11) dà $y_{ij} = 0$. Dunque, in definitiva, per la (11) le uniche variabili y_{ij} maggiori di 0 sono pari a 1, e sono quelle corrispondenti agli archi *uscenti* da S: questi sono gli archi lungo i quali il "potenziale" dei nodi può salire, percorrendo un cammino da s a t, dal valore 0 al valore 1. Inoltre è evidente che in questa soluzione ammissibile il valore della funzione obiettivo coincide con la capacità della sezione S individuata. $\square$

Questo teorema mostra dunque che il duale del problema del massimo flusso altri non è che il problema di individuare una sezione di capacità minima. Questo consente di inquadrare il teorema max-flow/min-cut come caso particolare del teorema della dualità forte – in effetti, si poteva anche ricavare quella proprietà in questo modo, ma l'approccio di Ford e Fulkerson fornisce in più un algoritmo risolutivo più efficiente.

Le relazioni di ortogonalità applicate a questa coppia primale-duale ci danno alcune indicazioni particolarmente interessanti. Dai vincoli (5), abbiamo che se, nella soluzione ottima del problema duale, una certa variabile $y_{ij} = 1$, il corrispondente vincolo primale dev'essere soddisfatto all'uguaglianza, e dunque si ha $x^*_{ij} = k_{ij}$. Infatti, data la sezione di capacità minima S^*, se $y_{ij} = 1$, ciò indica che $(i, j) \in \delta^+(S^*)$, ed è quindi saturo. O ancora, si consideri un vincolo (8) soddisfatto in modo stretto all'ottimo del problema duale, cioè sia $u^*_i - u^*_j + y^*_{ij} > 0$. In questo caso, la corrispondente variabile primale x^*_{ij} dev'essere nulla, il che è corretto considerando che l'unico caso in cui il vincolo (8) è soddisfatto in modo stretto corrisponde a un arco entrante in S^*, che dev'essere dunque vuoto.