Processi di cost management - Programmazione multiperiodale

Queste slide (scritte da Carlo Mannino) riguardano il problema di gestione delle attività di un progetto allorché i costi di esecuzione sono legati all'istante di inizio delle attività. Non siamo cioè nel caso in cui I costi sono legati alla durata: le durate delle attività saranno considerate fisse e note a priori. Inoltre, non supporremo presenti vincoli di risorsa. Supporremo invece che tra le attività possono sussistere relazioni di precedenza geenralizzate.

In queste slide è presentata una formulazione del problema, e la sua riduzione a un problema di minimo taglio (o sezione) su un grafo orientato, problema notoriamente semplice, risolubile ad esempio tramite l'algoritmo di Ford-Fulkerson.

Piani con costi dipendenti da start-time

- Trattiamo ora il caso in cui il costo di un'attività dipende dall'istante iniziale
- Questo è il caso, per esempio, quando le attività comportano dei flussi di cassa.

Assunzioni:

le attività sono rappresentate da un *AoN* con precedenze generalizzate $G = (V,A)$

Le relazioni di precedenza generalizzate sono normalizzate ($s_i + l_{ij} \leq s_j \quad \forall ij \in A$)

L'orizzonte temporale è $0,1,\ldots,T$.

Per ogni attività $i \in V$ e ogni istante $t \in \{0,1,\ldots,T\}$, si indica con

w_{it} il costo di iniziare l'attività i all'istante t.

L'obiettivo è determinare un piano che minimizzi la somma dei costi.

Il problema può essere formulato come problema di programmazione lineare 0,1

Formulazione multiperiodale

Il problema della scelta del piano in presenza di costi dipendenti dall'istante di attivazione può essere formulato come problema di programmazione 0,1

Variabili

- $\forall\, i \in V$ e $t \in \{0, \ldots, T\}$ definiamo una variabile binaria x_{it}

$$x_{it} = \begin{cases} 1 & \text{se l'attività } i \text{ comincia nel periodo } t \ (s_i = t) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vincoli

- L'attività i *comincia* in un singolo istante di tempo

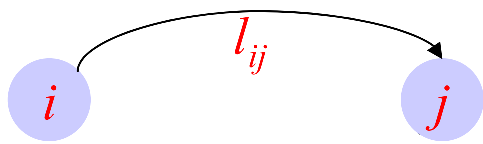
$$\sum_{t=0}^{T} x_{it} = 1 \qquad \forall i \in V \qquad [5.1]$$

- Per ogni attività i si può calcolare un EST_i e un LST_i

$$x_{it} = 0 \qquad \forall i \in V, t \leq EST_i - 1 \qquad\qquad x_{it} = 0 \qquad \forall i \in V, t \geq LST_i + 1$$

- Se esiste l'arco (i,j) di peso l_{ij} e l'attività i comincia all'istante t, l'attività j non può cominciare prima di $t + l_{ij}$.

$$x_{it} + \sum_{q=0}^{t+l_{ij}-1} x_{jq} \leq 1 \qquad \forall ij \in E, \forall t \in T \qquad [5.2]$$



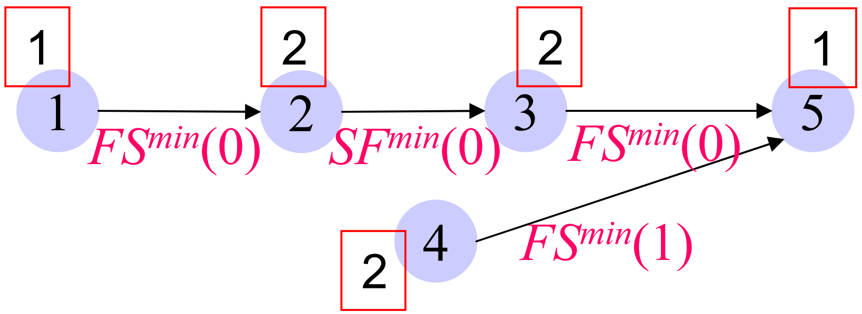
Riassumendo la formulazione

$$
\begin{cases}
\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=0}^{T} w_{it} x_{it} \\[2ex]
\sum_{t=0}^{T} x_{it} = 1 \qquad \forall i \in V \qquad [5.1] \\[2ex]
x_{it} + \sum_{q=0}^{t+l_{ij}-1} x_{jq} \leq 1 \qquad \forall ij \in E, \forall t \in T \qquad [5.2] \\[2ex]
x_{it} = 0 \qquad \forall i \in V, t \leq EST_i - 1 \\
x_{it} = 0 \qquad \forall i \in V, t \geq LST_i + 1 \\[2ex]
x_{it} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in V, t = 0,\dots,T
\end{cases}
$$

OSS. Le variabili fissate a 0 possono essere direttamente eliminate dai vincoli in cui sono presenti e dalla f.o. Quindi, non serve introdurle.

Questa formulazione può essere rafforzata con semplici considerazioni.

Esempio



$l_{ji} = -SS_{ij}^{max}$

$l_{ij} = SF_{ij}^{min} - d_j$

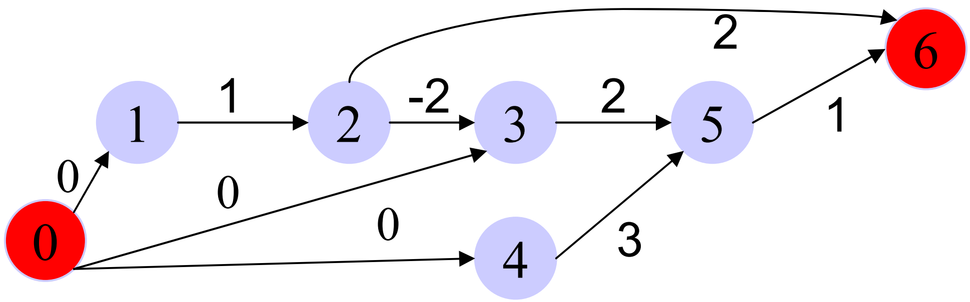
$l_{ij} = d_j - SF_{ij}^{max}$

$l_{ij} = d_i + FS_{ij}^{min}$

$l_{ji} = -d_i - FS_{ij}^{max}$

$l_{ij} = d_i - d_i + FF_{ij}^{min}$

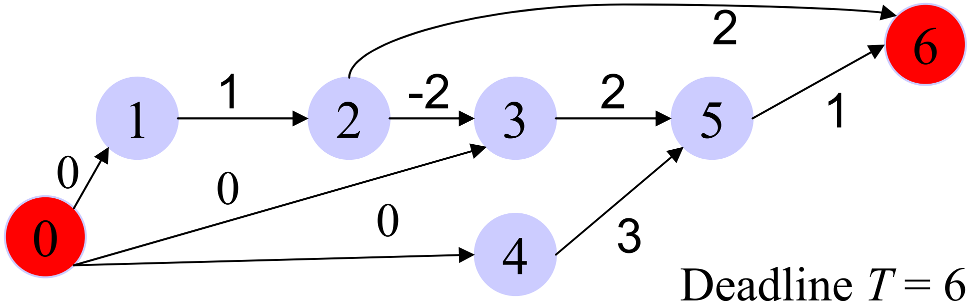
$l_{ji} = d_j - d_i - FF_{ij}^{max}$



Fissiamo la deadline $T = 6$

j	durata	EST	LST
1	1	0	3
2	1	1	4
3	2	0	3
4	2	0	2
5	1	3	5

Esempio



Deadline $T = 6$

j	durata	EST	LST
1	1	0	3
2	1	1	4
3	2	0	3
4	2	0	2
5	1	3	5
6	0	5	6

Soluzione ammissibile

$x_{10} = x_{23} = x_{30} = x_{40} = x_{53} = 1$

Costi w

j\t	0	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5		
2		5	3	4	4	
3	4	3	4	1		
4	5	2	1			
5				1	3	7

Costo soluzione: $2 + 4 + 4 + 5 + 1 = 16$

OSS. Il problema di programmazione 0,1 è difficile

Tuttavia il nostro problema può essere risolto efficientemente mediante opportuna rappresentazione

Tagli nel grafo

<u>Dato</u> un grafo orientato $H=(W,A)$

due nodi speciali $a,b \in W$

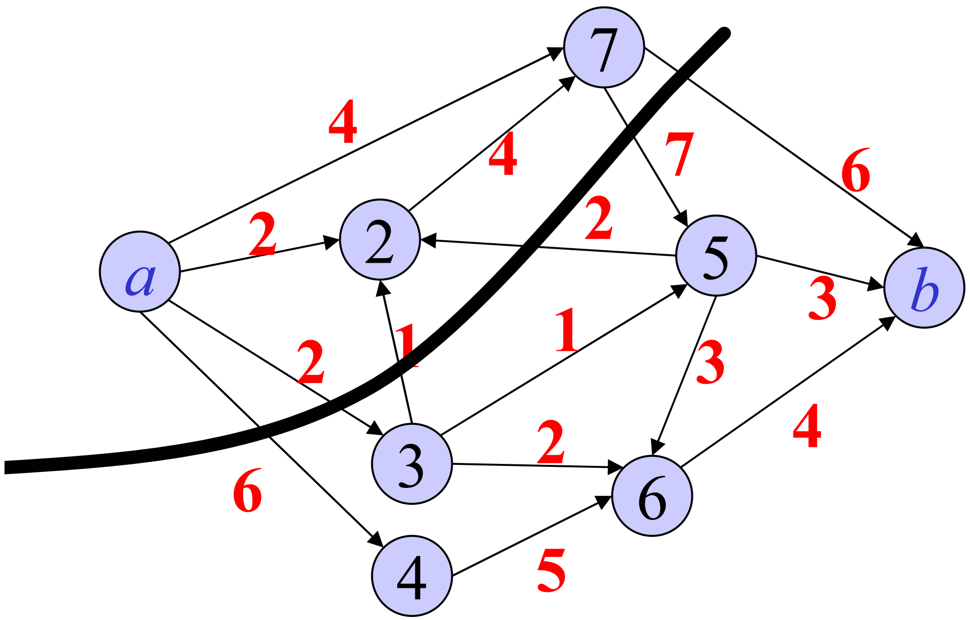
Def. *Taglio a-b*: partizione dell'insieme W in due insiemi Q e R con $a \in Q$ e $b \in Q$

Def. *Capacità* dell'arco $uv \in A$: reale non negativo c_{uv}

Def. *Capacità* del *taglio a-b* $c(Q, R)$: somma delle capacità degli archi uscenti da nodi in Q ed entranti in nodi in R.

$$c(Q,R) = \sum_{u \in Q, v \in R} c_{uv}$$

Esempio di Taglio



$$Q = \{a, 2, 7\} \qquad R = \{b, 3, 4, 5, 6\}$$

$$c(Q,R) = c_{a3} + c_{a4} + c_{76} + c_{7b} = 21$$

PROBLEMA del minimo taglio *a-b:* trovare un taglio *a-b* (*Q*, *R*) di capacità minima

• Equivalente al problema del massimo flusso inviabile da *a* a *b*.

Trasformazione in min-cut

- In primo luogo si costruisce un grafo orientato $H = (W, A)$ con capacità c_a per $a \in A$.

  - Per ogni $i \in V$, sia $W_i = \{v_{it}: EST_i \leq t \leq LST_i + 1\}$ ovvero, per ogni attività i c'è un nodo per ogni possibile istante iniziale + un nodo finale.

  Insieme dei nodi $W = \cup_i W_i \cup \{a, b\}$, ovvero tutti i nodi associati alle attività, più due nodi fittizi che saranno sorgente e pozzo del grafo.

- Archi A: unione di tre insiemi di archi

  archi di assegnamento: $\{(v_{it}, v_{it+1}): i \in V, v_{it}, v_{it+1} \in W_i\}$: quindi ogni attività definisce un cammino $(v_{i,EST(i)}, v_{i,EST(i)+1}), \ldots, (v_{i,LST(i)}, v_{i,LST(i)+1})$

  archi di temporali: $\{(v_{it}, v_{jt+l(i,j)}): v_{it} \in W_i\ v_{jt+l(i,j)} \in W_j\}$ sono gli archi che rappresentano le relazioni temporali fra attività

  archi fittizi:

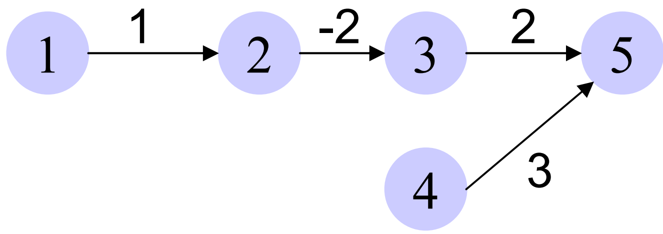
  $\{(a, v_{i,EST(i)}): i \in V\}$ un arco dalla sorgente a al primo nodo del cammino associato all'attività i

  $\{(v_{i,LST(i)+1}, b): i \in V\}$ un arco dall'ultimo nodo del cammino associato all'attività i al pozzo b

  - Capacità: capacità degli archi assegnamento (v_{it}, v_{it+1}) pari a w_{it}. Tutte le altre capacità pari a $+\infty$.

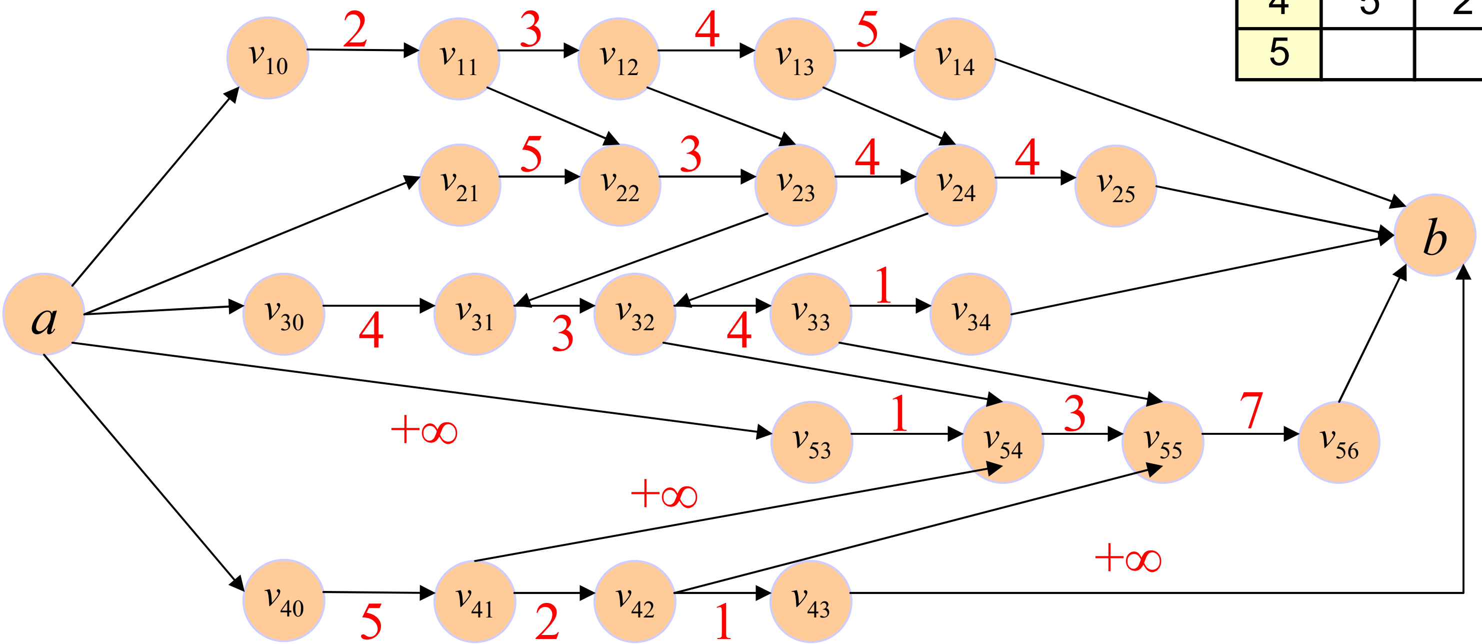
Esempio di grafo orientato

j	durata	EST	LST
1	1	0	3
2	1	1	4
3	2	0	3
4	2	0	2
5	1	3	5
6	0	5	6



w

j\t	0	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5		
2		5	3	4	4	
3	4	3	4	1		
4	5	2	1			
5				1	3	7



OSS. Possono essere omessi gli archi temporali entranti nel primo nodo e uscenti dall’ultimo nodo di ogni attività.

Equivalenza piani/tagli

Lemma 1. Ogni soluzione ammissibile $\bar{x}$ di costo pari a $w^T\bar{x}$ corrisponde a un taglio (Q, R) nel grafo H di capacità pari a $c(Q,R) = w^T\bar{x}$.

Dim. Per ogni attività $i \in V$ esiste un solo $t(i) \in T$ per cui $\bar{x}_{it(i)} = 1 \quad (\bar{s}_i = t(i))$

Poni $Q = \{v_{it}: i \in V, t \leq \bar{s}_i\}$, $R = W\text{-}Q$.

Quali archi attraversano il taglio da Q a R?

- Gli i archi (di assegnamento) da $v_{it(i)}$ a $v_{it(i)+1}$ di capacità pari a $w_{it(i)}$. La capacità complessiva di questi archi è proprio pari a $w^T\bar{x} = w_{1\bar{s}_1} + w_{2\bar{s}_2} + \ldots + w_{n\bar{s}_n}$

- Nessun altro arco.

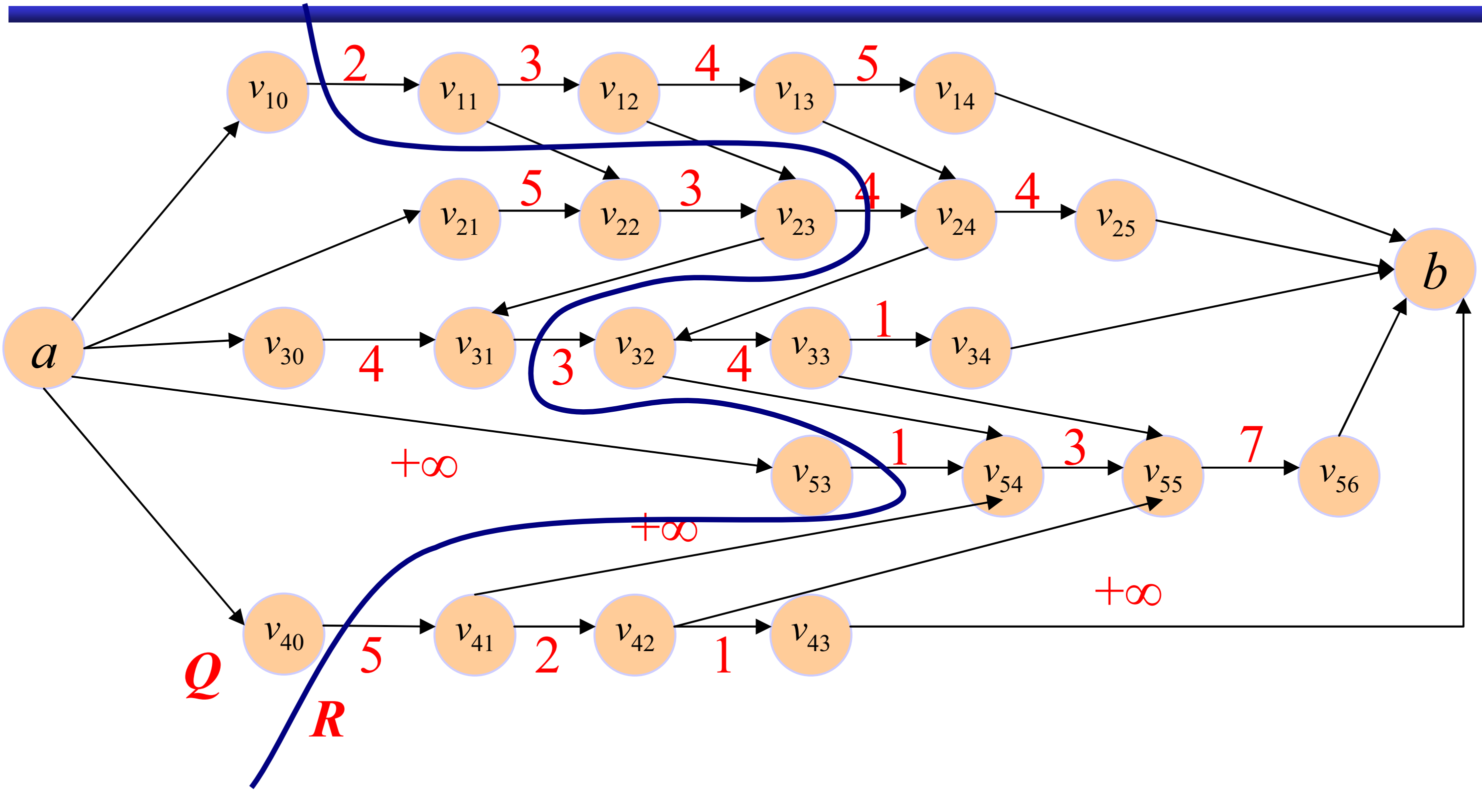
- Da [5.1], per ogni attività un solo arco di <u>assegnamento</u> attraversa il taglio.
- Per assurdo, se un arco <u>temporale</u> $(v_{iq}\, v_{jp})$ attraversa il taglio:
  a. Poiché c'è un arco $(v_{iq}\, v_{jp})$, esiste un vincolo $s_j - s_i \geq l_{ij} = p - q$.
  b. Poiché $(v_{iq}\, v_{jp})$ attraversa da Q a R, $v_{iq} \in Q$, e $v_{jp} \in R$
  c. $v_{iq} \in Q$, implica $\bar{s}_i \geq q$. $v_{jp} \in R$ implica $\bar{s}_j < p \quad \Rightarrow \bar{s}_j - \bar{s}_i < p - q$. contrad.

- Grazie a [5.1], per ogni attività i esiste $v_{it} \in Q$ con $EST(i) \leq t \leq LST(i)$ mentre si ha sempre $v_{i,LST(i)+1} \in R$.

$$\sum_{t=0}^{T} x_{it} = 1 \qquad \forall i \in V$$

[5.1]

Esempio di grafo orientato



Soluzione ammissibile $x_{10} = x_{23} = x_{31} = x_{40} = x_{53} = 1 \Rightarrow s_1 = s_3 = s_4 = 0,\ s_2 = 3,\ s_5 = 3$

Equivalenza tagli/piani

Lemma 2. Sia (Q, R) un taglio di capacità finita nel grafo H. Allora esiste una soluzione x' di costo $w^T x' \leq c(Q,R)$.

La dimostrazione costruttiva viene omessa. La costruzione consiste nel definire una soluzione x associata al taglio ponendo $x_{it} = 1$ se v_{it} è l'ultimo nodo associato ad i in Q (ovvero se esiste $v_{ir} \neq v_{it}$ in Q, allora sarà $r < t$).

Dai due lemmi precedenti si ricava:

Teorema. Sia (Q^*, R^*) un taglio di capacità minima nel grafo H e sia x^* una soluzione ottima di P. Allora $w^T x^* = c(Q^*,R^*)$.

- P può essere risolto utilizzando un algoritmo che calcola un taglio a capacità minima fra a e b in H.

- Il taglio a capacità minima può essere calcolato utilizzando l'algoritmo di Ford e Fulkerson per il flusso massimo da a a b. (capacità del taglio minimo = valore del flusso massimo).