# Esercizi di ottimizzazione vincolata

A. Agnetis, P. Detti*

## Esercizi svolti

### 1

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata

$$\begin{aligned} &\max x_1 + x_2 \\ x_1 - 4x_2 &\geq -3 \\ -x_1 + x_2^2 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

studiare l'esistenza di punti di massimo.

**Soluzione**. Studiamo il problema nella forma:

$$\min -x_1 - x_2$$

$$g_1(x) = 3 + x_1 - 4x_2 \geq 0 \quad (1)$$

$$g_2(x) = -x_1 + x_2^2 \geq 0 \quad (2)$$

$$g_3(x) = x_1 \geq 0 \quad (3)$$

La regione ammissibile del problema è costituita dalla regione al di sotto della retta $g_1$ ed esterna alla parabola $g_2$ (Fig.1). Notare che tale regione è illimitata e non convessa. Le condizioni di KKT sono quindi condizioni necessarie di minimo locale.

I gradienti dei vincoli, che serviranno per verificare la condizione di qualificazione dei vincoli attivi, sono:

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \quad \nabla g_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche - Università di Siena

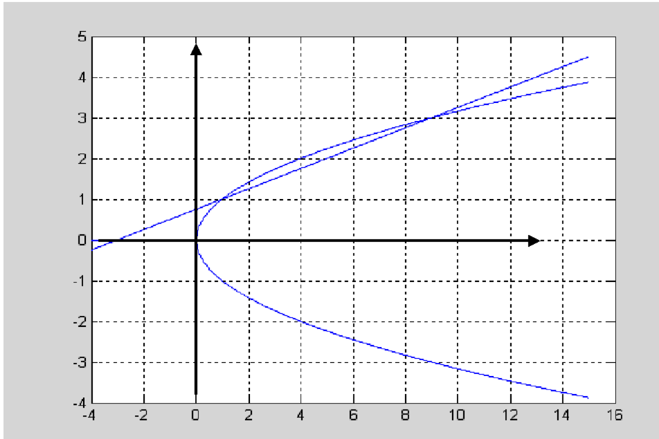


Figura 1: Regione ammissibile dell'esercizio 1.

La funzione Lagrangiana è:

$$L(x, \lambda) = -x_1 - x_2 - \lambda_1(3 + x_1 - 4x_2) - \lambda_2(-x_1 + x_2^2) - x_1\lambda_3$$

Imponiamo le condizioni di KKT:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 + 4\lambda_1 - 2x_2\lambda_2 & = & 0 \\
3 + x_1 - 4x_2 & \geq & 0 \\
-x_1 + x_2^2 & \geq & 0 \\
x_1 & \geq & 0 \\
3\lambda_1 + x_1\lambda_1 - 4x_2\lambda_1 & = & 0 \\
-x_1\lambda_2 + x_2^2\lambda_2 & = & 0 \\
x_1\lambda_3 & = & 0 \\
\lambda_1 & \geq & 0 \\
\lambda_2 & \geq & 0 \\
\lambda_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Consideriamo i seguenti casi.

**Caso 1**

Nessun vincolo è attivo ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$). La regione ammissibile è un insieme aperto costituito dai punti del primo e del quarto quadrante al di sotto della retta ed esterni alla parabola. Poiché in questo caso nessun vincolo è attivo, la condizione di qualificazione è banalmente soddisfatta.

La prima condizione delle KKT diventa

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 = 0$$

ed il sistema quindi non ha soluzione.

**Caso 2**

Il solo vincolo attivo è il vincolo (1) ($\lambda_2 = \lambda_3 = 0$). Poiché $\nabla g_1 \neq 0$, non ci sono punti che non soddisfano la condizione di qualificazione dei vincoli attivi.

La prima condizione diventa

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 - \lambda_1 = 0$$

ed il sistema anche in questo caso non ha soluzione ($\lambda_1 < 0$).

**Caso 3**

Il solo vincolo attivo è il vincolo (2) ($\lambda_1 = \lambda_3 = 0$). Poiché $\nabla g_2 \neq 0$ anche in questo caso, non ci sono punti che non soddisfano la condizione di qualificazione dei vincoli attivi.

Si ha

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 - 2x_2\lambda_2 & = & 0 \\ -x_1 + x_2^2 & = & 0 \end{array}$$

dalle prime due condizioni si ottiene $\lambda_2 = 1$ e $x_2 = -1/2$, e dalla terza $x_1 = 1/4$. Il punto ammissibile trovato è quindi $(1/4, -1/2)$, a cui corrisponde un valore della funzione obiettivo pari a $1/4$.

**Caso 4**

Il solo vincolo attivo è il vincolo (3) ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). Poiché $\nabla g_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0$, non esistono punti che non soddisfano la condizione di qualificazione dei vincoli attivi.

La prima condizione delle KKT diventa

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 - \lambda_3 = 0$$

ed il sistema quindi non ha soluzione ($\lambda_3 < 0$).

**Caso 5**

Sono attivi i vincoli (1) e (2) ($\lambda_3 = 0$). La regione in questo caso è costituita dai punti $A = (1, 1)$ e $B = (9, 3)$. Controlliamo la condizione di qualificazione dei vincoli. I gradienti dei vincoli attivi nel punto $A$

$$\nabla g_1(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2(A) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti, e quindi vale la condizione di qualificazione dei vincoli attivi.

Le condizioni di KKT diventano:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 - \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 + 4\lambda_1 - 2\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & \geq & 0 \\ \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

da cui $\lambda_1 = 3/2$ e $\lambda_2 = 5/2$. Il punto $A$ è un candidato di minimo locale. In tale punto la funzione obiettivo vale $-2$.
Consideriamo il punto $B$. I gradienti dei vincoli attivi

$$\nabla g_1(B) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2(B) = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti, e quindi vale la condizione di qualificazione dei vincoli attivi.
Dalle prime due condizioni di KKT calcolate in $B$ si ottiene $\lambda_2 < 0$ e quindi il sistema non ammette soluzione.

**Caso 6**

Sono attivi i vincoli (1) e (3) ($\lambda_2 = 0$). La regione in questo caso è costituita dal punto $C = (0, 3/4)$. I gradienti dei vincoli attivi

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \nabla g_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti, e quindi vale la condizione di qualificazione dei vincoli attivi.

Le prime due condizioni diventano

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 - \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 + 4\lambda_1 = 0$$

da cui $\lambda_1 = 1/4$ e $\lambda_3 = -5/4 < 0$. Il sistema non ammette quindi soluzione.

**Caso 7**

Sono attivi i vincoli (2) e (3) ($\lambda_1 = 0$). La regione in questo caso è costituita dal punto $B = (0, 0)$. I gradienti dei vincoli attivi

$$\nabla g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla g_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sono ovviamente linearmente *dipendenti*, e quindi la condizione di qualificazione dei vincoli attivi non è soddisfatta. Nel punto $(0, 0)$ non possiamo applicare le condizioni di KKT. Non si può quindi escludere che il punto $B$ sia un minimo locale.

**Caso 8**

Sono attivi tutti i vincoli. La regione ammissibile in questo caso è vuota.

I punti candidati di minimo locale sono quindi $(1/4, -1/2)$ e $A = (1, 1)$, che soddisfano sia le condizioni di KKT sia la condizione di qualificazione, ed il punto $(0, 0)$ che non soddisfa la condizione di qualificazione.

## 2

Dato l'insieme di punti descritto dalle seguenti disequazioni

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\geq -1 \\ -x_1 + x_2^2 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

verificare che il punto $(1,1)$ non soddisfa le condizioni di qualificazione.

**Soluzione**. Consideriamo le disequazioni nella forma:

$$\begin{aligned} g_1(x) = 1 + x_1 - 2x_2 &\geq 0 \\ g_2(x) = -x_1 + x_2^2 &\geq 0 \\ g_3(x) = x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

La regione ammissibile consiste nella regione del primo e quarto quadrante al di sotto della retta $1 + x_1 - 2x_2$ ed esterna alla parabola $-x_1 + x_2^2$.

Nel punto $A = (1,1)$ sono attivi i vincoli $g_1(x)$ e $g_2(x)$. Controlliamo la condizione di

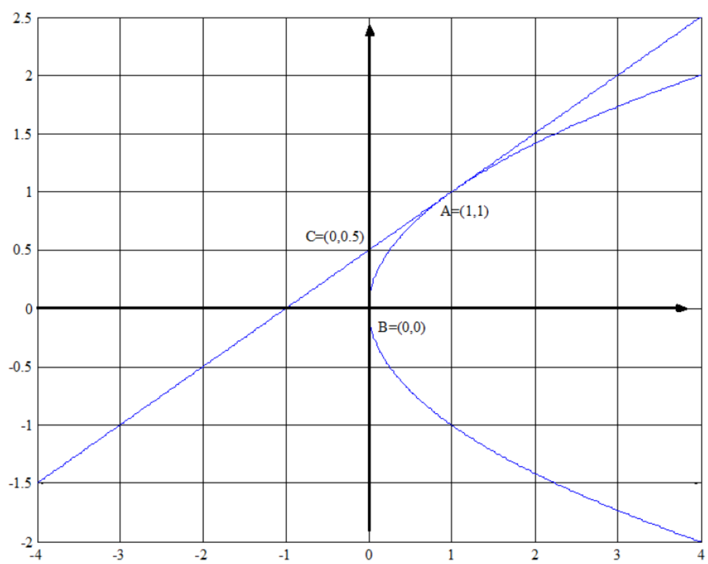


Figura 2: Regione ammissibile dell'esercizio 2.

qualificazione dei vincoli. Si ha

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

I due vettori sono linearmente dipendenti e quindi la condizione di qualificazione dei vincoli non è soddisfatta. Notare, infatti, che in $A$ le due curve sono tangenti, e quindi i vettori gradiente relativi ai due vincoli sono paralleli.

# 3

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata

$$\begin{aligned} \min x_1^2 + 3x_2^2 & \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 &\geq 1 \\ g_2(x) = x_2^2 &\geq 1/4 \end{aligned} \tag{4}$$

studiare l'esistenza di punti di minimo.

**Soluzione**. Studiamo il problema nella forma:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 + 3x_2^2 & \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 &\geq 0 \\ g_2(x) = 4x_2^2 - 1 &\geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

La funzione Lagrangiana è:

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + 3x_2^2 - \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) - \lambda_2(4x_2^2 - 1)$$

Imponiamo le condizioni di KKT:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_1\lambda_1 & = & 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 6x_2 - 2\lambda_1 x_2 - 8\lambda_2 x_2 & = & 0 \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 & \geq & 0 \\ g_2(x) = 4x_2^2 - 1 & \geq & 0 \\ \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) & = & 0 \\ \lambda_2(4x_2^2 - 1) & = & 0 \\ \lambda_1 & \geq & 0 \\ \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

La regione ammissibile del problema è costituita dalla intersezione della regione esterna alla circonferenza $g_1$ con i due semipiani $x_2 \geq 1/2$ e $x_2 \leq -1/2$. L'insieme ammissibile non è convesso e quindi le condizioni di KKT sono condizioni necessarie di ottimo locale per i punti che soddisfano la condizione di qualificazione.

I gradienti dei vincoli, che serviranno per verificare la condizione di qualificazione, sono:

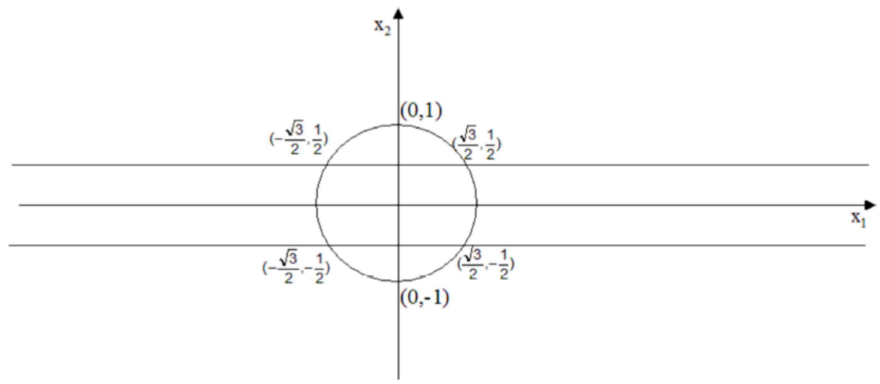


Figura 3: Regione ammissibile dell'esercizio 3.

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$

Consideriamo i seguenti casi.

**Caso 1**

Nessun vincolo è attivo ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). Dalle prime due condizioni di KKT si ottiene il punto $(0, 0)$ che non appartiene alla regione ammissibile.

**Caso 2**

È attivo il vincolo $g_1(x)$ ($\lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 = 0$).

In questo caso, non ci sono punti ammissibili che non soddisfano la condizione di qualificazione dei vincoli attivi. Infatti, $\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$ si annulla solo nell'origine, non appartenente alla regione ammissibile.

Le prime due condizioni di KKT diventano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2x_1\lambda_1 &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 6x_2 - 2\lambda_1 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Notare che nell'insieme ammissibile si ha sempre $x_2 \neq 0$. La seconda equazione può essere quindi divisa per $x_2$ ottenendo $\lambda_1 = 3$.

Consideriamo i due sottocasi: $x_1 = 0$ e $x_1 \neq 0$.

Per $x_1 = 0$, dal primo vincolo si ottiene $x_2 = 1$ e $x_2 = -1$. I punti trovati sono quindi $(0, 1)$, $(0, -1)$. La funzione obiettivo in entrambi i punti assume valore 3.

Per $x_1 \neq 0$, dalle prime due condizioni di KKT si ottiene rispettivamente $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_1 = 3$, e quindi il sistema non ammette soluzione.

**Caso 3**

È attivo il vincolo $g_2(x)$ ($\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 > 0$).

In questo caso, non ci sono punti ammissibili che non soddisfano la condizione di qualificazione dei vincoli attivi. Infatti, $\nabla g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8x_2 \end{bmatrix}$ si annulla solo nei punti dell'asse delle

ascisse, che non appartengono alla regione ammissibile.
Imponendo le KKT, si ottengono i punti $(0, 1/2)$, $(0, -1/2)$ che non sono ammissibili.
**Caso 4**
Entrambi i vincoli sono attivi ($\lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 > 0$). La regione ammissibile è costituita in questo caso dai quattro punti d'intersezione della circonferenza con le due rette $x_2 = 1/2$ e $x_2 = -1/2$: $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

È facile verificare che in tutti e quattro i punti la condizione di qualificazione è soddisfatta ($\nabla g_1$ e $\nabla g_2$ sono linearmente indipendenti).
In tutti e quattro i punti, dalle prime due condizioni di KKT, si ottengono i moltiplicatori: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1/2$. Controlliamo la condizione di qualificazione dei vincoli attivi. Si ha la matrice

$$\frac{dg}{dx} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 0 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

che nei punti trovati ha sempre rango 2. In tutti i punti la funzione obiettivo vale sempre 3/2.
I punti candidati ad essere dei minimi locali sono quelli trovati nei Casi 2 e 4.

# 4

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min -x_1 - x_2^2 & \\ 2x_1^2 + x_2^2 &\leq 7 \\ x_1^2 + x_2^2 &\geq 2 \end{aligned}$$

*a*) Vi sono punti in cui la condizione di qualificazione dei vincoli attivi non è soddisfatta? Motivare la risposta.

*b*) Si individuino i punti che soddisfano le condizioni necessarie di ottimo del primo ordine (KKT). Siete in grado di indicare il punto di minimo globale?

**Soluzione**. Il problema può essere formulato nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \min -x_1 - x_2^2 & \\ g_1(x) = -2x_1^2 - x_2^2 + 7 &\geq 0 \\ g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 &\geq 0 \end{aligned}$$

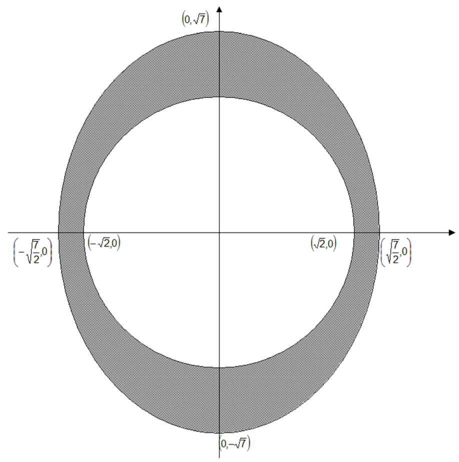


Figura 4: Regione ammissibile dell'esercizio 4.

L'insieme ammissibile del problema è dato dall'intersezione della parte interna all'ellisse, corrispondente al primo vincolo, con quella interna alla circonferenza descritta dal secondo vincolo. Tale insieme non è convesso. Per quanto riguarda la condizione di qualificazione dei vincoli attivi, si noti che non esistono punti in cui entrambi vincoli sono attivi. I gradienti dei due vincoli, inoltre, si annullano solo nell'origine che non appartiene alla regione ammissibile. La condizione di qualificazione dei vincoli attivi è, quindi, sempre soddisfatta.

Troviamo i punti che soddisfano le condizioni di KKT. La funzione Lagrangiana è:

$$L(x, \lambda) = -x_1 - x_2^2 - \lambda_1(-2x_1^2 - x_2^2 + 7) - \lambda_2(x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

Imponiamo le condizioni di KKT:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 + 4x_1\lambda_1 - 2x_1\lambda_2 & = & 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 + 2x_2\lambda_1 - 2x_2\lambda_2 & = & 0 \\
g_1(x) = -2x_1^2 - x_2^2 + 7 & \geq & 0 \\
g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2 & \geq & 0 \\
\lambda_1(-2x_1^2 - x_2^2 + 7) & = & 0 \\
\lambda_2(x_1^2 + x_2^2 - 2) & = & 0 \\
\lambda_1 & \geq & 0 \\
\lambda_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Consideriamo i seguenti quattro casi.

**Caso 1**

Entrambi i vincoli non sono attivi ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$)

Dalla prima condizione si ottiene

$$-1 = 0$$

ed è quindi impossibile.

**Caso 2**

Entrambi i vincoli sono attivi.

In questo caso non esistono punti ammissibili dato che ellisse e circonferenza non hanno punti in comune.

**Caso 3**

Il solo vincolo attivo è $g_1(x)$ ($\lambda_2 = 0$).

Notare che in questo caso, non ci sono punti ammissibili che non soddisfano la condizione di qualificazione dei vincoli attivi. Infatti, si ha $\nabla g_1 = \begin{bmatrix} -4x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix}$ che si annulla solo nell'origine, non appartenente alla regione ammissibile.

Applichiamo le condizioni KKT. Si ha il sistema:

$$\begin{array}{lcl} -1 + 4x_1\lambda_1 & = & 0 \\ -2x_2 + 2x_2\lambda_1 & = & 0 \\ -2x_1^2 - x_2^2 + 7 & = & 0 \\ \lambda_1 & \geq & 0 \end{array}$$

Dalla seconda equazione derivano i due seguenti sotto casi: *i*) $x_2 = 0$; *ii*) $x_2 \neq 0$.

*i*)

Dalla terza equazione, si ottengono i punti $A(\sqrt{\frac{7}{2}}, 0)$ e $B(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0)$, di cui solo $A$ soddisfa la condizione di non negatività su $\lambda_1$.

*ii*)

Poiché $x_2 \neq 0$ si può dividere la seconda equazione per $x_2$ ottenendo $\lambda_1 = 1$. Dalla prima equazione si ottiene $x_1 = \frac{1}{4}$ e dalla terza $x_2 = \pm\sqrt{\frac{55}{8}}$. I punti sono quindi $C(\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{55}{8}})$ e $D(\frac{1}{4}, -\sqrt{\frac{55}{8}})$.

**Caso 4**

Il solo vincolo attivo è $g_2(x)$ ($\lambda_1 = 0$).

Anche in questo caso, non ci sono punti ammissibili che non soddisfano la condizione di qualificazione dei vincoli attivi. Infatti, $\nabla g_2 = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$ che si annulla solo nell'origine, non appartenente alla regione ammissibile.

Si ha il sistema:

$$\begin{array}{lcl} -1 - 2x_1\lambda_2 & = & 0 \\ -2x_2 - 2x_2\lambda_2 & = & 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2 & = & 0 \\ \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Possiamo considerare i due seguenti sotto casi: *iii*) $x_2 = 0$; *iv*) $x_2 \neq 0$.

*iii*)

L'unico punto che soddisfa il sistema è $E(-\sqrt{2}, 0)$.

*iv)*
Dalla prima equazione si ha $\lambda_2 = -1$ che non soddisfa la quarta equazione.

Poiché l'insieme ammissibile è chiuso e limitato esiste almeno un minimo globale. Tra quelli che soddisfano le condizioni necessarie di minimo, i punti che minimizzano la funzione obiettivo sono $C$ e $D$.

# 5

Determinare il punto di intersezione dei piani

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 9 \qquad x_1 + 2x_2 = 3$$

più vicino al punto di coordinate $(3, -1, 2)$.

**Soluzione**. Il problema può essere formulato come problema di ottimizzazione vincolata in cui l'obiettivo è quello di minimizzare il quadrato della distanza tra il punto cercato e $(3, -1, 2)$:

$$\begin{aligned}
&\min (x_1 - 3)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 2)^2 \\
&\qquad h_1(x) = 9 - 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\
&\qquad h_2(x) = 3 - x_1 - 2x_2 = 0
\end{aligned}$$

Notare che la funzione obiettivo è coerciva, convessa, con derivate parziali continue, e che i vincoli sono lineari. Le condizioni di *Karush Kuhn Tucker* (KKT) sono quindi condizioni necessarie e sufficienti di ottimo globale anche nei punti che *non* soddisfano la condizione di qualificazione (per la linearità dei vincoli).
Applichiamo le condizioni di KKT per determinare i punti che soddisfano le condizioni di ottimalità del primo ordine. La funzione Lagrangiana è:

$$L(x, \lambda) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 2)^2 - \lambda_1(9 - 3x_1 + 2x_2 - 4x_3) - \lambda_2(3 - x_1 - 2x_2)$$

I vincoli sono tutti di uguaglianza. Imponendo le condizioni di KKT si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 3) + 3\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 + 1) - 2\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2(x_3 - 2) + 4\lambda_1 &= 0 \\
3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 9 \\
x_1 + 2x_2 &= 3
\end{aligned}$$

Dall'ultima equazione si ottiene $x_1 = 3 - 2x_2$. La sostituzione di $x_1$ nella penultima equazione porta a $x_3 = 2x_2$. Il sistema, ridotto alle sole variabili $x_2$, $\lambda_1$ e $\lambda_2$, diventa:

$$\begin{array}{rcr} 4x_2 - 3\lambda_1 - \lambda_2 & = & 0 \\ -2x_2 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 & = & 2 \\ -4x_2 - 4\lambda_1 & = & -4 \end{array}$$

da cui si ottiene $\lambda_1 = \frac{2}{3}$, $\lambda_2 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, e
$x_1 = 3 - 2x_2 = \frac{7}{3}$, $x_3 = 2x_2 = \frac{2}{3}$. Il punto che soddisfa le condizioni del primo ordine è $\hat{x} = (\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. In tale punto la funzione obiettivo vale 4. Il punto $\hat{x}$ è quindi un punto di minimo globale.

# 6

Determinare il punto della regione definita dai vincoli

$$x_1 + x_2 \leq 2 \qquad x_1^2 \leq 4$$

più vicino al punto di coordinate $(2, 3)$.

**Soluzione**. Il problema può essere formulato come problema di ottimizzazione vincolata nel modo seguente:

$$\begin{array}{l} \min (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ \qquad g_1(x) = 2 - x_1 - x_2 \ \geq \ 0 \\ \qquad\qquad g_2(x) = 4 - x_1^2 \ \geq \ 0 \end{array}$$

La regione ammissibile è quella compresa tra le due rette $x_1 = 2$, $x_1 = -2$, ed al di sotto della retta $x_1 + x_2 - 2 = 0$.

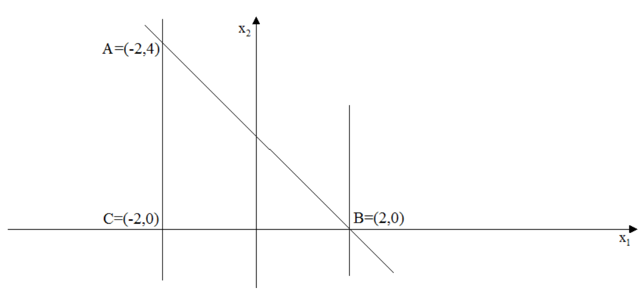


Figura 5: Regione ammissibile dell'esercizio 6.

Notare che la funzione obiettivo è coerciva, convessa con derivate parziali continue, e che la regione ammissibile è convessa. I vincoli hanno inoltre derivate parziali continue

ovunque. Le condizioni di KKT sono quindi condizioni necessarie e sufficienti di ottimo globale per i punti che soddisfano la condizione di qualificazione.
I gradienti dei vincoli, che serviranno per verificare la condizione di qualificazione, sono:

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La funzione Lagrangiana è:

$$L(x, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - \lambda_1(2 - x_1 - x_2) - \lambda_2(4 - x_1^2)$$

Imponiamo le condizioni di KKT:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) + \lambda_1 + 2x_1\lambda_2 & = & 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 3) + \lambda_1 & = & 0 \\ 2 - x_1 - x_2 & \geq & 0 \\ 4 - x_1^2 & \geq & 0 \\ 2\lambda_1 - x_1\lambda_1 - x_2\lambda_1 & = & 0 \\ 4\lambda_2 - x_1^2\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & \geq & 0 \\ \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Consideriamo i seguenti casi.

**Caso 1**

Entrambi i vincoli sono attivi. L'insieme ammissibile è costituito dai punti $B = (2, 0)$ e $A = (-2, 4)$. In entrambi i punti i gradienti dei due vincoli sono linearmente indipendenti e quindi la condizione di qualificazione è soddisfatta.
Nel punto $B$ il sistema diventa:

$$\begin{array}{rcl} 2(x_1 - 2) + \lambda_1 + 2x_1\lambda_2 & = & 0 \\ 2(x_2 - 3) + \lambda_1 & = & 0 \\ x_1 & = & 2 \\ x_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & \geq & 0 \\ \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

da cui

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 4\lambda_2 & = & 0 \\ -6 + \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_1 & \geq & 0 \\ \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

che non ammette soluzione ($\lambda_2 = -3/2 < 0$).
Nel punto $A$ il sistema diventa:

$$\begin{array}{rcl} 2(x_1 - 2) + \lambda_1 + 2x_1\lambda_2 & = & 0 \\ 2(x_2 - 3) + \lambda_1 & = & 0 \\ x_1 & = & -2 \\ x_2 & = & 4 \\ \lambda_1 & \geq & 0 \\ \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

dalla seconda equazione si ottiene

$$\lambda_1 = -2 < 0$$

e quindi il sistema non ammette soluzione.

**Caso 2**

Consideriamo la regione in cui il solo vincolo $g_1(x) \geq 0$ è attivo. Notare che in tale regione la condizione di qualificazione è sempre soddisfatta dato che $\nabla g_1(x)$ è diverso dal vettore nullo.

Per $\lambda_2 = 0$ le condizioni di KKT diventano:

$$\begin{array}{rcl} 2(x_1 - 2) + \lambda_1 & = & 0 \\ 2(x_2 - 3) + \lambda_1 & = & 0 \\ 2 - x_1 - x_2 & = & 0 \\ 4 - x_1^2 & > & 0 \\ \lambda_1 & \geq & 0 \end{array}$$

eliminando $\lambda_1$ dalle prime due equazioni si ottiene:

$$\begin{array}{rcr} x_1 - x_2 & = & -1 \\ x_1 + x_2 & = & 2 \end{array}$$

da cui $x_1 = 1/2$ e $x_2 = 3/2$. Sostituendo $x_1$ nella prima equazione si ha $\lambda_1 = 3$. Nel punto $(1/2, 3/2)$ la funzione obiettivo vale $9/2$.

**Caso 3**

Consideriamo la regione in cui il solo vincolo $g_2(x) \geq 0$ è attivo. Tale regione è costituita dalle due semirette $x_1 = -2$ e $x_1 = 2$ aventi origine in $A$ ed in $B$ rispettivamente. Notare che $A$ e $B$ non appartengono a tale regione. Anche in questo caso, la condizione di qualificazione è sempre soddisfatta dato che $\nabla g_2(x)$ si annulla solo per $x_1 = 0$.

Dalle condizioni di KKT si ha il sistema:

$$\begin{array}{rcl} 2(x_1 - 2) + 2x_1\lambda_2 & = & 0 \\ 2(x_2 - 3) & = & 0 \\ 2 - x_1 - x_2 & > & 0 \\ 4 - x_1^2 & = & 0 \\ \lambda_2 & \geq & 0 \end{array}$$

che non ha soluzione.

**Caso 4**

Nessun vincolo è attivo ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). Si ottiene il sistema:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2 & = & 0 \\ x_2 - 3 & = & 0 \\ 2 - x_1 - x_2 & \geq & 0 \\ 4 - x_1^2 & \geq & 0 \end{array}$$

che non ha soluzione ammissibile.

L'unico punto che soddisfa le condizioni di ottimalità è il punto $(1/2, 3/2)$ trovato nel Caso 2. L'ottimo globale è quindi $(1/2, 3/2)$.

# 7

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata

$$\begin{aligned}
&\max ln(x_1) + 2ln(x_2) + 3ln(x_3) \\
&\qquad\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 3000 \\
&\qquad\qquad x_1 \geq 750 \\
&\qquad\qquad x_2 \geq 1 \\
&\qquad\qquad x_3 \geq 1
\end{aligned}$$

studiare l'esistenza di punti di massimo.

**Soluzione**. Studiamo il problema nella forma:

$$\begin{aligned}
&\min -ln(x_1) - 2ln(x_2) - 3ln(x_3) \\
&\qquad h_1(x) = 3000 - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\
&\qquad g_2(x) = x_1 - 750 \geq 0 \\
&\qquad g_3(x) = x_2 - 1 \geq 0 \\
&\qquad g_4(x) = x_3 - 1 \geq 0
\end{aligned}$$

Poiché la funzione obiettivo è convessa e continua nell'insieme ammissibile, e i vincoli sono lineari, le condizioni di *Karush Kuhn Tucker* (KKT) sono condizioni necessarie e sufficienti di ottimo globale anche nei punti che non soddisfano la condizione di qualificazione (per la linearità dei vincoli).
La funzione Lagrangiana è:

$$L(x,\lambda) = -ln(x_1) - 2ln(x_2) - 3ln(x_3) - \lambda_1(3000 - x_1 - x_2 - x_3) - \lambda_2(x_1 - 750) + \\ -\lambda_3(x_2 - 1) - \lambda_4(x_3 - 1)$$

Imponiamo le condizioni di KKT:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -\frac{1}{x_1} + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -\frac{2}{x_2} + \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -\frac{3}{x_3} + \lambda_1 - \lambda_4 = 0 \quad (8)$$

$$3000 - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \quad (9)$$

$$x_1 - 750 \geq 0 \quad (10)$$

$$x_2 - 1 \geq 0 \quad (11)$$

$$x_3 - 1 \geq 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2(x_1 - 750) &= 0 & (13)\\
\lambda_3(x_2 - 1) &= 0 & (14)\\
\lambda_4(x_3 - 1) &= 0 & (15)\\
\lambda_2 &\geq 0 & (16)\\
\lambda_3 &\geq 0 & (17)\\
\lambda_4 &\geq 0 & (18)
\end{aligned}$$

Consideriamo i seguenti casi.

**Caso 1**

Il solo vincolo $g_2(x) \geq 0$ è attivo, dunque $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ e $x_1 = 750$. Dalle (7), (8) e (9) si ottiene:

$$3000 - 750 - \frac{2}{\lambda_1} - \frac{3}{\lambda_1} = 0$$

da cui

$$\lambda_1 = \frac{1}{2250}$$

mentre $x_2$ ed $x_3$ assumono i valori:

$$x_2 = \frac{2}{\lambda_1} = 900 \quad x_3 = \frac{3}{\lambda_1} = 1350$$

Dalla prima equazione si può ricavare $\lambda_2$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{x_1} + \lambda_1 = -\frac{1}{750} + \frac{1}{450} = \frac{2}{2250}$$

che è positivo. Il punto trovato è quindi:

$$x_1 = 750 \quad x_2 = 900 \quad x_3 = 1350$$

**Caso 2**

Il solo vincolo $g_2(x) \geq 0$ è attivo, dunque $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$ e $x_2 = 1$. Dalle (6), (8) e (9) si ottiene:

$$x_1 = \frac{1}{\lambda_1}; \; x_3 = \frac{3}{\lambda_1}$$

Per sostituzione, dal vincolo di uguaglianza si ottiene:

$$\lambda_1 = \frac{4}{2999}$$

mentre dalla (7) si ricava $\lambda_3$:

$$\lambda_3 = \frac{4}{2999} - 2 < 0$$

e quindi il sistema non ha soluzione.

**Caso 3**

Il solo vincolo $g_3(x) \geq 0$ è attivo, dunque $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ e $x_3 = 1$. Dalle (7), (8) e (9) si ottiene:

$$x_1 = 2999/3 \quad x_2 = 2/3(2999) \quad x_3 = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{3}{2999} \quad \lambda_4 = \lambda_1 - 3$$

e quindi il sistema non ha soluzione ($\lambda_4 < 0$).

**Caso 4**

Sono attivi i vincoli $g_1(x) \geq 0$ e $g_2(x) \geq 0$, dunque $\lambda_4 = 0$ e inoltre $x_1 = 750$ e $x_2 = 1$. Da $h(x) = 0$ si ottiene inoltre $x_3 = 2249$. Dalle (6)–(8) si ha che

$$\begin{array}{rcl} -\dfrac{1}{750} + \lambda_1 - \lambda_2 & = & 0 \\ -2 + \lambda_1 - \lambda_3 & = & 0 \\ -\dfrac{3}{2249} + \lambda_1 & = & 0 \end{array}$$

da cui $\lambda_1 = \frac{3}{2249}$ e di conseguenza $\lambda_3 < 0$.

**Caso 5**

Sono attivi i vincoli $g_1(x) \geq 0$ e $g_3(x) \geq 0$, dunque $\lambda_3 = 0$ e inoltre $x_1 = 750$ e $x_3 = 1$. Da $h(x) = 0$ si ottiene inoltre $x_2 = 2249$. Dalle (6)–(8) si ha che

$$\begin{array}{rcl} -\dfrac{1}{750} + \lambda_1 - \lambda_2 & = & 0 \\ -\dfrac{2}{2249} + \lambda_1 & = & 0 \\ -3 + \lambda_1 - \lambda_4 & = & 0 \end{array}$$

e dunque, come si vede, $\lambda_4 < 0$.

**Caso 6**

Sono attivi i vincoli $g_2(x) \geq 0$ e $g_3(x) \geq 0$, dunque $\lambda_2 = 0$ e inoltre $x_2 = 1$ e $x_3 = 1$. Da $h(x) = 0$ si ottiene inoltre $x_1 = 2998$. Dalle (6)–(8) si ha che

$$\begin{array}{rcl} -\dfrac{1}{2998} + \lambda_1 & = & 0 \\ -2 + \lambda_1 - \lambda_3 & = & 0 \\ -3 + \lambda_1 - \lambda_4 & = & 0 \end{array}$$

che ammette soluzione solo con $\lambda_3 < 0$ e $\lambda_4 < 0$.

**Caso 7**

Sono attivi tutti i vincoli ($g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0$ e $g_3(x) = 0$). L'insieme ammissibile è vuoto.

**Caso 8**

Nessun vincolo è attivo.

Dalle condizioni di KKT si ottiene il sistema:

$$\begin{array}{rcl} -\frac{1}{x_1} + \lambda_1 & = & 0 \\ -\frac{2}{x_2} + \lambda_1 & = & 0 \\ -\frac{3}{x_3} + \lambda_1 & = & 0 \\ 3 - x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \end{array}$$

che ammette la soluzione:

$$x_1 = 500 \quad x_2 = 1000 \quad x_3 = 1500 \quad \lambda_1 = \frac{1}{500} \quad \lambda_2 = 0$$

che non soddisfa il vincolo $x_1 \geq 750$.

L'unico punto che soddisfa le condizioni di KKT è il punto trovato nel Caso 1, ed è quindi un ottimo globale.

# 8

Un agente di borsa ha a disposizione 1000 Euro da investire su due titoli finanziari. Siano $x_1$ ed $x_2$ le quantità investite sui due titoli rispettivamente. Dallo studio di dati storici, si stima che il guadagno medio atteso e la varianza dell'intero investimento, in funzione delle quantità investite, sono rispettivamente $0,1x_1 + 0,12x_2$ e $0,005x_1^2 - 0,006x_1x_2 + 0,008x_2^2$. Si richiede di massimizzare il guadagno atteso totale con il vincolo che la varianza non sia superiore a 625.

**Soluzione**. Il problema può essere formulato nel seguente modo:

$$\min -0,1x_1 - 0,12x_2$$

$$g_1(x) = 625 - 0,005x_1^2 + 0,006x_1x_2 - 0,008x_2^2 \geq 0 \tag{19}$$

$$g_2(x) = 1000 - x_1 - x_2 \geq 0 \tag{20}$$

Può essere dimostrato che l'insieme ammissibile del problema in esame è convesso (ossia che $-g_1(x)$ è una funzione convessa). Le condizioni di KKT sono quindi condizioni necessarie e sufficienti di minimo globale nei punti che soddisfano la condizione di qualificazione. I gradienti dei vincoli, che serviranno per verificare la condizione di qualificazione, sono:

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} -0,01x_1 + 0,006x_2 \\ 0,006x_1 - 0,016x_2 \end{bmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La funzione Lagrangiana è:

$$L(x,\lambda) = -0,1x_1 - 0,12x_2 - \lambda_1(625 - 0,005x_1^2 + 0,006x_1x_2 - 0,008x_2^2) -$$

$$-\lambda_2(1000 - x_1 - x_2)$$

Imponiamo le condizioni di KKT:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\partial L}{\partial x_1} = -0,1 + 0,01x_1\lambda_1 - 0,006x_2\lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} = -0,12 + 0,016x_2\lambda_1 - 0,006x_1\lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\
g_1(x) = 625 - 0,005x_1^2 + 0,006x_1x_2 - 0,008x_2^2 & \geq & 0 \\
g_2(x) = 1000 - x_1 - x_2 & \geq & 0 \\
625\lambda_2 - 0,005x_1^2\lambda_2 + 0,006x_1x_2\lambda_2 - 0,008x_2^2\lambda_2 & = & 0 \\
1000\lambda_1 - x_1\lambda_1 - x_2\lambda_1 & = & 0 \\
\lambda_1 & \geq & 0 \\
\lambda_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Consideriamo i seguenti quattro casi.

**Caso 1**

Entrambi i vincoli sono attivi.

Dal sistema

$$\begin{array}{rcl}
625 - 0,005x_1^2 + 0,006x_1x_2 - 0,008x_2^2 & = & 0 \\
1000 - x_1 - x_2 & = & 0
\end{array}$$

si ottiene l'equazione

$$0,019x_2^2 - 16x_2 + 4375 \quad = \quad 0$$

che non ha soluzioni reali.

**Caso 2**

È attivo il solo vincolo $g_1(x)$ ($\lambda_2 = 0$). Controlliamo la condizione di qualificazione, si ha:

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} -0,01x_1 + 0,006x_2 \\ 0,006x_1 - 0,016x_2 \end{bmatrix}$$

che si annulla solo nell'origine, non appartenente alla regione in esame ($g_1(x)$ attivo). Non si hanno quindi punti che non soddisfano la condizione di qualificazione. Dalle KKT, si ottiene il seguente sistema di equazioni

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\partial L}{\partial x_1} = -0,1 + 0,01x_1\lambda_1 - 0,006x_2\lambda_1 & = & 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} = -0,12 + 0,016x_2\lambda_1 - 0,006x_1\lambda_1 & = & 0 \\
g_1(x) = 625 - 0,005x_1^2 + 0,006x_1x_2 - 0,008x_2^2 & = & 0
\end{array}$$

Esplicitando le prime due equazioni rispetto a $\lambda_1$, ed uguagliando le due espressioni si ottiene

$$\frac{0,1}{0,01x_1 - 0,006x_2} = \frac{0,12}{0,016x_2 - 0,006x_1}$$

e quindi $x_1 = 1,29x_2$. Sostituendo $x_1$ nella terza equazione si ottiene la soluzione $x_2 = 269.9$ e $x_1 = 348.1$.

**Caso 3**

È attivo il solo vincolo $g_2(x)$ ($\lambda_1 = 0$). In questo caso $\nabla g_2(x)$ è costante e la condizione di qualificazione è banalmente soddisfatta. Le prime due condizioni KKT diventano

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -0,1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -0,12 + \lambda_2 & = & 0 \end{array}$$

e quindi il sistema non ha soluzione.

**Caso 4**

Entrambi i vincoli non sono attivi ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$).

La prima condizione diventa

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -0,1 \quad = \quad 0$$

e quindi il sistema non ha soluzione.

Il minimo globale del problema è quindi $x_1 = 348.1$ e $x_2 = 269.9$.

# 9

Dato il seguente problema di ottimizzazione

$$\begin{array}{lll} min & 2x_1^3 + 3x_2 & \\ s.t. & x_1^2 + x_2^2 & \leq 1 \\ & 2x_1^2 + x_2 - 1 & \geq 0 \end{array}$$

dire cosa succede nei punti $A = (-1, 0)$, $B = (1/\sqrt{2}, 0)$, $C = (0, 1)$.

La regione ammissibile è quella disegnata in Figura 6.

**Soluzione**. Innanzitutto, riscriviamo il sistema nella forma canonica.

$$\begin{array}{lll} min & 2x_1^3 + 3x_2 & \\ s.t. & -x_1^2 - x_2^2 + 1 & \geq 0 \\ & 2x_1^2 + x_2 - 1 & \geq 0 \end{array}$$

La funzione lagrangiana è

$$L(x, \lambda) = 2x_1^3 + 3x_2 - \lambda_1(-x_1^2 - x_2^2 + 1) - \lambda_2(2x_1^2 + x_2 - 1)$$

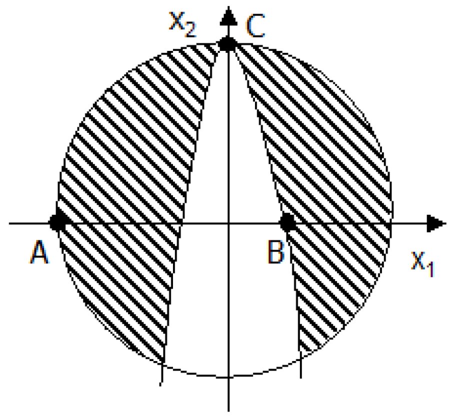


Figura 6: Regione ammissibile dell'esercizio 9.

e le condizioni KKT impongono che in ogni punto di minimo che sia anche regolare, in cui cioè sia soddisfatta la condizione di qualificazione dei vincoli attivi, si abbia:

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial L}{\partial x_1} = 6x_1^2 + 2\lambda_1 x_1 - 4\lambda_2 x_1 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} = 3 + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_2 = 0 \\
\lambda_1(-x_1^2 - x_2^2 + 1) = 0 \\
\lambda_2(2x_1^2 + x_2 - 1) = 0 \\
-x_1^2 - x_2^2 + 1 \geq 0 \\
2x_1^2 + x_2 - 1 \geq 0 \\
\lambda_1 \geq 0 \\
\lambda_2 \geq 0
\end{array}$$

Consideriamo il punto A. Il solo vincolo attivo è il primo, il cui gradiente è non nullo in A, e dunque A è un punto di regolarità. Per la condizione di complementarietà, deve aversi $\lambda_2 = 0$, per cui la seconda condizione KKT diventa

$$3 = 0$$

Dunque, il punto A non è un punto di minimo. Consideriamo ora il punto B. Il solo vincolo attivo è il secondo, il cui gradiente è non nullo in B, e dunque, B è un punto di regolarità. Per la condizione di complementarietà, deve aversi $\lambda_1 = 0$, per cui si ha il sistema

$$\begin{array}{l}
3 - 2\sqrt{2}\lambda_2 = 0 \\
3 - \lambda_2 = 0
\end{array}$$

che non ha soluzione. Dunque, il punto B non è un punto di minimo locale. Consideriamo ora il punto C. In C sono attivi entrambi i vincoli, e i loro gradienti $\nabla g_1(x) = [-2x_1, -2x_2]^T$ e $\nabla g_2(x) = [4x_1, 1]^T$ nel punto C diventano $\nabla g_1(C) = [0, -2]^T$ e $\nabla g_2(C) = [0, 1]^T$, che sono tra loro linearmente dipendenti. Quindi, il punto non è un punto di regolarità, e come tale, non è tenuto a soddisfare le condizioni KKT. Si conclude allora che anche C può essere un punto di minimo locale.

# 10

Si risolva il seguente problema di ottimizzazione

$$
\begin{array}{lll}
max & x_1^2 + 3x_2 & \\
s.t. & x_2 & \leq x_1 + 1 \\
 & x_1 & \geq 0 \\
 & x_1 & \leq 3
\end{array}
$$

**Soluzione**. Riscriviamo il sistema nella forma canonica.

$$
\begin{array}{lll}
min & -x_1^2 - 3x_2 & \\
s.t. & x_1 - x_2 + 1 & \geq 0 \\
 & x_1 & \geq 0 \\
 & -x_1 + 3 & \geq 0
\end{array}
$$

La regione ammissibile è riportata in Figura 7. Si noti che la regione ammissibile è

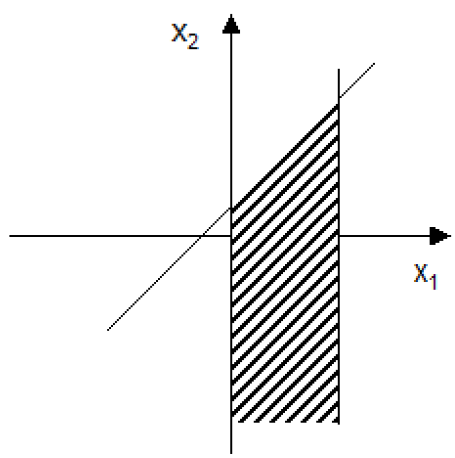


Figura 7: Regione ammissibile dell'esercizio 10.

convessa, i vincoli sono lineari, ma la funzione obiettivo è concava. Poiché i vincoli sono lineari le condizioni KKT sono necessarie di minimo locale anche nei punti che non soddisfano la condizione di qualificazione.
Imponendo ora le condizioni KKT, abbiamo

$$L(x, \lambda) = -x_1^2 - 3x_2 - \lambda_1(x_1 - x_2 + 1) - \lambda_2(x_1) - \lambda_3(-x_1 + 3)$$

e quindi abbiamo il sistema:

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} = -3 + \lambda_1 = 0 \\
\lambda_1(x_1 - x_2 + 1) = 0 \\
\lambda_2 x_1 = 0 \\
\lambda_3(-x_1 + 3) = 0 \\
x_1 - x_2 + 1 \geq 0 \\
x_1 \geq 0 \\
-x_1 + 3 \geq 0 \\
\lambda_1 \geq 0 \\
\lambda_2 \geq 0
\end{array}$$

Appare evidente dalla seconda equazione che il solo valore $\lambda_1 = 3$ è possibile. Quindi, per la complementarietà, i soli punti che si trovano sulla retta $x_1 - x_2 + 1 = 0$ possono soddisfare le condizioni KKT. Consideriamo allora, tra tutti i diversi casi, quelli in cui il primo vincolo è attivo:

**Caso 1: solo il vincolo 1 attivo**. In questo caso, si ha $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, per cui il sistema diventa

$$\begin{array}{l}
-2x_1 - 3 = 0 \\
x_1 - x_2 + 1 = 0
\end{array}$$

che ha come soluzione il punto $A = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Il punto A non appartiene alla regione ammissibile.

**Caso 2: vincoli 1 e 2 attivi** Abbiamo in questo caso, $\lambda_3 = 0$, per cui il sistema diventa:

$$\begin{array}{l}
-2x_1 - 3 - \lambda_2 = 0 \\
x_1 - x_2 + 1 = 0 \\
x_1 = 0
\end{array}$$

che ha come soluzione il punto B=$(0, 1)$. Tuttavia, risolvendo il sistema, troviamo $\lambda_2 = -3$. Dunque, il punto B non puó essere un punto di minimo.

**Caso 3: vincoli 1 e 3 attivi** Abbiamo in questo caso, $\lambda_2 = 0$, per cui il sistema diventa:

$$\begin{array}{l}
-2x_1 - 3 + \lambda_3 = 0 \\
\lambda_2 x_1 = 0 \\
x_1 - x_2 + 1 = 0 \\
-x_1 + 3 = 0
\end{array}$$

da cui otteniamo il punto C=$(3, 4)$ per $\lambda_3 = 9$. Dunque, il punto C è un possibile punto di minimo locale per la funzione.

## 11

Sia dato il seguente problema di ottimizzazione

$$\begin{array}{lll} min & x_1^3 - 2x_1^2 x_2 + x_2 & \\ s.t. & x_1^2 + x_2^2 & \leq 1 \end{array}$$

Dire se nei punti A=$(0,0)$ e B=$(1,0)$ la direzione $d = (-1,-1)^T$ è una direzione di discesa ammissibile.

**Soluzione**. Riscriviamo il problema nella forma:

$$\begin{array}{lll} min & x_1^3 - 2x_1^2 x_2 + x_2 & \\ s.t. & 1 - x_1^2 - x_2^2 & \geq 0 \end{array}$$

Perché $d = (-1,-1)^T$ sia direzione di discesa, occorre che $\nabla f^T d < 0$, cioè

$$(3x_1^2 - 4x_1x_2, -2x_1^2 + 1)^T(-1,-1) < 0$$

Nel punto A abbiamo

$$(0,1)^T(-1,-1) = -1 < 0$$

e nel punto B abbiamo

$$(3,-1)^T(-1,-1) = -2 < 0$$

Verifichiamo ora l'ammissibilità della direzione $d$ a partire dai punti $A$ e $B$. In $A$ il vincolo non è attivo e quindi ogni direzione è ammissibile. In $B$ il vincolo è attivo. Quindi, perché $d$ sia ammissibile si deve avere $\nabla g(B)^T d \geq 0$. Numericamente, troviamo

$$\nabla g(B)^T d = (-2,0)^T(-1,-1) = 2 > 0$$

dunque nel punto $B$ la direzione $d$ risulta essere una direzione di discesa ammissibile.

## 12

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{array}{rcl} \min -x_1^3 - x_2 & & \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 & \leq & 4 \\ g_2(x) = x_1^2 + 4x_2^2 & \geq & 4 \\ g_3(x) = x_1 - x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Quali di questi punti $A = (-2, 0)$, $B = (\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5})$ e $C = (0, 1)$ possono essere punti di minimo locale?

**Soluzione**. Nel punto $A$ sono attivi i vincoli $g_1$ e $g_2$. Le condizioni di qualificazione dei vincoli attivi in $A$ portano allo Jacobiano $J(A) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$. Le due righe sono linearmente dipendenti, quindi nel punto $A$ le condizioni di qualificazione dei vincoli non sono rispettate e non si può escludere che il punto sia di minimo. Nel punto $B$ sono attivi i vincoli $g_2$ e $g_3$, quindi $\lambda_1 = 0$. Le condizioni di qualificazione dei vincoli sono rispettate, infatti le colonne dello Jacobiano sono Linearmente Indipendenti $J(B) = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}\sqrt{5} & \frac{16}{5}\sqrt{5} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Risolvendo le condizioni di KKT si ottiene $\lambda_2 = -\frac{17}{25\sqrt{(5)}}$ $(\lambda_3 = \frac{147}{125})$, quindi le condizioni di KKT non sono verificate. Il punto $B$ si può escludere che sia un punto di minimo. Nel punto $C$ risulta attivo solo il vincolo $g_2$, e le condizioni di qualificazione sono rispettate. In $C$ vale $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_3 = 0$ le condizioni di KKT portano a $\lambda_2 = -\frac{1}{8}$ e quindi non sono rispettate. Il punto $C$ si può escludere che sia un punto di minimo.

# 13

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 + 2x_2^3 & \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 &\leq 1 \\ g_2(x) = x_1 + x_2^2 &\geq 1 \\ g_3(x) = -x_1 + x_2^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

Quali di questi punti $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$ possono essere punti di minimo locale?

**Soluzione**. Nel punto $A$ sono attivi i vincoli $g_1$ e $g_2$. Le condizioni di qualificazione dei vincoli attivi in $A$ portano allo Jacobiano $J(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Le due colonne sono Linearmente Dipendenti, quindi nel punto $A$ le condizioni di qualificazione dei vincoli non sono rispettate e non si può escludere che il punto sia di minimo. Nel punto $B$ risultano attivi tutti e tre i vincoli, e quindi le condizioni di qualificazione dei vincoli non sono rispettate e non si può escludere che il punto sia di minimo. Il punto $C$ è fuori dalla regione ammissibile (violato il vincolo $g_2$) e sicuramente non può essere punto di minimo.

## 14

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min -x_1^2 + x_2 \\ g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 &\geq 0 \\ g_2(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Il punto di minimo di questo problema è il punto $A = [1\ 0]^T$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità.
- Supponendo che il secondo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

  $$1 - x_1^2 - x_2^2 \geq -\epsilon||\nabla g_2(A)||$$

  In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da $\epsilon$?

**Soluzione**. Nel punto $A$ sono attivi i vincoli $g_1$ e $g_2$. Le condizioni di qualificazione dei vincoli attivi in $A$ portano allo Jacobiano $J(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Le due colonne sono Linearmente Indipendenti, e le condizioni di qualificazione dei vincoli sono rispettate. Le condizioni di KKT calcolate in $A$ portano a $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ e sono rispettate. Il punto $A$ rispetta le condizioni necessarie di ottimalità. La sensibilità della funzione obiettivo alla variazione del vincolo $g_2$ di $\epsilon$ è pari a $\frac{df}{d\epsilon} = -||\nabla g_2(A)||\lambda_2 = -2\frac{3}{2} = -3$.

## 15

Indichiamo con P1 e P2 i seguenti problemi di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min 4x_1^3 + x_2^2 + 3 \\ -2x_1^2 + x_2 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min 4x_1^3 + x_2^2 + 3 \\ -2x_1^2 + x_2 - 3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si considerino il punto $x = [1\ 5]^T$ e la direzione $d = [-1\ \ -3]^T$. Per ciascuno dei due problemi P1 e P2, rispondere alle seguenti domande: Partendo dal punto $x$, la direzione $d$ è una direzione di discesa ammissibile?

**Soluzione**. La direzione $d$ nel problema P1 è direzione di discesa ($\nabla f(x)^T d = -12-30 \leq 0$) ma non  una direzione ammissibile (essendo il vincolo di uguaglianza una direzione ammissibile deve essere ortogonale al gradiente del vincolo nel punto). Infatti $\nabla g(x)^T d = 4-3 \neq 0$. La direzione $d$ nel problema P2 è direzione di discesa ($\nabla f(x)^T d = -12-30 \leq 0$) e ammissibile ($\nabla g(x)^T d = 4-3 \geq 0$).

# Esercizi proposti

## 16

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$
\begin{aligned}
\min x_1 + x_2^2 & \\
g_1(x) = 4x_1^2 - x_2 + 2 &\geq 0 \\
g_2(x) = -x_1 + x_2^2 &\geq 0 \\
g_3(x) = -x_1 x_2 + 1 &\geq 0 \\
g_4(x) = x_1 &\geq 0 \\
g_5(x) = -x_2 + 2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

- Si considerino i punti $A = (0, 2)$, $B = (1/2, 2)$ e $C = (3/4, 4/3)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.
- Partendo dal punto $D = (1, 1)$, la direzione $d = [-1 \;\; 1]^T$ è una direzione di discesa? È una direzione ammissibile?

## 17

Indichiamo con P1 e P2 i seguenti problemi di ottimizzazione:

$$
\begin{aligned}
\min x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 & \\
x_1^2 + x_2^2 &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 & \\
x_1^2 + x_2^2 &\leq 1
\end{aligned}
$$

Si considerino il punto $x = [1 \;\; 0]^T$ e la direzione $d = [-1 \;\; -1]^T$. Per ciascuno dei due problemi P1 e P2, determinare se $d$ è una direzione di discesa ammissibile.

## 18

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} &\min x_1 + 3x_2 \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 &\leq 2 \\ g_2(x) = x_1 + x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

la cui soluzione ottima è $x^* = (1, -1)$. Supponiamo ora che il secondo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$x_1 + x_2 \geq -\epsilon ||\nabla g_2(x^*)||$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da $\epsilon$, ossia quanto vale $\frac{df}{d\epsilon}$ nell'intorno di $x^*$?

## 19

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} &\min x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2 \\ -x_1^2 - x_2^2 &\geq -4 \\ -x_1 + x_2 &\geq -2 \\ x_1^2 - x_2 &\geq 2 \end{aligned}$$

Si considerino i punti $A = (0, 0)$, $B = (0, -2)$, $C = (2, 0)$, $D = (\sqrt{3}, 1)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.

**Soluzione**. Nel punto A nessun vincolo risulta attivo e le condizioni di KKT non sono rispettate. Nel punto B sono attivi tutti i vincoli e le condizioni di KKT sono rispettate. Nel punto C risultano attivi i primi due vincoli ma le condizioni di KKT non sono rispettate. Nel punto D risulta attivo il terzo vincolo e le condizioni di KKT non sono rispettate. Le condizioni di qualificazione dei vincoli sono rispettate in tutti i punti ad eccezione del punto B. Non si può quindi escludere che il punto B sia un punto di minimo.

## 20

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\min x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_1 + 2x_2$$

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 &\geq 0 \\
x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 &\geq 0 \\
x_1^2 + 2x_2^2 &\leq 16 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Si considerino i punti $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (0, 2\sqrt{2})$, $D = (0,1)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.

# 21

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$
\begin{aligned}
\min 4x_1^3 - 3x_2 & \\
x_1 - x_2^2 &\geq 0 \\
2 - x_1 - x_2 &\geq 0 \\
x_1 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Si considerino i punti $A = (0,0)$, $B = (1,1)$, $C = (2,0)$, $D = (1,0)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.

# 22

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$
\begin{aligned}
\min x_1^3 + x_2 & \\
x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 &\geq 0 \\
x_1^2 + x_2^2 &\leq 4 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Si considerino i punti $A = (-2,0)$, $B = (0,0)$, $C = (2,0)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.

# 23

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$
\begin{aligned}
\min x_2 & \\
1 - (1/4)x_1^2 - x_2^2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 - x_1^2 - x_2 &\geq 0 \\
x_1 + 1 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Si considerino i punti $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, -1)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale. Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

## 24

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$
\begin{aligned}
\min x_1^2 + x_2 & \\
1 - x_1^2 - (1/4)x_2^2 &\geq 0 \\
x_1 + x_2^2 - 1 &\geq 0 \\
x_2 + 1 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Si considerino i punti $A = (0, 2)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, -1)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale. Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

## 25

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$
\begin{aligned}
\min x_1^2 + x_2 & \\
(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4 &\geq 0 \\
1 + x_1 + x_2^2 &\geq 0 \\
2 - x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Si considerino i punti $A = (1, 2)$, $B = (-1, 0)$, $C = (-5, 2)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale. Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

## 26

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$
\min -x_1 - x_2
$$

$$\begin{aligned} 1 - x_1^2 - x_2^2 &\geq 0 \\ 1 - x_1^2 + x_2 &\geq 0 \\ x_1 - x_2 + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si considerino i punti $A = (0;1)$, $B = (1;1)$, $C = (0;-1)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale. Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

# 27

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} &\min x_2 \\ 1 - (1/4)x_1^2 - x_2^2 &\geq 0 \\ 1 - x_1^2 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = (0, -1)$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità.
- Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

  $$1 - (1/4)x_1^2 - x_2^2 \geq -\epsilon||\nabla g_1(x^*)||$$

  In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da $\epsilon$?

# 28

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} &\min -x_1 \\ x_1^2 + (x_2 + 1)^2 - 4 &\geq 0 \\ 1 - x_1 + x_2^2 &\geq 0 \\ -x_2 &\geq 0 \\ x_2 + 2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = (5, -2)$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità.

- Supponendo che il secondo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

  $$1 - x_1 + x_2^2 \geq -\epsilon ||\nabla g_2(x^*)||$$

  In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da $\epsilon$?

# 29

Si consideri il problema

$$\begin{array}{rcl} \min -x_1 - x_2 & & \\ 1 - x_1^2 - x_2^2 & \geq & 0 \\ 1 - x_1^2 + x_2 & \geq & 0 \\ x_1 - x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità.
- Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

  $$1 - x_1^2 - x_2^2 \geq -\epsilon ||\nabla g_1(x^*)||$$

  In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da $\epsilon$?

# 30

Dato il problema

$\min x_1$

$g_1(x) = -x_1 x_2 \geq 0$

$g_2(x) = x_2 - x_1^2 - 2 \geq 0$

si considerino il punto $x = (-1, 3)$ e la direzione $d = [1\ 2]^T$. Partendo dal punto $x$, la direzione $d$ è una direzione di discesa ammissibile?

# 31

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\min 4x_1 + x_2$$

$$
\begin{aligned}
1-(1/4)x_1^2-x_2^2 &\geq 0\\
2+x_1-2x_2 &\geq 0\\
2+x_1+2x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Si considerino i punti $A=(-2,0)$, $B=(0,1)$, $C=(2,0)$, $D=(0,0)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale. Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

# 32

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$
\begin{aligned}
\min x_1^3 &+ 2x_2^4\\
x_1^2+x_2^2 &\geq 1\\
\sqrt{2}-x_1-x_2 &\geq 0\\
x_1 &\geq 0\\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Si considerino i punti $A=(0,0)$, $B=(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$, $C=(1,0)$, $D=(\sqrt{2},0)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale. Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale?

# 33

Si consideri il problema

$$
\begin{aligned}
\min x_1^3 &+ 2x_2^4\\
g_1(x)=4-x_1^2-x_2^2 &\geq 0\\
g_2(x)=2+x_1+x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^*=(-2,0)$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità. Cosa si può dire sull'esistenza di un minimo globale? Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$4-x_1^2-x_2^2 \geq -\epsilon||\nabla g_1(x^*)||$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da $\epsilon$?

## 34

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min x_1^3 + 3x_1^2x_2 + x_2^3 & \\ h(x) = 2 - 3x_1^2 - 2x_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

e si considerino i punti $A = (\sqrt{2/3}, 0)$ e $B = (0, 1)$ e la direzione $d = [0 \;\; -1]^T$. Per ciascuno dei due punti $A$ e $B$, la direzione $d$ è una direzione di discesa ammissibile?

## 35

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min x_1 + x_2^2 & \\ g_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2 &\geq 0 \\ g_2(x) = -x_1 + x_2 + 2 &\geq 0 \\ g_3(x) = x_1 + 2 &\geq 0 \\ g_4(x) = 2 - x_2 &\geq 0 \\ g_5(x) = x_1x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Si considerino i punti $A = (4, 2)$, $B = (-1, -2)$ e $C = (-2, 0)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.
- Considerando il punto $x^* = (0, 1)$, si studi la sensibilità della funzione obiettivo ad una variazione $\epsilon||\nabla g_5(x^*)||$ del vincolo $g_5$.
- Partendo dal punto $E = (-4, -2)$, la direzione $d = [1 \;\; -1]^T$ è una direzione di discesa ammissibile?

## 36

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min -x_2^2 & \\ g_1(x) = 4 - (x_1 - 1)^2 - x_2^2 &\geq 0 \\ g_2(x) = x_2 + 1 &\geq 0 \\ g_3(x) = -x_1x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si considerino i punti $A = (-1, 0)$, $B = (0, -1)$, $C = (3, 0)$, $D = (1, 2)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.

## 37

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} &\min x_1 \\ g_1(x) = 4 - (x_1-1)^2 - (x_2-1)^2 &\geq 0 \\ g_2(x) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 &\geq 0 \\ g_3(x) = x_1 x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si considerino i punti $A = (1,1)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$, $D = (0,0)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.

## 38

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} &\min -x_2^2 \\ g_1(x) = 4 - (x_1-1)^2 - x_2^2 &\geq 0 \\ g_2(x) = x_2 + 1 &\geq 0 \\ g_3(x) = -x_1 x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = (0, \sqrt{3})$. Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$4 - (x_1-1)^2 - x_2^2 \geq -\epsilon ||\nabla g_1(x^*)||$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da $\epsilon$?

## 39

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} &\min -x_1^2 \\ g_1(x) = 4 - (x_1-1)^2 - (x_2-1)^2 &\geq 0 \\ g_2(x) = x_1 x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Il punto di minimo di questo problema è il punto $x^* = (3,1)$. Verificare che tale punto soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità. Supponendo che il primo vincolo subisca una piccolissima variazione, diventando

$$4 - (x_1-1)^2 - (x_2-1)^2 \geq -\epsilon ||\nabla g_1(x^*)||$$

In che misura il valore ottimo della funzione obiettivo è influenzato da $\epsilon$?

## 40

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min x_1^2 - 3x_2^2 + x_1x_2 & \\ 2 - x_1^2 - x_2^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

e si considerino i punti $A = (0,1)$ e $B = (1,0)$ e la direzione $d = (-1,1)$. Per ciascuno dei due punti $A$ e $B$, la direzione $d$ è una direzione di discesa ammissibile?

## 41

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione vincolata:

$$\begin{aligned} \min 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 & \\ 2x_1^2 + x_2 - 5 &\geq 0 \\ x_1x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

e si considerino i punti $A = (1,3)$ e $B = (0,-2)$ e la direzione $d = [1\ \ -5]^T$. Per ciascuno dei due punti $A$ e $B$, dire se la direzione $d$ è una direzione ammissibile di discesa o meno (e perché).

## 42

Si consideri il problema

$$\begin{aligned} \min 4x_1^2 + x_1x_2 & \\ g_1(x) = x_1 + x_2 - 10 &\geq 0 \\ g_2(x) = -x_1^2 - x_2 + 100 &\geq 0 \\ g_3(x) = x_1 - x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si considerino i punti $A = (10,0)$, $B = (6,5)$, $C = (5,5)$, $D = (1,1)$ e si discuta se ciascuno di essi può essere un punto di minimo locale.

**Soluzione**. Nel punto $A = (10,0)$ sono attivi i vincoli $g_1$ e $g_2$, le condizioni di qualificazione dei vincoli attivi sono rispettate, e $\lambda_1 = \frac{120}{19}$, $\lambda_2 = -\frac{70}{19}$ $\lambda_3 = 0$. Il punto non rispetta le condizioni KKT e quindi non può essere un minimo locale. Il punto $B = (6,5)$ si trova all'interno della regione ammissibile (nessun vincolo attivo) e $\lambda_1 =, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Il punto non rispetta le condizioni KKT e quindi non può essere un minimo locale. Nel punto $C = (5,5)$ sono attivi i vincoli $g_1$ e $g_3$. Il punto rispetta le condizioni KKT (con $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 0$ $\lambda_3 = 20$), e quindi può essere un minimo locale. Il punto $D = (1,1)$, violando il vincolo $g_1$, si trova fuori dalla regione ammissibile.