Esercizi di programmazione lineare

A. Agnetis*

Esercizi svolti - dualità

1

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{aligned}
\min -10x_1 - x_2 & \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\
x_1 + x_4 &= 6 \\
1/2x_1 + x_2 + x_5 &= 8 \\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$

Scrivere il problema duale e facendo uso delle condizioni di ortogonalità, dimostrare o confutare che nella soluzione ottima $x_1^* = 6$ e $x_2^* = 4$.

Soluzione. Il duale è

$$
\begin{aligned}
\max z = 10u_1 + 6u_2 + 8u_3 & \\
u_1 + u_2 + \frac{1}{2}u_3 &\leq -10 \\
u_1 + u_3 &\leq -1 \\
u_1 &\leq 0 \\
u_2 &\leq 0 \\
u_3 &\leq 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Se nella soluzione ottima $x_1^* = 6$ e $x_2^* = 4$, la soluzione ottima del primale è necessariamente $x^* = [6 \;\; 4 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]^T$. Di conseguenza devono essere attivi il primo, il secondo e il quinto vincolo del duale, ottenendo così $u^* = [-1 \;\; -9 \;\; 0]^T$, che soddisfa anche tutti gli altri vincoli del duale e dunque è ottima.

*Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche - Università di Siena

2

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned}
&\max z = x_1 + x_2 \\
&8x_1 + 5x_2 + x_3 = 32 \\
&8x_1 + 6x_2 + x_4 = 33 \\
&8x_1 + 7x_2 + x_5 = 35 \\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

Scrivere il problema duale e individuarne la soluzione ottima, sapendo che la soluzione ottima del problema primale vale $x_2^* \neq 0$, $x_3^* \neq 0$ e $x_4^* \neq 0$, mentre $x_1^* = 0$ e $x_5^* = 0$.

Soluzione. Il duale è

$$\begin{aligned}
&\min z = 32u_1 + 33u_2 + 35u_3 \\
&8u_1 + 8u_2 + 8u_3 \geq 1 \\
&5u_1 + 6u_2 + 7u_3 \geq 1 \\
&u_1 \geq 0 \\
&u_2 \geq 0 \\
&u_3 \geq 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Dalla complementarità si ottiene immediatamente che $u_1^* = 0$, $u_2^* = 0$ e $5u_1^* + 6u_2^* + 7u_3^* = 1$, ossia $u_3^* = 1/7$.

3

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned}
&\min z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \\
&2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
&x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\
&x_j \geq 0
\end{aligned}$$

Senza determinarla esplicitamente, si vuole sapere se il valore della soluzione ottima è almeno pari a 1.

Soluzione. Il problema può risolversi semplicemente per ispezione. Scriviamo il duale:

$$\begin{aligned} \max u_1 + 2u_2 & \\ 2u_1 + u_2 &\le 2 \\ u_1 + 2u_2 &\le 3 \\ u_1 &\le 4 \\ u_2 &\le 1 \end{aligned}$$

Osserviamo che la soluzione $(1, 0)$ è ammissibile per il duale, e il valore della funzione obiettivo duale è pari a 1. Per la dualità debole, risulta dimostrato che la soluzione ottima del primale è senz'altro non inferiore a 1.

Si noti che comunque $(1, 0)$ *non* è la soluzione ottima del duale. Infatti, in tale punto solo il primo dei vincoli duali è attivo. Ciò implica che, se tale soluzione fosse ottima, si dovrebbero annullare, nela corrispondente soluzione ottima del primale, tutte e tre le variabili x_2, x_3 e x_4. Rimarrebbe solo x_1, che dovrebbe essere pari a $1/2$ (dal primo vicnolo) e a 2 (dal secondo), impossibile.

4

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \max z = 2x_1 + 3x_2 & \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 30 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 10 \\ x_1 - x_2 &\le 1 \\ x_2 - x_1 &\le 1 \\ x_1 &\ge 0 \end{aligned}$$

a) Scrivere il problema duale

b) Utilizzando le condizioni di ottimalità, trovare la soluzione ottima del duale sapendo che quella del primale è $(27/5, 32/5)$.

Soluzione. Riscriviamo il problema riordinandolo in modo da rendere più agevole il calcolo del duale.

$$\begin{aligned} \max z = 2x_1 + 3x_2 & \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 30 \\ -x_1 - 2x_2 &\le -10 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 &\leq 1 \\
-x_1 + x_2 &\leq 1 \\
x_1 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Il duale è quindi

$$
\begin{aligned}
&\min 30u_1 - 10u_2 + u_3 + u_4 \\
&\qquad 2u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \geq 2 \\
&\qquad 3u_1 - 2u_2 - u_3 + u_4 = 3 \\
&\qquad u_i \geq 0
\end{aligned}
$$

Inserendo la soluzione $(27/5, 32/5)$ nel primale, osserviamo che il primo e il quarto vincolo sono attivi, mentre il secondo e il terzo no. Di conseguenza, $u_2 = 0$ e $u_3 = 0$. Inoltre, poiché $x_1 = 27/5 > 0$, il primo vincolo del duale deve essere soddisfatto all'uguaglianza, e in definitiva rimane il sistema di due equazioni in due incognite:

$$
\begin{aligned}
2u_1 - u_4 &= 2 \\
3u_1 + u_4 &= 3
\end{aligned}
$$

che dà $u_1 = 1$, $u_4 = 0$. Siccome questi valori sono non negativi, la soluzione trovata è ammissibile per il problema duale e quindi è ottima. A scopo di verifica, si può vedere che i valori delle funzioni obiettivo dei due problemi nei due punti $(27/5, 32/5)$ e, rispettivamente, $(1, 0, 0, 0)$, valgono entrambe 30.

5

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$
\begin{aligned}
&\min z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \\
&\qquad 3x_1 + x_2 = 2 \\
&\qquad x_2 + 2x_3 = 4 \\
&\qquad x_3 + 4x_4 = 5 \\
&\qquad x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

Trovare la soluzione ottima del problema, sapendo che la soluzione ottima del problema duale è (-3/8,11/8,1/4).

Soluzione. Il problema duale è

$$\begin{aligned}
\max 2u_1 + 4u_2 + 5u_3 & & \\
3u_1 &\leq 2 \\
u_1 + u_2 &\leq 1 \\
2u_2 + u_3 &\leq 3 \\
4u_3 &\leq 1
\end{aligned} \tag{3}$$

Inserendo la soluzione $(-3/8, 11/8, 1/4)$, osserviamo che solo il primo dei vincoli duali non è attivo. Di conseguenza, deve essere $x_1 = 0$. Dalla prima equazione del primale si ricava allora $x_2 = 2$, e successivamente dalle altre $x_3 = 1$ e $x_4 = 1$. Poiché tutti i valori trovati sono non negativi, la soluzione trovata per il primale è dunque ottima.

6

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned}
\min z = 7x_1 + 10x_2 & & \\
2x_1 - 4x_2 + x_3 &\leq 10 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 5 \\
x_1 - 3x_2 + 3x_3 &\geq 4 \\
x_j &\geq 0
\end{aligned}$$

Scrivere il duale e trovarne la soluzione ottima sapendo che quella del primale è $x^* = (23/5, 1/5, 0)$.

Soluzione. Il problema duale è:

$$\begin{aligned}
\max w = -10u_1 + 5u_2 + 4u_3 & & \\
-2u_1 + u_2 + u_3 &\leq 7 \\
4u_1 + 2u_2 - 3u_3 &\leq 10 \\
-u_1 - u_2 + 3u_3 &\leq 0 \\
u_i &\geq 0
\end{aligned}$$

Dalle condizioni di complementarietà seguono le seguenti considerazioni:

- poiché in corrispondenza della soluzione ottima il primo vincolo del primale non è attivo si deve avere $u_1^* = 0$;

- poiché x_1^* e x_2^* sono diverse da zero, nella soluzione ottima del duale il primo e il secondo vincolo duale devono essere soddifatti all'uguaglianza.

Si ottiene quindi il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} u_1^* &= 0 \\ u_2^* + u_3^* &= 7 \\ 2u_2^* - 3u_3^* &= 10 \end{aligned}$$

da cui $u^* = (0, 31/5, 4/5)$. Poiché tutte queste componenti sono non negative tale soluzione è ammissibile per il duale e quindi ottima.

7

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare.

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 0.5x_4 &= 2 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

Verificare che la base ottima è $[A_1 A_2]$. Qual è la soluzione ottima x^*?

Soluzione. Calcoliamo i coefficienti di costo ridotto delle variabili fuori base x_3 e x_4 e verifichiamo che siano positivi.

$$\bar{c}_F^T = [\,\bar{c}_3 \quad \bar{c}_4\,] = \bar{c}_F^T - \bar{c}_B^T B^{-1} F = [\,4 \quad 1\,] - [\,2 \quad 3\,] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} =$$

$$= [\,4 \quad 1\,] - [\,2 \quad 3\,]\,(1/5) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} = [\,17/5 \quad 3/5\,]$$

La base considerata è quindi ottima. La soluzione ottima è:

$$x^* = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$
\begin{aligned}
\min z = x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 & \\
3x_1 + x_2 - x_3 = 2 & \\
x_2 - 2x_3 = 1 & \\
x_3 + 4x_4 = 5 & \\
x_i & \geq 0
\end{aligned}
$$

1. Dimostrare che, nella soluzione ottima, $x_3 = 0$.
2. Calcolare la soluzione ottima del problema duale.

Soluzione. Se nella soluzione ottima $x_3 = 0$, necessariamente deve essere $x_4 = 5/4$, $x_2 = 1$, e, dal primo vincolo, $x_1 = 2/3$. Questa è una soluzione ammissibile per il problema primale in quanto tutte le variabili sono non negative. Per dimostrare che è ottima, possiamo usare le condizioni di KKT, e calcolare così l'ottimo del duale. Il problema duale è:

$$
\begin{aligned}
\max 2u_1 + u_2 + 5u_3 & \\
3u_1 & \leq 1 \\
u_1 + u_2 & \leq 2 \\
-u_1 - 2u_2 + u_3 & \leq -1 \\
4u_3 & \leq 2
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Dalla soluzione del primale, che vogliamo dimostrare essere ottima, $(2/3, 1, 0, 5/4)$, discende che il primo, il secondo e il quarto vincolo del duale devono essere attivi. Dal primo si ricava $u_1 = 1/3$, dal secondo $u_2 = 5/3$ e dal quarto $u_3 = 1/2$. Inserendo questi valori nel terzo vincolo, si ha

$$-\frac{1}{3} - \frac{10}{3} + \frac{1}{2} \leq -1$$

che è soddisfatto, e dunque le soluzioni $(2/3, 1, 0, 5/4)$ e $(1/3, 5/3, 1/2)$ sono ottime per i rispettivi problemi. Come verifica possiamo calcolare i valori delle due funzioni obiettivo, entrambi pari a $29/6$.

9

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min z = 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 & \\ 3x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_3 + 4x_4 &\leq 5 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Facendo uso dei concetti di dualità, dimostrare che la soluzione ottima del problema è (2/3,0,2,3/4).

Soluzione. La soluzione data è ottima se e solo se esiste una soluzione duale u^* tale che:

$$x_i^*(c - A^T u^*)_i = 0, \qquad i = 1, \dots, m$$

Dunque, non dobbiamo far altro che scrivere il problema duale e verificare che in corrispondenza delle componenti non nulle di x^*, il sistema di equazioni formate dai vincoli attivi nel problema duale sia soddisfatto. Il duale è

$$\begin{aligned} \max w = 2u_1 + 4u_2 + 5u_3 & \\ 3u_1 &\leq 2 \\ u_1 + u_2 &\leq 4 \\ 2u_2 + u_3 &\leq 2 \\ 4u_3 &\leq -1 \\ u_1 &\geq 0 \\ u_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

Dunque, il sistema è composto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} 3u_1 &= 2 \\ 2u_2 + u_3 &= 2 \\ 4u_3 &= -1 \\ u_1 &\geq 0 \\ u_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} u_1 &= 2/3 \\ u_2 &= 9/8 \\ u_3 &= -1/4 \end{aligned}$$

la soluzione soddisfa i vincoli sulle variabili duali, quindi possiamo concludere che x^* è ottima. Per verifica, calcolando il valore delle funzioni obiettivo, queste risultano pari a $2(2/3)+4(0)+2(2)-(3/4) = 55/12$ e $2(2/3)+4(9/8)+5(-1/4) = 55/12$ rispettivamente.

10

Un allevatore vuole dare al proprio bestiame una certa quantità giornaliera b (in grammi) di vitamine. Per fare questo, esamina n diversi mangimi, e per ciascuno di essi rileva i grammi a_i di vitamine presenti in un etto di mangime, e il costo c_i di un etto di mangime. Il problema è quello di fornire la quantità di vitamine b richiesta, minimizzando i costi. Detto k lindice per cui si ha il minimo dei rapporti c_i/a_i, ovvero

$$\frac{c_k}{a_k} = \min_j \{\frac{c_j}{a_j}\}$$

(Supponiamo per semplicità che tale minimo sia raggiunto per un solo mangime k.) Utilizzando gli strumenti della teoria della dualità, dimostrare che la decisione più conveniente consiste nellacquistare b/a_k etti del solo mangime k.

Soluzione. Per risolvere il problema, basta scrivere la formulazione e il problema duale. Indicando con x_j la quantità di etti di mangime j da comprare, il problema è:

$$\begin{aligned} &\min c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ &\quad a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq b \\ &\quad x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Essendoci un solo vincolo, il problema duale avrà una sola variabile, inidichiamola con u:

$$\begin{aligned} &\max bu \\ &\quad a_1u \leq c_1 \\ &\quad a_2u \leq c_2 \\ &\quad \ldots \\ &\quad a_nu \leq c_n \\ &\quad u \geq 0 \end{aligned}$$

Essendo ovviamente $b > 0$, il duale consiste dunque nel massimizzare il valore di u. È evidente allora che il valore che limita u è il più piccolo dei rapporti c_j/a_j, cioè

$$u^* = \frac{c_k}{a_k}$$

Il valore ottimo della funzione obiettivo del problema duale sarà dunque

$$bu^* = b\frac{c_k}{a_k}$$

Ora, solo il k-esimo vincolo del duale è attivo in u^*. Il fatto che gli altri non siano attivi, per la complementarietà implica che $x_j^* = 0$ per ogni $j \neq k$, e quindi la funzione obiettivo del primale all'ottimo vale

$$c_k x_k^*$$

Per la dualità forte, questo deve uguagliare $b\frac{c_k}{a_k}$, da cui

$$x_k^* = \frac{b}{a_k}$$

che è quanto si voleva dimostrare.

11

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min z = -2x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5$$
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_5 &= 2 \\ -2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Scrivere il problema duale e individuarne la soluzione ottima, sapendo che nella soluzione ottima del problema primale $x_1^* \neq 0$ e $x_3^* \neq 0$, mentre $x_2^* = 0$, $x_4^* = 0$ e $x_5^* = 0$.

Soluzione. Il duale è

$$\max z = u_1 + 2u_2 + 2u_3$$
$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 - 2u_3 &\leq -2 \\ -u_1 - 2u_2 &\leq 5 \\ u_3 &\leq -1 \\ u_1 + 2u_3 &\leq -2 \\ u_2 + u_3 &\leq -2 \end{aligned}$$

Dalle condizioni di complementarietà si ricava soltanto che il primo e il terzo vincolo del duale devono essere attivi, da cui si ha

$$\begin{aligned} u_1^* + 2u_2^* &= -4 && (5)\\ u_3^* &= -1. && (6) \end{aligned}$$

Scegliendo dunque un valore per u_1^* oppure per u_2^*, la soluzione duale rimane completamente determinata. Non possiamo però ovviamente scegliere u_1^* a caso, in quanto occorre poi soddisfare anche gli altri vincoli del duale, ossia deve essere

$$\begin{aligned} -u_1^* - 2u_2^* &\leq 5 && (7)\\ u_1^* &\leq 0 && (8)\\ u_2^* &\leq -1 && (9)\\ & && (10) \end{aligned}$$

Si noti che poiché $u_1^* + 2u_2^* = -4 > -5$, la (7) è identicamente soddisfatta, e utilizzando la (5) nella (8) si ottiene in definitiva che può essere scelto *qualsiasi* valore per u_2^* tale che

$$-2 \leq u_2^* \leq -1.$$

Ad esempio, scegliendo $u_2^* = -2$ si ottiene la soluzione ottima $u^* = (0, -2, -1)^T$.

Esercizi svolti – vertici, basi, metodo del simplesso

12

Dato un poliedro in forma standard, caratterizzato dalle seguenti matrici A e b:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

enumerare tutti i vertici del poliedro.

Soluzione. Poiché il problema ha due vincoli, si tratta di enumerare tutte le coppie di colonne, andando a verificare ogni volta se alla coppia può corrispondere una soluzione di base ammissibile.

(A_1, A_2)
Il sistema diviene:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= 2\\ 2x_1 &= 2 \end{aligned}$$

risolto da $x_1 = 1, x_2 = -1$. Poiché $x_2 < 0$, non si tratta di una soluzione di base ammissibile.

(A_1, A_3)
Il sistema diviene:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Il problema non ammette soluzione, dunque (A_1, A_3) non è una base (e in effetti il determinante è nullo).

(A_1, A_4)
Il sistema diviene:

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

La soluzione è $x_1 = 2/5, x_4 = 2/5$, dunque abbiamo trovato il vertice $(2/5\ 0\ 0\ 2/5\ 0)$.

(A_1, A_5)
Il sistema diviene:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_5 &= 2 \end{aligned}$$

La soluzione è $x_1 = 0, x_5 = 1$, dunque abbiamo trovato il vertice $(0\ 0\ 0\ 0\ 1)$. A questo punto osserviamo che il vertice è degenere, dunque non servirà considerare esplicitamente tutte le coppie di colonne (A_2, A_5), (A_3, A_5), (A_4, A_5), in quanto, se non singolari, restituiscono lo stesso vertice.

(A_2, A_3)
Il sistema diviene:

$$\begin{aligned} 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

La soluzione è $x_2 = -1, x_3 = 2$: poiché $x_2 < 0$, non si tratta di una soluzione di base ammissibile.

(A_2, A_4)
Il sistema diviene:

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_4 &= 2 \\ 3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

risolto da $x_2 = 2/3, x_4 = 2/3$; abbiamo quindi trovato il vertice (0 2/3 0 2/3 0).

(A_3, A_4)
Il sistema diviene:

$$\begin{aligned} 2x_3 + x_4 &= 2 \\ x_3 + 3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

risolto da $x_3 = 4/5, x_4 = 2/5$; abbiamo quindi trovato il vertice (0 0 4/5 2/5 0).

In conclusione, il poliedro ha in tutto quattro vertici:

(2/5 0 0 2/5 0)
(0 0 0 0 1)
(0 2/3 0 2/3 0)
(0 0 4/5 2/5 0)

13

Si consideri il problema di programmazione lineare già visto nell'esercizio 5:

$$\min z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4$$
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Determinare in quale range può variare il termine noto della seconda riga (attualmente al valore 4) senza che vari la base ottima.

Soluzione. Osserviamo che la base ottima è $[A_2, A_3, A_4]$, ossia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

A fronte di una variazione Δb del vettore dei termini noti, la base rimane ammissibile (e quindi ottima, dal momento che non variano i costi ridotti) fintanto che

$$B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$$

ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4+\Delta b_2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\frac{1}{2}\Delta b_2 \\ 1-\frac{1}{8}\Delta b_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

e dunque in definitiva si ottiene il range $-2 \leq \Delta b_2 \leq 8$.

14

Dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min z = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 = 2 \\ x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_3 + 4x_4 + x_6 = 5 \\ x_i \quad \geq \quad 0 \end{aligned}$$

si consideri l'insieme di colonne (A_2, A_4, A_5), indicare se individua o meno una base, e in tal caso se si tratta di una base ammissibile e/o ottima.

Soluzione. Perché (A_2, A_4, A_5) sia una base, occorre semplicemente che essa sia non singolare. Si vede a occhio che i tre vettori non sono linearmente dipendenti, tuttavia, per accertarcene calcoliamo la matrice inversa, che ci tornerà utile in seguito. Calcoliamo l'inversa con il metodo di Gauss. Consideriamo la matrice (B, I) dove $B = (A_2\ A_4\ A_5)$ e I è la matrice identità 3x3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riscriviamo la matrice con la prima riga per ultima, e sottraiamo la prima riga alla terza. Otteniamo così

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poi dividiamo la seconda riga per 4 e moltiplichiamo la terza riga per -1. Otteniamo così

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque, la matrice inversa B^{-1} è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Perché sia una base ammissibile, occorre che risulti $B^{-1}b \geq 0$. Facendo i calcoli, troviamo che

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5/4 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0$$

Dunque, l'insieme $B = (A_2 \ A_4 \ A_5)$ è una base ammissibile. Per verificare se è anche ottima, occorre che i costi ridotti delle colonne non in base siano non negativi, ovvero, che

$$c_F^T - c_B^T B^{-1} F \geq 0$$

ossia che

$$(2\ 6\ 0) \ - (1\ -1\ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

facendo gli opportuni calcoli, otteniamo il vettore $(2 \ \ 13/4 \ \ 1/4)$, per cui la base $B = (A_2 \ A_4 \ A_5)$ è ottima.

15

Si riconsideri il problema dell'esercizio 11:

$$\begin{aligned} \min z = -2x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 & \\ x_1 - 2x_2 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_5 &= 2 \\ -2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

del quale si sa che nella soluzione ottima del problema primale $x_1^* \neq 0$ e $x_3^* \neq 0$, mentre $x_2^* = 0$, $x_4^* = 0$ e $x_5^* = 0$. Si vuole determinare la soluzione ottima del problema duale.

Soluzione. Stavolta facciamo uso dei concetti relativi alle basi. Se B è una base ottima, una soluzione ottima del problema duale è data da $u^* = c_B^T B^{-1}$. Basta allora scrivere una base ottima. Dalle informazioni in nostro possesso, questa comprenderà senz'altro le colonne A_1 e A_3, e basta dunque completarla con una qualunque delle altre colonne, purché linearmente indipendente dalle prime due. Ad esempio, si può aggiungere A_2, ottenendo così :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, essendo $c_B^T = [-2 \quad -1 \quad 5]$ (attenti all'ordine negli elementi di c_B^T), si ha che $u^* = [-1 \quad -\frac{3}{2} \quad -1]$. Si noti che scegliendo diversamente la base B (anche le altre due scelte possibili sarebbero state corrette), si sarebbero ottenute diverse soluzioni ottime per il problema duale (cfr. esercizio 11).

Esercizi svolti – formulazioni

16

Un lanificio produce filato di tipo standard e di tipo speciale utilizzando 3 diverse macchine, le cui produzioni *orarie* sono le seguenti:

macchina A: 3 matasse standard e 1 speciale

macchina B: 2 matasse standard e 2 speciali

macchina C: 2 matasse standard e 1 speciale

Il mercato richiede almeno 60 matasse standard e 40 di tipo speciale al giorno. I costi orari delle due macchine sono: 90 euro per la A, 80 euro per B, 60 euro per C.
Scrivere un modello di programmazione lineare per determinare la produzione giornaliera di costo minimo. (Non occorre imporre il vincolo che le ore giornaliere non superino 24)

Soluzione. Durante un'ora di funzionamento, ciascuna macchina, se attiva, ha una produzione fissa di matasse, indicata prima. Si noti che il problema non riguarda decidere *cosa* produrre, bensì *per quanto tempo* tenere in funzione le tre macchine. Dunque, le variabili di decisione sono x_A, x_B, x_C, pari alle ore di funzionamento delle tre macchine. Considerando che ogni ora di macchina A costa 90 euro, e produce 3 matasse standard e una speciale, avremo dunque che il contributo alla funzione obiettivo sarà $90x_A$, mentre il contributo al soddisfacimento della domanda dei due tipi di matasse sarà rispettivamente $3x_A$ e x_A. Ripetendo il discorso anche per le altre due macchine, otteniamo la formulazione

$$\begin{aligned} \min\ & 90x_A + 80x_B + 60x_C \\ & 3x_A + 2x_B + 2x_C \geq 60 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_A + 2x_B + x_C &\geq 40 \\
x_j &\geq 0
\end{aligned}
$$

17

Il piano di produzione per il prossimo anno di un'azienda prevede una produzione di d_t unità di prodotto nel mese t, $t = 1, \ldots, 12$. Ciascun operaio è in grado di produrre k unità di prodotto in un mese. Lo stipendio mensile di ciascun operaio è pari a s. Assumere e licenziare personale ha dei costi, e precisamente: assumere un operaio costa p, mentre licenziarne uno costa q. Supponendo che inizialmente vi siano g_0 operai, determinare il numero di operai che devono essere presenti durante ciascun mese in modo da riuscire sempre a produrre la domanda richiesta e da minimizzare i costi complessivi di stipendio + assunzione + licenziamento.

Soluzione. Le variabili di decisione sono il numero di operai disponibili in ciascun mese, indichiamoli con g_t, $t = 1, \ldots, 12$.

Per esprimere la funzione obiettivo abbiamo però anche bisogno di altre variabili, che rappresentano il numero di unità di personale assunte e licenziate nel mese t. Precisamente, A_t e L_t indicano rispettivamente il numero di persone che sono assunte e licenziate all'inizio del mese t. A questo punto, la funzione obiettivo è semplicemente

$$\min \sum_{t=1}^{12} (sg_t + pA_t + qL_t)$$

Veniamo ora ai vincoli. Se nel mese t abbiamo a disposizione g_t unità di personale, sarà possibile produrre kg_t. Per soddisfare la domanda, dovrà dunque valere, per ogni t:

$$kg_t \geq d_t$$

Ora, l'unica cosa che manca è stabilire un legame tra le variabili g_t e le A_t, L_t. In particolare, occorre specificare che il numero di unità di personale presenti al mese t è dato da quelle presenti al mese precedente, più gli assunti, meno i licenziati. Dunque, per ogni t:

$$g_{t+1} = g_t + A_t - L_t$$

In definitiva, la formulazione completa è

$$\min \sum_{t=1}^{12} (sg_t + pA_t + qL_t)$$

$$
\begin{aligned}
kg_t &\geq d_t \quad t = 1, \ldots, 12 \\
g_{t+1} &= g_t + A_t - L_t \quad t = 1, \ldots, 12 \\
g_t &\geq 0 \quad t = 1, \ldots, 12
\end{aligned}
$$

18

Una fonderia utilizza quattro tipi di materiale grezzo, per ottenere un prodotto finale. Ciascun materiale ha un diverso contenuto di alluminio, silicio e carbonio. La tabella che segue riporta la composizione di ciascun materiale (espresso in percentuale sul peso totale), insieme al costo unitario.

	% alluminio	% silicio	%carbonio	costo al kg
materiale 1	3	4	6	680
materiale 2	5	4	5	750
materiale 3	1	2.5	4	450
materiale 4	4	5	7	870

Il prodotto finale deve avere un contenuto percentuale di alluminio di almeno il 3% e non superiore all'8%; un contenuto di silicio tra il 4% e il 5%; di carbonio non superiore al 5%. Formulare come PL il problema di pianificare la produzione di questa fonderia minimizzando i costi.

Soluzione. Il problema può essere formulato introducendo le variabili x_i, $i = 1, \dots, 4$, pari alla quantità (in kg) di materiale i che deve essere impiegata per ottenere un kg di prodotto finale. Una formulazione del problema è quindi:

$$\min 680x_1 + 750x_2 + 450x_3 + 870x_4$$

$$0,03x_1 + 0,05x_2 + 0,01x_3 + 0,04x_4 \geq 0,03 \tag{11}$$

$$0,03x_1 + 0,05x_2 + 0,01x_3 + 0,04x_4 \leq 0,08 \tag{12}$$

$$0,04x_1 + 0,04x_2 + 0,025x_3 + 0,05x_4 \geq 0,04 \tag{13}$$

$$0,04x_1 + 0,04x_2 + 0,025x_3 + 0,05x_4 \leq 0,05 \tag{14}$$

$$0,06x_1 + 0,05x_2 + 0,04x_3 + 0,07x_4 \leq 0,05 \tag{15}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \tag{16}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, 4 \tag{17}$$

I primi due vincoli (11) e (12) sono relativi alla concentrazione di alluminio, i vincoli (13) e (14) riguardano la concentrazione di silicio, ed il vincolo (15) quella del carbonio. Il vincolo (16) impone che la somma delle variabili sia pari ad 1 (kg). I vincoli (17), infine, sono vincoli di non negatività.

19

La Làmed è una società che produce snack per aperitivi. La disponibilità di materie prime, alla fine di gennaio, è la seguente: 550 kg di arachidi, 150 kg di pistacchi, 90 kg di mandorle e 70 kg di nocciole. Ogni scatola contiene 500 grammi di prodotto. La Làmed produce quattro tipi di snack, descritti di seguito:

prodotto	composizione	profitto (euro/scatola)
Mem	solo arachidi	2.60
Num	non più del 50% di arachidi almeno il 10% di mandorle almeno il 15% di pistacchi	4.00
Pe	solo pistacchi	5.10
Qof	almeno il 30% di pistacchi almeno il 20% di mandorle almeno il 30% di nocciole	5.20

Supponendo che tutto quanto prodotto viene venduto, formulare come PL il problema di massimizzare il profitto della Làmed.

Soluzione. Il problema può essere formulato introducendo le seguenti variabili:

- x_{AM}= quantità di arachidi (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Mem;
- x_{AN}= quantità di arachidi (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Num;
- x_{MN}= quantità di mandorle (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Num;
- x_{NN}= quantità di nocciole (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Num;
- x_{PN}= quantità di pistacchi (in kg) utilizzati per produrre snack di tipo Num;
- x_{PP}= quantità di pistacchi (in kg) utilizzati per produrre snack di tipo Pe;
- x_{AQ}= quantità di arachidi (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Qof;
- x_{MQ}= quantità di mandorle (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Qof;
- x_{NQ}= quantità di nocciole (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Qof;
- x_{PQ}= quantità di pistacchi (in kg) utilizzati per produrre snack di tipo Qof;
- y_M= numero di scatole di snack di tipo Mem prodotte;
- y_N= numero di scatole di snack di tipo Num prodotte;
- y_P= numero di scatole di snack di tipo Pe prodotte;
- y_Q= numero di scatole di snack di tipo Qof prodotte.

Stiamo supponendo per semplicità che le variabili y_i non siano vincolate a essere intere. Una formulazione del problema è quindi:

$$\max 260y_M + 400y_N + 510y_P + 520y_Q$$

$$
\begin{aligned}
x_{AM} &= 0,5y_M && (18)\\
x_{AN} + x_{MN} + x_{PN} + x_{NN} &= 0,5y_N && (19)\\
x_{PP} &= 0,5y_P && (20)\\
x_{AQ} + x_{MQ} + x_{NQ} + x_{PQ} &= 0,5y_Q && (21)\\
x_{AN} &\leq 0,25y_N && (22)\\
x_{MN} &\geq 0,05y_N && (23)\\
x_{PN} &\geq 0,075y_N && (24)\\
x_{MQ} &\geq 0,1y_Q && (25)\\
x_{NQ} &\geq 0,15y_Q && (26)\\
x_{PQ} &\geq 0,15y_Q && (27)\\
x_{AM} + x_{AN} + x_{AQ} &\leq 550 && (28)\\
x_{PP} + x_{PN} + x_{PQ} &\leq 150 && (29)\\
x_{MN} + x_{MQ} &\leq 90 && (30)\\
x_{NN} + x_{NQ} &\leq 70 && (31)\\
x, y &\geq 0 && (32)
\end{aligned}
$$

I vincoli (18)–(21) legano tra di loro le variabili x ed y relative ai quattro diversi prodotti. Si ricordi che una scatola pesa mezzo chilo, dunque se y_i è il numero di scatole di snack i, $0.5y_i$ indica il numero di chili prodotti di quello snack. I vincoli (22)–(24) e (25)–(27) rappresentano i vincoli sulle composizioni degli snack Num e Qof rispettivamente. Infine, i vincoli (28)–(31) impongono che la produzione non utilizzi più delle quantità massime di materie prime disponibili.

20

Studiando il comportamento resistivo di un nuovo materiale superconduttore, uno scienziato sottopone un campione del materiale a un valore di tensione x, e misura la corrente y da cui viene attraversato. In cinque esperimenti, egli ha ottenuto i seguenti valori.

tensione (x_i)	corrente (y_i)
1	0.23
2	0.45
3	0.79
4	1.25
5	1.85

Secondo la sua teoria, la dipendenza tra tensione (x) e corrente (y) può essere espressa nella forma $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Il problema è quello di determinare i parametri tali da minimizzare la somma degli scarti in valore assoluto dei punti che rappresentano i risultati degli esperimenti rispetto ai corrispondenti punti sulla curva $f(x)$. Formulare il problema come PL.

Soluzione. Si indichino con x_i e y_i, $i = 1, \dots, 5$, i valori di tensione e di corrente riportati in tabella. Il problema può essere formulato introducendo le variabili ausiliarie $s_1, \dots, s_5$, nel seguente modo:

$$\min s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5$$

$$|y_i - ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d| \ \leq \ s_i \quad i = 1, \dots, 5$$

i vincoli possono essere linearizzati ottenendo la seguente formulazione di PL:

$$\min s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5$$

$$\begin{aligned} y_i - ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d &\leq s_i \quad i = 1, \dots, 5 \\ y_i - ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d &\geq -s_i \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

21

La Ni'iar è un'industria cartaria che produce su ordinazione bobine di carta, di varie larghezze e colori. Queste sono ottenuti tagliando bobine standard, di larghezza 70 cm, che possono essere bianche o rosa. In questo mese la Ni'iar ha ricevuto un ordine di produzione con le seguenti specifiche:

larghezza (cm)	Quantità	Colore
12	2000	bianco
12	1500	rosa
15	1700	bianco
15	2100	indifferentemente bianco o rosa

Sapendo che il costo delle bobine rosa è 1.1 volte quello delle bobine bianche, formulare come problema di programmazione lineare il problema di minimizzazione del costo delle bobine da utilizzare per soddisfare l'ordine.

Soluzione. Per prima cosa costruiamo l'insieme delle possibili modalità di taglio. Per ogni taglio, troviamo il massimo numero di bobine di 12 e di 15 centimetri che possiamo ottenere, considerando anche la produzione delle bobine di colore indifferente. Per ogni bobina standard, sia essa bianca o rosa, possiamo avere allora i seguenti possibili tagli:

taglio	num bobine da 12	num bobine da 15
1	5	0
2	4	1
3	3	2
4	2	3
5	0	4

Indichiamo con x_{Bi} il numero di bobine standard di colore bianco tagliate con la modalità i, e con x_{Ri} il numero di bobine standard di colore rosa tagliate con la modalità i. Nell'esprimere i requisiti di produzione dobbiamo evidentemente tenere conto del fatto che alcune bobine possono essere indifferentemente bianche o rosa.

$$\begin{aligned}
5x_{B1} + 4x_{B2} + 3x_{B3} + 2x_{B4} &\geq 2000 \\
5x_{R1} + 4x_{R2} + 3x_{R3} + 2x_{R4} &\geq 1500 \\
x_{B2} + 2x_{B3} + 3x_{B4} + 4x_{B5} &\geq 1700 \\
x_{B2} + 2x_{B3} + 3x_{B4} + 4x_{B5} + x_{R2} + 2x_{R3} + 3x_{R4} + 4x_{R5} &\geq 3800
\end{aligned}$$

I primi tre vincoli corrispondono ai primi tre ordini. Per esprimere il fatto che devono poi essere prodotti almeno 2100 bobine da 15cm, di qualsiasi colore, andiamo a imporre che *complessivamente*, le bobine da 15cm prodotte, dovranno essere almeno 3800 – di cui almeno 1700 di colore bianco (vincolo precedente).

I 5 vincoli rappresentano, nell'ordine, i requisiti di produzione per le bobine bianche da 12, per le bobine rosa da 12, per le bobine bianche da 15, per le bobine rosa da 15, per le bobine da 15 indifferenti. Ovviamente, a questi vincoli dobbiamo aggiungere quelli di non negatività di tutte le variabili.
La funzione obiettivo da minimizzare è data da un coefficiente di costo pari a 1 per tutte le bobine standard bianche, e 1.1 per tutte le bobine standard rosa, e dunque da:

$$f(x) = x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4} + x_{B5} + 1.1(x_{R1} + x_{R2} + x_{R3} + x_{R4} + x_{R5})$$

22

Un agricoltore possiede 100 ettari di terreno che intende usare completamente per coltivare grano, mais, canna da zucchero, o per adibirlo a pascolo. Dei 100 ettari disponibili, 10 sono adatti per qualunque coltivazione, 50 sono adatti per qualunque coltivazione tranne che la canna da zucchero mentre i rimanenti 40 ettari possono essere adibiti solo a erba da pascolo. Inoltre, l'agricoltore può allevare delle mucche che richiedono, ciascuna, mezzo ettaro di terreno adibito a pascolo e che vengono vendute dopo un anno. L'agricoltore e i suoi familiari non intendono lavorare, nell'arco del prossimo anno, più di 2000 ore complessive.

	Grano	Mais	Canna	Erba
costo per ettaro (semi, fertiliz.)(euro)	600	300	800	50
prezzo vendita prodotto per ettaro (Keuro)	450	350	700	–
ore di lavoro per ettaro (in un anno)	12	14	20	5

Inoltre, allevare una mucca per poi rivenderla dà un profitto netto di 200 euro, e ogni mucca richiede in un anno 100 ore di lavoro. Formulare come programmazione lineare il problema di massimizzare il profitto dell'agricoltore.

Soluzione. Poiché l'agricoltore vuole massimizzare il profitto, appare evidente che tutto il terreno che può essere adibito a pascolo sarà sfruttato per l'allevamento delle mucche, essendo il profitto che se ne ottiene maggiore della spesa relativa. Modelliamo il problema con le variabili decisionali x_j che rappresentano, per ogni tipo di coltivazione j, la quantità di terreno (in ettari) da adibire ad essa. Indichiamo invece con un'altra variabile il numero di mucche, x_V, da allevare.
I vincoli sono di vari tipi. Anzitutto, abbiamo i vincoli sulla disponibilità e le caratteristiche del terreno, che sono:

$$\begin{aligned} x_C &\leq 10 \\ x_G &\leq 60 \\ x_M &\leq 60 \\ x_E &\geq 40 \end{aligned}$$

Il primo vincolo esprime il fatto che la canna da zucchero può essere coltivata solo in 10 ettari di terreno al massimo, il secondo e il terzo che il grano e il mais possono essere coltivati dappertutto tranne che nella parte che può essere adibita solo a pascolo, e l'ultimo che la quantità di terreno per il pascolo è sicuramente almeno pari a 40 ettari. A questi vincoli va aggiunto il vincolo di utilizzo complessivo del terreno, e cioè

$$x_G + x_M + x_C + x_E = 100$$

Abbiamo poi un unico vincolo sulle ore lavorative, che non devono superare il limite complessivo di 2000.

$$12x_G + 14x_M + 20x_C + 5x_E + 100x_V \leq 2000$$

A questo punto le variabili x_V e x_E devono essere correlate, esprimendo il fatto che ogni mucca richiede mezzo ettaro adibito a pascolo per essere allevata:

$$x_V \leq 2x_E$$

Si noti che la presenza di quest'ultimo vincolo consente di avere terreno destinato a pascolo e non necessariamente utilizzato per allevare mucche. Ovviamente tutte le variabili devono essere vincolate ad essere positive. Infine, la funzione obiettivo da massimizzare è data dalla differenza tra profitti e costi (espressi in migliaia di euro), e cioè

$$z = 450x_G + 350x_M + 700x_C + 0,2x_V - 0,6x_G - 0,3x_M - 0,8x_C - 0,05x_E$$

23

La società petrolifera Benzine&Benzine, produce tre carburanti: Super, Diesel e SuperUltra, i cui prezzi di vendita sono, rispettivamente, 40, 30 e 50 centesimi di euro al litro. Il margine di profitto per i tre carburanti è pari a 4, 3 e 10 centesimi di euro rispettivamente. La società desidera realizzare un incasso mensile non inferiore a mezzo milione di euro. Il processo produttivo di Super e Diesel genera un residuo tossico da smaltire pari a 5 grammi di residuo per litro prodotto e 8 grammi di residuo per litro di SuperUltra prodotto. Il residuo tossico viene smaltito, nello stesso mese di produzione, in un impianto apposito che ha una capacità massima di 2 tonnellate/mese. La SuperUltra è meno richiesta dal mercato, per cui per poter vendere un litro di SuperUltra è necessario vendere almeno 2 litri di Super. Formulare come PL il problema di decidere la quantità di litri da produrre dei tre carburanti al fine di massimizzare i profitti della Benzine&Benzine.

Soluzione. Indicando con x_1, x_2, x_3 il quantitativo in litri di Super, Diesel e SuperUltra prodotte la formulazione diviene:

$$\max 0.04x_1 + 0.03x_2 + 0.1x_3$$

$$\begin{aligned} 0.4x_1 + 0.3x_2 + 0.5x_3 &\geq 500000 \\ 5x_1 + 5x_2 + 8x_3 &\leq 2000000 \\ x_1 - 2x_3 &\geq 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

dove i coefficenti della funzione obiettivo rappresentano il margine di profitto sul costo di vendita (in euro), il primo vincolo è relativo all'incasso totale, il secondo ai residui tossici, e il terzo vincolo alla produzione di SuperUltra.

24

La Seafood&C si compone di tre stabilimenti (che chiameremo A, B e C) in cui si allevano vongole. La produzione di vongole comporta l'emissione di sostanze inquinanti. Per ogni inquinante, nella tabella seguente sono riportate le emissioni di ogni stabilimento per unità di produzione (quintale di vongole), la produzione attuale (in quintali di vongole) e il prezzo di vendita (al quintale).

	fosfati	carbonati	nitrati	azoto	produzione attuale	prezzo
A	2	2	1	4	20	50
B	1	1	5	6	30	60
C	1	2	3	3	10	40

Nel prossimo periodo, si richiede che ogni stabilimento abbia un livello di produzione almeno pari a quello attuale, e non superiore a 500 quintali di vongole. Leggi sulla tutela ambientale impongono inoltre che nella zona interessata non si possano avere valori complessivi degli inquinanti più alti di quelli riportati in tabella seguente.

	fosfati	carbonati	nitrati	azoto
quintali	100	210	180	250

Formulare come PL il problema di massimizzare il profitto complessivo, nel rispetto dei vincoli descritti.

Soluzione. Indicando con x_A, x_B, x_C il quantitativo di vongole (in quintali) prodotte da ogni stabilimento la formulazione diviene:

$$
\begin{aligned}
\max 50x_A + 60x_B + 40x_C & & \\
2x_A + x_B + x_C &\leq 100 \\
2x_A + x_B + 2x_C &\leq 210 \\
x_A + 5x_B + 3x_C &\leq 180 \\
4x_A + 6x_B + 3x_C &\leq 250 \\
x_A &\geq 20 \\
x_B &\geq 30
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_C &\geq 10 \\
x &\leq 500
\end{aligned}
$$

dove i coefficenti della funzione obiettivo rappresentano il profitto ottenibile dalla vendita di vongole, i primi quattro vincoli rappresentano i vincoli di tutela ambientale, mentre i rimanenti vincoli rappresentano i limiti produttivi inferiori (dati dalla produzione nel periodo precedente) e superiori (dati dalla massima capacità degli stabilimenti).

25

La Banca di Kashrilevche deve acquistare dei titoli di stato di varie nazioni che andranno a formare delle quote di due prodotti finanziari venduti dalla banca (Sviluppo e Espansione). La Banca può acquistare fino a 1000000 titoli di stato di Costarica (7 euro l'uno), 2000000 titoli di stato dell'Argentina (13 euro l'uno), 3000000 titoli di stato dell'Iran (4 euro l'uno), e una quota di ogni prodotto finanziario è composta esattamente da 100 titoli di stato. La banca ha stimato di poter vendere precisamente 7000 quote Sviluppo e 3000

Prodotto	Costarica	Argentina	Iran
Sviluppo	assenti	almeno 40%	almeno 40%
Espansione	non più del 40%	assenti	almeno 80%

quote Espansione. Si formuli il problema di PL di formare le quote richieste cercando di minimizzare i costi di acquisto dei titoli da parte della banca.

Soluzione. Indicando ad apice la nazione (C per Costarica, A per Argentina e I per Iran) e a pedice il prodotto finanziario (S per Sviluppo, E per Espansione) le quattro variabili per formulare il problema sono $x_S^A, x_S^I, x_E^C, x_E^I$. La variabili rappresentano il numero di titoli di stato che componogono una quota di ogni tipo di prodotto finanziario. La formulazione diviene:

$$
\min 7(3000x_E^C) + 13(7000x_S^A) + 4(7000x_S^I + 3000x_E^I)
$$

$$
\begin{aligned}
3000x_E^C &\leq 1000000 \\
7000x_S^A &\leq 2000000 \\
3000x_E^I + 7000x_S^I &\leq 3000000 \\
x_S^A &\geq 40 \\
x_S^I &\geq 40 \\
x_E^C &\leq 40 \\
x_E^I &\geq 80
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_S^A + x_S^I &= 100 \\
x_E^C + x_E^I &= 100 \\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$

dove i coefficenti della funzione obiettivo rappresentano il costo di acquisto delle 3000 quote di Sviluppo e delle 7000 quote di Espansione da parte della banca. I primi vincoli rappresentano il massimo numero di titoli di stato reperibili sul mercato, mentre i seguenti sei vincoli rappresentano i vincoli di composizione delle quote dei due prodotti finanziari e il fatto che devono essere composti esattamente da 100 titoli di stato ognuno.

26

L'azienda Program&Co produce software e deve decidere quanto tempo impiegare la prossima settimana su ogni progetto che sta portando avanti. In tabella sono indicati i progetti che possono essere eseguiti la prossima settimana, il minimo e massimo numero di ore di programmazione da impiegare su ogni progetto e il profitto per ogni ora di progetto svolto. La Program&Co dispone di quattro dipendenti programmatori. Formulare il problema di massimizzare il profitto dell'azienda, sapendo che ogni dipendente lavora al più 40 ore alla settimana e che ogni programmatore non può lavorare per più di 20 ore alla settimana sullo stesso progetto.

Progetti	Numero di ore minimo-massimo	Profitto orario
sviluppo di portali web	50-80	60 euro
applicativi bancari	30-120	80 euro
gestionali per benzinai	5-80	50 euro

Soluzione. Indicando con x_{ij} il numero di ore lavorate dal programmatore i sul progetto j la formulazione diviene:

$$
\begin{aligned}
\max 60(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}) &+ 80(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}) + 50(x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}) \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &\leq 80 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &\geq 50 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &\leq 120 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &\geq 30 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &\leq 80 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &\geq 5 \\
x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 40
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 40 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 40 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} &\leq 40 \\
x &\leq 20 \\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$

Dove i termini della funzione obiettivo rappresentano il guadagno della Program&Co. Le prime tre coppie di vincoli limitano il numero minimo e massimo di ore svolte dai programmatori sui tre progetti, mentre i quattro vincoli seguenti rappresentano il massimo numero di ore che ogni programmatore può lavorare in una settimana. Infine gli ultimi due vincoli definiscono il numero massimo e minimo di ore che un programmatore può svolgere su ogni progetto software.

27

In una segheria si vogliono produrre dei pezzi di legno per delle scaffalature a partire da un insieme di assi di legno lunghe un metro. Le assi di legno possono essere tagliate in diverse modalità al fine da produrre pezzi da 30cm, 50cm e 70cm. In particolare si vogliono produrre 70 pezzi da 30cm, 62 da 50cm e 37 da 70cm, avendo a disposizione 150 assi. L'obiettivo è quello di minimizzare i costi, tenendo presente che per ogni taglio che viene effettuato secondo una data modalità ha un costo che dipende da quanti pezzi sono prodotti, come riportato in tabella.

Pezzi prodotti da un'asse	Costo in centesimi di euro
1	10
2	25
3	40

Formulare il problema come un problema di PL.

Soluzione. Si indica con x_i il numero di assi tagliate secondo una data modalità di taglio. In particolare, le configurazioni possibili di tagli sono 8: x_1 un pezzo da 70cm, x_2 un pezzo da 50cm e x_3 un pezzo da 30cm, x_4 un pezzo da 70cm e uno da 30cm, x_5 un pezzo da 50cm e uno da 30cm, x_6 due pezzi da 50cm x_7 due pezzi da 30cm e infine x_8 produce 3 pezzi da 30cm. La formulazione diviene:

$$
\begin{aligned}
\min 10(x_1 + x_2 + x_3) + 25(x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + 40x_8 & \\
x_1 + x_4 &\geq 37 \\
x_2 + x_5 + 2x_6 &\geq 62
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &= 150 \\
x_3 + x_4 + x_5 + 2x_7 + 3x_8 &\geq 70 \\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$

dove la funzione obiettivo tende a minimizzare i costi di taglio, ed i vincoli tengono conto del numero di pezzi prodotti da ogni tipologia di taglio.

28

La SweetDreams, azienda leader nella produzione di materassi, deve pianificare la produzione nella prossima settimana dell'operaio Mario. Mario ha a sua disposizione l'uso di due macchine, A e B. Nella possima settimana la macchina A può essere usata al più 27 ore, mentre la macchina B è a disposizione di Mario per non più di 18 ore. Inoltre si tenga conto che Mario, per contratto, deve lavorare *esattamente* 40 ore settimanali. Mario può produrre tre tipologie differenti di materassi, ogni materasso richiede un certo numero di ore lavorative sulla macchina A e sulla macchina B come riportato in tabella. In tabella viene anche riportato il costo delle materie prime necessarie alla produzione dei vari materassi ed il numero di ordini già effettuati da alcuni clienti, la cui domanda dovrà necessariamente essere soddisfatta.

	Ore Macchina A	Ore Macchina B	Costo (euro)	Domanda
Fachiro	3	2	68	3
Dormibene Bimbo	6	1	85	2
GoldenDream DeLuxe	2	6	103	1

Formulare il problema di PL per decidere quanti materassi di ciascun tipo Mario debba produrre al fine di minimizzare i costi di produzione.

Soluzione. Si indica con x_1 il numero di materassi prodotti da Mario per ogni tipologia (x_1 indica il numero di materassi Fachiro, e x_3 i GoldenDream DeLuxe). La formulazione diviene:

$$
\begin{aligned}
\min 68x_1 + 85x_2 + 103x_3 & \\
3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &\leq 27 \\
2x_1 + x_2 + 6x_3 &\leq 18 \\
5x_1 + 7x_2 + 8x_3 &= 40 \\
x_1 &\geq 3 \\
x_2 &\geq 2 \\
x_3 &\geq 1
\end{aligned}
$$

dove la funzione obiettivo tende a minimizzare i costi di produzione dei vari tipi di materassi, i primi tre vincoli impongono delle limitazioni sul numero di ore lavorate sulla macchina A, B e complessivamente da Mario, e i rimanenti vincoli tengono conto dei materassi già prenotati dai clienti.

29

Il Giocattolificio, azienda leader nella produzione di giocattoli, deve decidere la produzione per il prossimo mese. Il Giocattolificio produce due tipi di macchinine, TurboSpider e Gippone. Ciascuna macchinina richiede diverse quantità di materie prime, come rappresentato in tabella. In tabella vengono anche riportati gli ordini effettuati da alcuni clienti, la cui domanda dovrà necessariamente essere soddisfatta. Il Giocattolificio ha a

	Metallo	Plastica	Ruote	Profitto (euro)	Domanda
TurboSpider	20 gr	30 gr	4	13	300
Gippone	6 gr	70 gr	5	25	400

disposizione nei magazzini 13 Kg di metallo, 55 Kg di plastica e 4800 ruote. Limitazioni produttive impongono che lo stabilimento non sia in grado di produrre più di 1000 macchinine al mese, e inoltre, per motivi di obsolescenza dei materiali, si vuole impiegare *tutto* il metallo presente in magazzino. Formulare il problema di PL per decidere quante macchinine di ciascun tipo debbano essere prodotte al fine di massimizzare i profitti de Il Giocattolificio.

Soluzione. Indicando con x_1 il numero di TurboSpider prodotte, e con x_2 il numero di Gipponi prodotti la formulazione diviene:

$$\begin{array}{rcl}
\max 13x_1 + 25x_2 & & \\
x_1 + x_2 & \leq & 1000 \\
20x_1 + 6x_2 & = & 13000 \\
30x_1 + 70x_2 & \leq & 55000 \\
4x_1 + 5x_2 & \leq & 4800 \\
x_1 & \geq & 300 \\
x_2 & \geq & 400
\end{array}$$

Dove la funzione obiettivo tende a massimizzare i profitti. I primi vincoli impongono delle limitazioni sulla capacità produttiva dello stabilimento, e sulle materie prime presenti in magazzino. Mentre i rimanenti vincoli tengono conto degli ordinativi da soddisfare.

30

E' stato commissionato alla vostra piccola software house il progetto di sviluppo di sito web. Il progetto consisite nello sviluppare una applicazione che si interfacci anche con un database, per cui richiede lo sviluppo di un programma. Visto che avete intenzione di accettare altre commesse simili avete deciso di dedicare il maggior tempo possibile allo sviluppo del programma, in modo da guadagnare esperienza nel campo e nella speranza di riuscire a sviluppare più rapidamente progetti simili. Lo scopo è quello di riuscire a massimizzare le ore spese nella programmazione. Sono stati individuati i seguenti compiti da svolgere:

- Supervisione (1): Questo compito richiede almeno 20 ore a cui vanno aggiunte almeno il 10% delle ore spese nella programmazione.
- Relazioni esterne (2): Richiede almeno 25 ore.
- Grafica (3): Lo sviluppo del layout grafico del sito richiede almeno 5 ore, a cui vanno aggiunte il 10% delle ore spese nella programmazione.
- Sistemista (4): Per amministrare i sistemi sono necessarie almeno 40 ore.
- Programmazione (5): Lo sviluppo dei programmi richiede almeno 10 ore.

Il personale che si ha a disposizione per svolgere questo progetto consiste in tre persone, un direttore, un tecnico e un segretario. Tutto il personale è disponibile per lo sviluppo del progetto per una settimana, ovvero per 40 ore di lavoro. Il direttore è in grado di svolgere i compiti di supervisione, e di relazioni esterne. Inoltre è in grado di usare un programma di grafica, per cui può svolgere il compito di Grafica. Va comunque specificato che il direttore non è molto esperto nell'uso di questo programma, per cui ogni sua ora spesa in questo compito equivale ad un avanzamento di mezz'ora. Il tecnico è in grado di programmare, sviluppare grafica, e amministrare il sistema. Il segretario sa svolgere il compito di relazioni esterne, e inoltre è in grado di usare un programmare e svolgere i compiti da sistemista, ma in entrambi questi compiti ogni ora spesa equivale ad un avanzamento di mezz'ora.

Soluzione. Si introducono le seguenti 9 variabili che rappresentano le ore spese da una persona (d, t, s) su ogni compito (1, 2, 3, 4, 5): x_{d1}, x_{d2}, x_{d3} (direttore), x_{t3}, x_{t4}, x_{t5} (tecnico) e x_{s2}, x_{s4}, x_{s5} (segretario). La funzione obiettivo è di massimizzare le ore spese nella programmazione, rispettando i vincoli sul compito di supervisione, sul compito di relazioni esterne, sul compito di grafica, sul compito di sistemista, sul compito di programmazione e i vincoli sulle ore di lavoro del direttore, del tecnico, del segretario, e i vincoli di non negatività delle variabili.

$$
\begin{array}{rcl}
\max x_{t5} + x_{s5}/2 & & \\
x_{d1} & \geq & 20 + 0.1(x_{t5} + x_{s5}/2) \\
x_{d2} + x_{s2} & \geq & 25 \\
x_{d3}/2 + x_{t3} & \geq & 5 + 0.1(x_{t5} + x_{s5}/2) \\
x_{t4} + x_{s4}/2 & \geq & 40 \\
x_{t5} + x_{s5}/2 & \geq & 10 \\
x_{d1} + x_{d2} + x_{d3} & \leq & 40 \\
x_{t3} + x_{t4} + x_{t5} & \leq & 40 \\
x_{s2} + x_{s4} + x_{s5} & \leq & 40 \\
x & \geq & 0
\end{array}
$$

31

Un altro sito web è stato commissionato alla vostra piccola software house. Questo progetto ha dimensioni maggiori del precedente, e richiede lo sviluppo di un elegante layout grafico e anche il riuso di parte del software sviluppato nel progetto precedente. Lo scopo è quello di riuscire a minimizzare gli straordinari da pagare al team di sviluppo. Sono stati individuati i seguenti compiti da svolgere:

- Supervisione (1): Questo compito richiede almeno 30 ore.
- Relazioni esterne (2): Richiede almeno 30 ore.
- Grafica (3): Lo sviluppo del layout grafico del sito richiede almeno 20 ore.
- Sistemista (4): Per amministrare i sistemi sono necessarie almeno 40 ore.
- Programmazione (5): Lo sviluppo dei programmi richiede almeno 5 ore.

Il personale che si ha a disposizione per svolgere questo progetto consiste in tre persone, un direttore, un tecnico e un segretario. Tutto il personale è disponibile per lo sviluppo del progetto per una settimana, ovvero per 40 ore di lavoro. Inoltre tutto il personale può svolgere fino a 10 ore di straordinario che verranno retribuite con 100 euro l'ora per il direttore, 50 euro l'ora per il tecnico e 30 euro l'ora per il segretario. Il direttore è in grado di svolgere i compiti di supervisione, e di relazioni esterne. Inoltre è in grado di usare un programma di grafica, per cui può svolgere il compito di Grafica. Va comunque specificato che il direttore non è molto esperto nell'uso di questo programma, per cui ogni sua ora spesa in questo compito equivale ad un avanzamento di mezz'ora. Il tecnico è in grado di programmare, sviluppare grafica, e amministrare il sistema. Il segretario sa svolgere il compito di relazioni esterne, e inoltre è in grado di usare un programmare e svolgere i compiti da sistemista, ma in entrambi questi compiti ogni ora spesa equivale ad un avanzamento di mezz'ora.

Soluzione. Si introducono le seguenti 9 variabili che rappresentano le ore spese da una persona (d, t, s) su ogni compito (1, 2, 3, 4, 5): x_{d1}, x_{d2}, x_{d3} (direttore), x_{t3}, x_{t4}, x_{t5} (tecnico) e x_{s2}, x_{s4}, x_{s5} (segretario). Inoltre introduciamo anche tre variabili che rappresentano gli straordinari per ogni persona (s_d, s_t, s_s). La funzione obiettivo è di minimizzare gli straordinari, rispettando i vincoli sul compito di supervisione, sul compito di relazioni esterne, sul compito di grafica, sul compito di sistemista, sul compito di programmazione e i vincoli sulle ore di lavoro del direttore, del tecnico, del segretario, e i vincoli sul massimo numero di straordinari e di non negatività delle variabili.

$$
\begin{aligned}
\min 100s_d + 50s_t + 30s_s & \\
x_{d1} &\geq 30 \\
x_{d2} + x_{s2} &\geq 30 \\
x_{d3}/2 + x_{t3} &\geq 20 \\
x_{t4} + x_{s4}/2 &\geq 40 \\
x_{t5} + x_{s5}/2 &\geq 5 \\
x_{d1} + x_{d2} + x_{d3} &\leq 40 + s_d \\
x_{t3} + x_{t4} + x_{t5} &\leq 40 + s_t \\
x_{s2} + x_{s4} + x_{s5} &\leq 40 + s_s \\
s &\leq 10 \\
x, s &\geq 0
\end{aligned}
$$

32

L'Atelier del Dépliant è uno studio di design, e deve produrre un depliant per un cliente. Il depliant deve essere consegnato entro due settimane, e al termine della prima settimana, si terrà una riunione con il cliente per verificare il lavoro svolto. Due persone sono adibite alla produzione di questo depliant: Alberto e Bruno. Alberto e Bruno sono comunque impegnati anche in altri progetti e possono dedicare a questo lavoro solamente 20 ore

(Alberto) e 15 ore (Bruno) nella prima settimana e 10 ore (Alberto) e 15 ore (Bruno) nella seconda settimana. I compiti da svolgere sono i seguenti: disegno del logo, scrittura del testo e impaginazione del testo. Il disegno del logo richiede almeno 30 ore di lavoro, la scrittura del testo richiede almeno 20 ore di lavoro, e l'impaginazione del testo richiede almeno 10 ore di lavoro. La scrittura del testo va ultimata entro la prima settimana. Per quanto riguarda il disegno del logo alla fine della prima settimana bisogna presentare un bozzetto, il che richiede almeno 10 ore di lavoro e non più di 20 ore. Naturalmente al termine della seconda settimana il logo va terminato. Infine durante la prima settimana non è possibile lavorare all'impaginazione del testo, per cui l'impaginazione va svolta interamente nella seconda settimana. Alberto è un bravo disegnatore, e ogni ora impiegata a disegnare il logo fanno avanzare il compito di 1 ora, mentre 2 ore di lavoro nel compito dell'impaginazione fanno avanzare il compito di 1 ora. Inoltre Alberto non è un bravo scrittore e 3 ore di lavoro portano all'avanzamento di 1 ora. Bruno è abile a scrivere i testi, infatti ogni ora di lavoro in questo compito portano ad un avanzamento di 1 ora, mentre 2 ore di lavoro di Bruno nel disegno del logo sono equivalenti ad 1 ora di avanzamento del compito. Sfortunatamente Bruno non è in grado di usare il programma dell'impaginazione e quindi non può lavorare a quel compito. L'obiettivo è quello di minimizzare i costi, sapendo che Alberto viene pagato 80 euro all'ora la prima settimana e 100 euro l'ora nella seconda settimana, mentre Bruno viene pagato 50 euro l'ora sia la prima che la seconda settimana.

Soluzione. Si introducono le seguenti variabili: x_{ijk}, con $i = \{a, b\}$ (dove $a =$ Alberto, e $b =$ Bruno) e $j = \{L, S, I\}$ (con $L =$ Logo, $S =$ Scrittura, $I =$ Impaginazione) e $k = \{1, 2\}$ ($1 =$ Prima Settimana, $2 =$ Seconda Settimana) che rappresentano le ore spese dalla persona i a lavorare sul compito j nella settimana k.
In particolare le variabili x_{bIk}, x_{iI1}, x_{iS2} sono superflue per cui non verranno considerate. Infatti Bruno non può lavorare al compito Impaginazione, e la scrittura va terminata entro la prima settimana, mentre l'impaginazione non può essere svolta nella seconda settimana.

La funzione obiettivo sarà la minimizzazione dei costi con i vincoli rappresentati dal massimo numero di ore di lavoro di Alberto e Bruno nella prima e seconda settimana, e dai vincoli sul numero di ore spese per la creazione del Logo, e della Scrittura e dell'Imapginazione. La formulazione di PL è data dal seguente sistema:

$$\min 80 * (x_{aL1} + x_{aS1}) + 100 * (x_{aL2} + x_{aI2}) + 50 * (x_{bL1} + x_{bS1} + x_{bL2})$$
$$\begin{aligned} x_{aL1} + x_{aS1} &\leq 20 \\ x_{aL2} + x_{aI2} &\leq 15 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_{bL1} + x_{bS1} &\leq 10 \\
x_{bL2} &\leq 15 \\
x_{aL1} + x_{bL1}/2 &\geq 10 \\
x_{aL1} + x_{bL1}/2 &\leq 20 \\
x_{aL1} + x_{bL1}/2 + x_{aL2} + x_{bL2}/2 &\geq 30 \\
x_{aS1}/3 + x_{bS1} &\geq 20 \\
x_{aI2}/2 &\geq 10
\end{aligned}
$$

Esercizi svolti – riepilogo

33

La Svivon produce batterie elettriche di tre tipi (Alef, Beth e Ghimel). Per due di esse (Beth e Ghimel) utilizza del rame. Per coprire la produzione del prossimo mese, può acquistare il rame al prezzo di 5 euro/kg. Il fornitore però non può fornire più di 4000 kg di rame. Nella seguente tabella sono indicate: la quantità di rame richiesta per produrre una scatola di ciascuna batteria, i costi di manodopera (per scatola prodotta) e prezzi di vendita al pubblico (per scatola):

	Rame (kg per scatola)	costi di manodopera	prezzo di vendita
ALEF	-	12	25
BETH	1	6	20
GHIMEL	2	4	30

I tre tipi di batteria devono essere prodotti in quantità tali che il numero di scatole di batterie Alef sia almeno doppio del numero di scatole di Beth e non superiore al numero di scatole di Ghimel.

1) Formulare come PL il problema di pianificare la produzione della Svivon in modo ottimo.

2) Dimostrare che la soluzione consistente nel produrre 2000 unità di Alef e altrettante di Ghimel (e nessuna scatola di Beth) è ottima (possibilmente utilizzando le condizioni di ortogonalità).

Soluzione. Le variabili di decisione sono la quantità di scatole dei tre tipi di batterie, che indicheremo con x_A, x_B, x_G. La funzione obiettivo da massimizzare è il profitto totale, meno i costi totali. Il profitto è dato evidentemente da

$$25x_A + 20x_B + 30x_G$$

a questo vanno sottratti i contributi del costo del rame e della manodopera, pari rispettivamente a

$$5(x_B + 2x_G)$$

e

$$12x_A + 6x_B + 4x_G$$

e dunque, riordinando i termini, la funzione obiettivo risulta

$$13x_A + 9x_B + 16x_G$$

I vincoli sono tre. Il primo esprime il vincolo sulla disponibilità di rame:

$$x_B + 2x_G \leq 4000$$

il secondo e il terzo riguardano invece i vincoli sulla produzione di batterie Alef:

$$x_A \geq 2x_B$$

$$x_A \leq x_G$$

l'aggiunta dei vincoli di non negatività completa la formulazione. 2. Per rispondere alla seconda domanda, possiamo seguire due vie: usare le condizioni di KKT, ovvero la complementarietà, oppure utilizzare il criterio di ottimalità del metodo del simplesso. Vediamo come si risolveva in ambedue i modi. Iniziamo con la complementarietà. Riscriviamo il problema come:

$$\max 13x_A + 9x_B + 16x_G$$

$$\begin{array}{rcl} x_B + 2x_G & \leq & 4000 \\ -x_A + 2x_B & \leq & 0 \\ x_A - x_G & \leq & 0 \\ x_j & \geq & 0 \end{array}$$

il problema duale è:

$$\min 4000u_1$$

$$\begin{array}{rcl} -u_2 + u_3 & \geq & 13 \\ u_1 + 2u_2 & \geq & 9 \\ 2u_1 - u_3 & \geq & 16 \\ u_i & \geq & 0 \end{array}$$

Si tratta di dimostrare che la soluzione $(2000, 0, 2000)$ è ottima per il problema primale. Dalla complementarietà, il fatto che $x_A > 0$ e $x_G > 0$ nella soluzione proposta, risulta che deve essere

$$\begin{aligned} -u_2 + u_3 &= 13 \\ 2u_1 - u_3 &= 16 \\ u_i &\geq 0 \end{aligned}$$

un'altra condizione può essere ricavata dalla dualità forte. Osserviamo a questo proposito che il valore ottimo della funzione obiettivo del problema primale è dunque

$$13 \cdot 2000 + 9 \cdot 0 + 16 \cdot 2000 = 58000$$

e dunque dev'essere

$$4000u_1 = 58000$$

da cui $u_1 = 14.5$. Dalle altre due si ricava $u_3 = 13$ e $u_2 = 0$. Osservando che la soluzione $(14.5, 0, 13)$ è ammissibile per il problema duale, risulta dimostrato che $(2000, 0, 2000)$ è ottima per il problema primale.

Una strada alternativa era quella di fare uso del criterio di ottimalità. Si tratta allora di capire quale base corrisponde alla soluzione $(2000, 0, 2000)$. A tale scopo, riscriviamo il problema in forma standard:

$$\min -13x_A - 9x_B - 16x_G$$

$$\begin{aligned} x_B + 2x_G + s_1 &= 4000 \\ -x_A + 2x_B + s_2 &= 0 \\ x_A - x_G + s_3 &= 0 \\ x_j, s_i &\geq 0 \end{aligned}$$

in cui si noti l'aggiunta delle tre variabili di slack s_1, s_2, s_3. Inserendo la soluzione proposta nelle tre equazioni, si ha che $s_1 = s_3 = 0$ mentre $s_2 = 2000$. Dunque, la base corrispondente alla soluzione $(2000, 0, 2000)$ è necessariamente quella costituita dalle variabili x_A, x_G, s_2, ossia

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_B^T = (-13 \quad -16 \;\; 0) \;\; c_F^T = (-9 \;\; 0 \;\; 0)$$

mentre

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

di conseguenza si ha

$$\bar{c}_F^T = c_F^T - c_B^T B^{-1} F = (-9 \;\; 0 \;\; 0) - (-13 \quad -16 \;\; 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\frac{11}{2} \;\; \frac{29}{2} \;\; 13)$$

e dunque, essendo tutti i costi ridotti non negativi, la soluzione proposta è ottima.

34

Un'officina meccanica produce pezzi di ricambio per trattori. I vari ricambi possono essere raggruppati in 5 tipi, ognuno dei quali richiede un certo tempo di lavorazione su vari macchinari. Il tempo (in ore) richiesto da ciascun pezzo su ciascuna macchina, il profitto (in euro) derivante dalla produzione di ciascun pezzo e il tempo-macchina disponibile nel prossimo mese sono indicati in tabella.

	1	2	3	4	5	ore disponibili
fresatura	2	1.5	1	1	2	200
taglio	1	2	2.5	2	1	80
ispezione	2	1	2	1.5	1.5	100
profitto un.	100	60	90	80	60	

Un vostro collega sostiene che la cosa più conveniente è produrre solo pezzi dei primi due tipi, e di non usare tutte le 200 ore di fresatura disponibili (mentre le ore di taglio e ispezione vanno usate completamente). Sapreste dire se ha ragione o meno?

Soluzione. Si tratta di un classico problema di allocazione di risorse. Indichiamo con $x_1, \ldots, x_5$ le variabili di decisione, che rappresentano il numero di unità dei cinque tipi che devono essere prodotte. La formulazione è quindi, in forma standard

$$\begin{aligned} \max 100x_1 + 60x_2 + 90x_3 + 80x_4 + 60x_5 & \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 2x_5 + s_1 &= 200 \\ 1x_1 + 2x_2 + 2.5x_3 + 2x_4 + 1x_5 + s_2 &= 80 \\ 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1.5x_4 + 1.5x_5 + s_3 &= 100 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

dove si noti l'aggiunta delle variabili di slack. Dalle informazioni date, abbiamo che la base ottima proposta è costituita dalle variabili x_1, x_2 e s_1, dunque si tratta di

$$B = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

mentre

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_B^T = (-100 \quad -60 \;\; 0) \;\; c_F^T = (-90 \quad -80 \quad -60 \;\; 0 \;\; 0)$$

inserendo i valori numerici nell'espressione dei costi ridotti si ha

$$\bar{c}_F^T = c_F^T - c_B^T B^{-1} F = (20 \;\; 10/3 \;\; 50/3 \;\; 20/3 \;\; 140/3)$$

e dunque, poiché $\bar{c}_F^T \geq 0$, dovete concludere che il vostro collega ha ragione.

Esercizi proposti - dualità

35

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{llllllll}
\min & 3x_1 & -5x_2 & & -3x_4 & -x_5 & \\
s.t. & x_1 & +3x_2 & -3x_3 & +2x_4 & +x_5 & \leq 4 \\
 & 2x_1 & -1.5x_2 & +4x_3 & +3x_4 & -0.5x_5 & \leq 4 \\
 & & & & & x_j & \geq 0
\end{array}$$

Si calcoli la soluzione ottima del problema duale sapendo che in quella del primale $x_2 \neq 0$ e $x_3 \neq 0$.

36

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 &\leq 30 \\
x_1 + 2x_2 &\geq 10 \\
x_1 - x_2 &\leq 1 \\
x_2 - x_1 &\leq 1 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

a) Scrivere il problema duale

b) Utilizzando le condizioni di ottimalità, trovare la soluzione ottima del duale sapendo che quella del primale è $(27/5, 32/5)$.

37

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z = 7x_1 + 10x_2$$

$$\begin{aligned}
2x_1 - 4x_2 + x_3 &\leq 10 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 5 \\
x_1 - 3x_2 + 3x_3 &\geq 4 \\
x_j &\geq 0
\end{aligned}$$

Trovare la soluzione ottima del duale sapendo che quella del primale è $(23/5, 1/5, 0)$. (Risposta: $(0, 31/5, 4/5)$)

38

Dato il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned}
\min z = 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 & \\
-x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\
x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\
x_j &\geq 0
\end{aligned}$$

1. Scrivere il problema duale.

2. Verificare che (1/2,1/2) è una soluzione ottima del duale e trovare la soluzione ottima del problema primale.

39

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned}
\min 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & \\
2x_1 + x_2 &\geq 1 \\
2x_2 + x_3 &\geq 1 \\
2x_3 + x_4 &\geq 1 \\
2x_4 + x_5 &\geq 1 \\
x_i &\geq 0
\end{aligned}$$

Trovare la soluzione ottima del problema sapendo che la soluzione ottima del duale è (1,0,1/2,1/4).

40

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned}
\min z = x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 & \\
3x_1 + x_2 - x_3 = 2 & \\
x_2 - 2x_3 = 1 & \\
x_3 + 4x_4 = 5 & \\
x_i &\geq 0
\end{aligned}$$

1. Dimostrare che, nella soluzione ottima, $x_3 = 0$.

2. Calcolare la soluzione ottima del problema duale.

41

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min z = -6x_1 - 8x_2$$
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq -3 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 5 \\ 1/2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Scrivere il problema duale e individuarne la soluzione ottima, sapendo che per la soluzione ottima del problema primale vale $x_1^* = 4$ e $x_2^* = 4$.

42

Si consideri il problema di PL

$$\min 3x_1 + 2x_2 - 4x_3$$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\geq 3 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 &\geq -5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si trovi la soluzione ottima del problema sapendo che la soluzione ottima del problema duale è $(u_1, u_2) = (10/3, 11/3)$.

43

Si consideri il problema di PL

$$\min \quad -x_1 - 2x_2 \tag{33}$$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= -3 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_1 + 5x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{34}$$

Trovare la soluzione ottima del problema duale sapendo che il valore ottimo della soluzione primale è $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 6$.

44

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min z = -x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 1 \\ x_2 - x_1 &\geq -10 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Scrivere il problema duale e individuarne la soluzione ottima, sapendo che per la soluzione ottima del problema primale vale $x_1^* = 1$ e $x_2^* = 4$.

45

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Trovare la soluzione ottima del problema duale sapendo che nella soluzione ottima del problema dato, x_1 è l'unica variabile uguale a 0.

46

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min z = x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 2 \\ x_2 - 2x_3 &\geq 3 \\ x_3 + 3x_4 &\leq 8 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Trovare la soluzione ottima del problema sapendo che la soluzione ottima duale è $u^* = (0, 2, 1/3)$.

47

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 & \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 &\geq 5 \\ 3x_1 - 7x_2 - 3x_3 &\leq 6 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Dimostrare che la soluzione ottima del problema è $x^* = (0, 0, 5/2)$.

48

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} \min 4x_1 + x_2 + 5x_3 & \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\geq 3 \\ 3x_1 + 2x_3 &\geq 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si calcoli la soluzione del problema duale sapendo che la soluzione ottima del problema è $x^* = (4/3, 4/3, 0)$.

49

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} \min x_1 + x_3 & \\ 4x_1 + 2x_2 &\geq 5 \\ 2x_2 + 2x_3 &\geq 4 \\ 2x_1 + x_3 &\geq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si calcoli la soluzione del problema duale sapendo che nella soluzione ottima del problema $x_1^* = 3$, $x_2^* = 2$. (Soluzione $u_1^* = 0$, $u_2^* = 0$ e $u_3^* = 1/2$).

50

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$
\begin{aligned}
\min 2x_1 + 3x_2 + x_3 & \\
4x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\
3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\geq 4 \\
x_1 + x_3 &\geq 3 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Si calcoli la soluzione del problema duale sapendo che la soluzione ottima del problema è $x_1^* = 3/4$, $x_2^* = 0$ e $x_3^* = 9/4$.

51

Si consideri il seguente problema di PL.

$$
\begin{aligned}
\min z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 & \\
3x_1 + x_2 &\geq 2 \\
x_2 + 2x_3 &= 4 \\
x_3 + x_4 &\leq 5 \\
x_i &\geq 0
\end{aligned}
$$

Trovare la soluzione ottima del problema duale sapendo che la la soluzione ottima del primale è $x^* = (2/3, 0, 2, 3)$.

52

Sia dato il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$
\begin{aligned}
\min z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \\
x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\
4x_1 + 6x_2 + 3x_3 &\leq 10 \\
x_j &\geq 0 \quad j = 1, \ldots, 3
\end{aligned}
$$

Trovare la soluzione ottima del problema sapendo che la soluzione ottima del problema duale è $(1, 0)$.

53

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{aligned}
\min z = 5x_1 + 15x_2 + 3x_3 & \\
2x_1 + x_2 + 4x_3 &\leq 11 \\
x_1 + x_2 &\geq 1 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 4 \\
x_j &\geq 0
\end{aligned}
$$

Trovare la soluzione ottima del problema sapendo che quella del problema duale è $u^* = (1, 0, 7)$.

54

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{aligned}
\max z = 9x_1 + 15x_2 & \\
3x_1 + 6x_2 &\leq 6 \\
6x_1 + 9x_2 &\leq 12 \\
3x_1 + 3x_2 &\leq 3
\end{aligned}
$$

Determinare la soluzione ottima sapendo che la soluzione ottima del problema duale è $u^* = (2, 0, 1)$.

55

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\begin{aligned}
\min z = 8x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \\
4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\
6x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 10 \\
x_j &\geq 0
\end{aligned}
$$

Utilizzando la teoria della dualità dimostrare o confutare che la soluzione ottima è $x^* = (0, 1, 2)$.

56

Trovare la soluzione ottima del seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rcl} \min 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & & \\ x_1 + x_2 + x_3 & \geq & 2 \\ 2x_1 + 3x_4 & \geq & 1 \\ x_j & \geq 0 & j = 1, \ldots, 4 \end{array}$$

sapendo che $u^* = (1, \frac{1}{3})$ è soluzione ottima del problema duale.

57

Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{lllllll} \min & -x_1 & -x_2 & & & & \\ s.t. & 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & & -x_5 & = 4 \\ & x_1 & +2x_2 & & +2x_4 & & = 10 \\ & -3x_1 & & -2x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = -10 \\ & x_j & & & & \geq 0 & \end{array}$$

Se ne scriva il duale e si calcolino le soluzioni ottime x^* ed u^* dei due problemi, sapendo che $x_2^* \neq 0$, $x_5^* \neq 0$ e che il valore ottimo della variabile duale associata al primo vincolo è $-1/2$.

58

Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{llllll} \max & 2x_1 & +2x_2 & +9x_3 & -x_4 & \\ s.t. & x_1 & +x_2 & +x_3 & & \leq 2 \\ & & x_2 & +2x_3 & +x_4 & \leq 3 \\ & 2x_1 & -4x_2 & & +5x_4 & \leq 6 \\ & x_j & & & & \geq 0 \end{array}$$

1. Se ne scriva il duale e si calcolino le soluzioni ottime x^* ed u^* dei due problemi, sapendo che $x_1^* \neq 0$, $x_3^* \neq 0$ e che il valore ottimo della funzione obiettivo è $z^* = 29/2$.

2. Si consideri il primo vincolo

$$g_1(x) = 2 - x_1 - x_2 - x_3 \geq 0$$

e supponiamo di perturbarlo, in modo che diventi

$$g_1(x) = 2 - x_1 - x_2 - x_3 \geq -\epsilon ||\nabla g_1(x^*)||$$

indicando con $z^*(\epsilon)$ il valore ottimo della funzione obiettivo a fronte della suddetta perturbazione, a quanto è pari la derivata $dz^*(\epsilon)/d\epsilon$ calcolata per $\epsilon = 0$?

59

Dato il problema di PL:

$$\begin{aligned} \min -4x_1 + 9x_2 + 3x_3 & \\ 8x_1 - 10x_2 + 7x_3 &\geq 0 \\ -8x_1 + 7x_2 + 6x_3 &\geq -2 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

e sapendo che la soluzione ottima di tale problema è $x = (\frac{1}{4}, 0, 0)$ determinare la soluzione ottima del duale.

60

Dato il problema di PL:

$$\begin{aligned} \min -4x_1 + 9x_2 + 3x_3 & \\ 8x_1 - 10x_2 + 7x_3 &\geq 0 \\ -8x_1 + 7x_2 + 6x_3 &\geq -2 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

e sapendo che la soluzione ottima di tale problema è $x = (\frac{1}{4}, 0, 0)$ determinare la soluzione ottima del duale.

Esercizi proposti - basi, vertici, metodo del simplesso

61

Sia dato il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} \min z = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 & \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 &= 7 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 4 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, \ldots, 5 \end{aligned}$$

- Indicare se le matrici formate dalle colonne (A_1, A_2), (A_3, A_4) e (A_3, A_5) sono basi ammissibili e/o ottime.
- Calcolare la soluzione ottima del problema duale.

62

Si consideri il problema di PL

$$\begin{aligned}
\min z = -x_1 - 2x_2 & \\
x_2 + x_3 &= 5 \\
x_1 + x_2 + x_4 &= 10 \\
x_j &\geq 0
\end{aligned}$$

e si consideri la base $B = (A_1, A_3)$. Verificare che la B è ammissibile ma non ottima. Applicando un opportuno algoritmo, trovare una soluzione ammissibile di base in cui la funzione obiettivo assume un valore inferiore rispetto alla soluzione associata alla base B.

63

Riprendendo il problema dell'esercizio 52 (con $\alpha = 0$):

$$\begin{aligned}
\min z = (3+\alpha)x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \\
x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\
4x_1 + 6x_2 + 3x_3 &\leq 10 \\
x_j &\geq 0 \quad j = 1, \ldots, 3
\end{aligned}$$

Sapreste dire per quali valori di α la base associata alla soluzione ottima rimane ancora ottima?

64

Riprendendo la soluzione ottima del problema dell'esercizio 45 (con $\delta = 0$):

$$\begin{aligned}
\min z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 & \\
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 + \delta \\
x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\
x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

sapreste dire per quali valori di δ la base associata alla soluzione ottima rimane ancora ottima?

65

Riprendendo il problema dell'esercizio 40:

$$\begin{aligned}
\min z = x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \\
3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\
x_2 - 2x_3 = 1 \\
x_3 + 4x_4 = 5 \\
x_i \;\; \geq \;\; 0
\end{aligned}$$

Trovare entro quali limiti può variare il termine noto della seconda equazione (attualmente pari a 1) affinché la base ottima rimanga tale.

66

Dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned}
\min z = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 \\
3x_1 + x_2 - x_5 = 2 \\
x_2 + 4x_3 = 4 \\
x_3 + 4x_4 + x_6 = 5 \\
x_i \;\; \geq \;\; 0
\end{aligned}$$

si considerino i seguenti insiemi di colonne:

1. (A_2, A_4, A_5)
2. (A_1, A_3, A_4)
3. (A_1, A_3, A_5)
4. (A_3, A_4, A_5)

Per ciascuno di essi, indicare se individua o meno una base, e in tal caso se si tratta di una base ammissibile e/o ottima.

67

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{llllllll}
\min & -x_1 & -2x_2 & & & & \\
s.t. & & 2x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 8 \\
& & x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = 5 \\
& -x_1 & & +x_3 & & +x_5 & = -3 \\
& x_i & & & & & \geq 0
\end{array}$$

1) Si calcolino le soluzioni ottime x^* e u^* del problema e del suo duale, sapendo che x_3 e x_4 non fanno parte della base ottima.

2) Si indichi come varia il valore ottimo della funzione obiettivo per una piccola variazione del termine noto del primo vincolo.

68

Riprendendo il problema di Programmazione Lineare dell'esercizio 35 (con $\delta = 0$):

$$\begin{array}{lllllll}
\min & 3x_1 & -5x_2 & & -3x_4 & -x_5 & \\
s.t. & x_1 & +3x_2 & -3x_3 & +2x_4 & +x_5 & \leq 4+\delta \\
 & 2x_1 & -1.5x_2 & +4x_3 & +3x_4 & -0.5x_5 & \leq 4 \\
 & & & & & x_j & \geq 0
\end{array}$$

Indicare per quale intervallo di valori di δ la base ottima rimane invariata.

69

Elencare, possibilmente in modo efficiente, i vertici del poliedro $P = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$, dove:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

70

Sia dato un poliedro in forma standard, caratterizzato dalle seguenti matrici A, b:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si elenchino tutti i vertici del poliedro.

71

Dato il poliedro:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_j \geq 0 & \end{aligned}$$

entro quale range di valori può variare il secondo termine noto (attualmente pari a -1) perché la base $(A_1 A_2)$ rimanga ammissibile (e dunque ottima)?

72

Dato il poliedro:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 15 \\ x_j \geq 0 & \end{aligned}$$

si considerino i seguenti punti $A = (23/2, 1, 0, 9/2)$, $B = (10, 0, 0, 5)$, e $C = (0, 0, 5, 0)$. Per ciascuno di essi, dire se si tratta di un vertice o meno (e perché).

73

Per risolvere un problema di PL, avete applicato la fase I del metodo del simplesso. Al termine della fase I, il tableau del problema artificiale si presenta così:

0	2	0	0	0	2	0
3	4	1	2	1	1	0
0	-3	2	0	0	2	1

(le ultime due colonne si riferiscono alle variabili artificiali). Sapreste ricavare una base ammissibile per il problema di partenza e la soluzione di base corrispondente?

74

Sia dato il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} \min z = 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 & \\ x_1 + 2x_2 + x_4 + 4x_5 &= 6 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 4 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, \ldots, 5 \end{aligned}$$

- Indicare se le matrici formate dalle colonne (A_1, A_2), (A_2, A_3) e (A_2, A_5) sono basi ammissibili e/o ottime.
- Calcolare la soluzione ottima del problema duale.

75

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min z = 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_3 - x_4 &= 2 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Dire se il set di colonne (A_1, A_2, A_3) rappresenta una base ammissibile, ed eventualmente indicare la soluzione corrispondente e dire se si tratta di una soluzione ottima.

76

Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{llllll} \max & 2x_1 & +9x_2 & +12x_3 & -x_4 & \\ s.t. & x_1 & +x_2 & +x_3 & & \leq 2 \\ & & 2x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq 3 \\ & 2x_1 & & -4x_3 & +5x_4 & \leq 6 \\ & x_j & & & & \geq 0 \end{array}$$

1. Si calcolino le soluzioni ottime x^* ed u^* del problema primale e del duale, sapendo che all'ottimo x_1, x_2 e x_4 sono nulli.
2. Indicare per quale range di variazione del primo termine noto b_1 (attualmente pari a 2) la soluzione rimane ottima, e qual è la variazione Δz^* del valore della funzione obiettivo in tale range.

77

Sia dato un problema di PL in forma standard, caratterizzato dalle seguenti matrici A e b.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -5 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & -2 & -7 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Si considerino i punti $A = [2,0,0,0,0,1,0,0,0,0]^T$, $B = [1,0,1,1,0,0,0,0,0,0]^T$, $C = [0,0,0,1,0,0,0,2,0,-1]^T$, $D = [0,0,1,2,0,0,0,0,-1,0]^T$, $E = [3,0,1,0,0,0,0,0,0,0]^T$, $F = [1,1,4,0,0,0,0,0,0,0]^T$, $G = [0,2,0,0,1,1,0,0,0,0]^T$, $H = [0,0,1,3,0,0,0,0,0,0]^T$, $I = [1,0,1,0,0,0,-1,0,0,0]^T$. Per ciascuno dei punti, dire se si tratta di un vertice o meno. Motivare la risposta.

78

Si consideri il seguente poliedro:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 8x_5 &= 1 \\ -4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 - 6x_5 &= 1 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

indicare per ciascuna delle matrici (A_1, A_3), (A_2, A_5) e (A_1, A_5) se si tratti di una base, ed eventualmente se è ammissibile o meno.

Esercizi proposti - formulazioni

79

In un impianto di lavorazioni metalliche, ci sono 4 macchine di taglio. Esistono 5 tipi diversi di taglio (A, B, C, D, E). La macchina 1 può eseguire operazioni di tipo A, B o C, la macchina 2 di tipo C o D, la macchina 3 di tipo A, D o E, la macchina 4 di tipo B o E. I pezzi che l'impianto deve produrre richiedono complessivamente 50 ore di taglio di tipo A, 30 ore di tipo B, 70 di tipo C, 80 di tipo D, 30 di tipo E. Il problema consiste nell'assegnare le ore di lavorazione dei vari tipi di taglio alle varie macchine, considerando che queste possono essere suddivise in qualunque modo tra le macchine.

Si noti che il numero totale di ore di lavorazione è pari a 260. Poiché vi sono 4 macchine, il numero medio di ore di lavorazione per macchina sarà $\mu = 65$ ore. Indicando con W_j il numero di ore assegnato alla macchina j $(j = 1, 2, 3, 4)$, formulare come programmazione lineare i due seguenti problemi:

- assegnare le ore di lavorazione in modo da minimizzare

$$\sum_{j=1}^{4} |W_j - \mu|$$

- assegnare le ore di lavorazione in modo da minimizzare il carico di lavoro della macchina più carica (ovvero terminare le lavorazioni il più presto possibile).

80

Il laboratorio di ricerca di un'acciaieria vuole sperimentare un nuovo materiale metallico, il Metalok. I requisiti di questo materiale sono che deve avere una percentuale di carbone compresa fra il 3,2% e il 3,5%, una percentuale di silicio tra 1,8% e 2,5% e infine una percentuale di nickel tra 0,9% e 1,2%. Per fabbricare il Metalok viene utilizzata una miscela di tre leghe, A, B e C, il cui contenuto percentuale di carbonio, silicio e nickel è riportato in tabella, oltre al costo (in migliaia di euro) per tonnellata. Determinare in quale proporzione devono essere utilizzate le tre leghe per minimizzare il costo di una tonnellata di Metalok.

	Lega A	Lega B	Lega C
Carbonio	3	3,2	4
Silicio	2	2,5	1,5
Nickel	0,5	1	1,5
Costo per ton.	0,19	0,2	0,3

81

In un reparto di una fabbrica di componenti metallici per macchine agricole, da lamine rettangolari di acciaio vengono tagliati due tipi di componenti: dischi e piastre. Da una lastra possono ricavarsi:

- 4 dischi
- 3 dischi e 1 piastra
- 1 disco e 2 piastre

Le lamine di acciaio sono di due tipi: *grezze* o *lucidate*. Gli ordini da soddisfare nel prossimo periodo sono riportati in tabella. Formulare come PL il problema di soddisfare

	quantità	rifinitura
dischi	200	grezzi
dischi	400	lucidati
piastre	150	grezze
piastre	300	grezze o lucidate

gli ordini al costo minimo, tenendo conto che una lamina lucidata costa 1.4 volte una lamina grezza.

82

Una fabbrica di sedie deve pianificare la produzione per il prossimo periodo. Esistono tre tipi di sedie. Ogni sedia richiede una certa quantità di legno e un certo numero di ore di manodopera. Sono disponibili 150 kg di legno e 350 ore di manodopera. Per quanto concerne il profitto, si ha che le prime 100 sedie (di ciascun tipo) sono vendute a un certo prezzo, mentre le successive a un prezzo inferiore. Formulare come PL il problema di

tipo	legno (kg)	manod. (ore)	euro/sedia prime 100	euro/sedia successive
A	0.5	2	250	150
B	0.4	1.5	200	120
C	0.6	2.5	350	170

determinare il piano di produzione ottimo.

83

La Zerbinoni SpA, azienda leader nella produzione di tappeti & affini, decide di lanciare sul mercato tre nuovi modelli di tappetini antisdrucciolo universali: Scivolino, Cascatella e Rompicollo. Il ricavo dalla vendita di tali tappetini sarà pari a, rispettivamente, 8 euro, 9 euro e 7.50 euro. Per produrre una unità di prodotto vengono utilizzate, nelle quantità indicate, le materie prime elencate in tabella:

Modello	gomma	nylon	cotone	adesivo
Scivolino	80g	120g	180 g	35g
Cascatella	55	150g	200	45g
Rompicollo	70g	180g	120 g	20

per l'acquisto delle materie prime, la ditta dispone di un budget di 60.000 euro. I prezzi delle materie prime sono dipendenti dalle quantità acquistate:

- gomma : 1 euro/kg per i primi 100kg e 1.2 euro/kg per i successivi
- nylon : 2 euro/kg per i primi 200kg e 2.5 euro/kg per i successivi
- cotone : 4 euro/kg per i primi 180kg e 4.5 euro/kg per i successivi
- adesivo : 2 euro/kg per i primi 160kg e 2.5 euro/kg per i successivi

In ogni caso, non è possibile approvvigionarsi di più di 250 kg di gomma. Supponendo che tutto quanto prodotto sia venduto, formulare come PL il problema di pianificare la produzione massimizzando i guadagni.

84

Un'industria di mobili deve ricavare da lastre rettangolari di 3 x 4 metri gli elementi indicati in figura. Precisamente, deve soddisfare una domanda di 20 elementi del tipo "L" e 30 del tipo "I" utilizzando il numero minimo di lastre. Formulare il problema come problema di programmazione lineare.

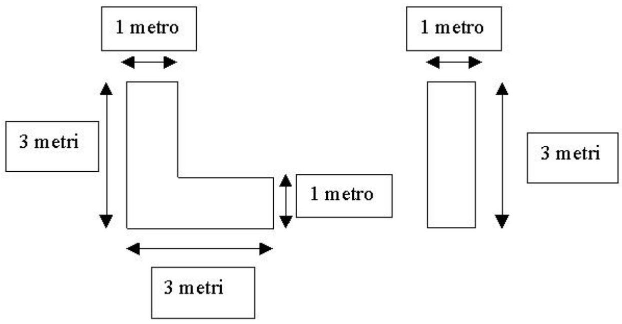

Figura 1: Lastre nell'esercizio 84.

85

Una pasticceria produce due tipi di torta, A e B. Ciascuna torta richiede una certa quantità di latte, zucchero e panna. La panna viene prodotta dalla pasticceria stessa, che può anche venderla direttamente al pubblico. La pasticceria dispone di 25 litri di latte e 15 kg di

	latte (litri)	zucchero (kg)	panna (kg)	prezzo vendita unitario (euro)
torta A	0.5	0.3	0.2	10
torta B	0.6	0.2	0.4	15
panna (1 kg)	0.7	0.3	–	3

zucchero. Il problema è quello di programmare la produzione (di torte e panna) al fine di massimizzare il profitto. Formulare come PL questo problema.

86

Un'industria chimica produce due tipi di plastiche (A e B), secondo tre diversi processi chimici (1, 2 e 3). Questi tre processi si differenziano per come utilizzano le risorse produttive, vale a dire manodopera e teflon. In particolare, in un'ora, ciascun processo richiede un certo numero di operai (dunque, di ore/uomo) e una certa quantità di teflon. Sempre in un'ora, ciascun processo produce una certa quantità di plastica A e di plastica B (vedi tabella). Nel prossimo periodo sono disponibili complessivamente 800 ore/uomo e 450 kg di teflon. Un kg di plastica A viene venduta a 16 euro, un kg di plastica B a 14 euro. Determinare come attivare i vari processi in modo da massimizzare il profitto.

	operai	teflon (kg)	plastica A (kg)	plastica B (kg)
processo 1	2	1	0,23	0,15
processo 2	3	2	0,4	0,35
processo 3	4	2	0,5	0,25

Tabella 1: Assorbimento di risorse e produzione di plastiche in un'ora di ciascun processo.

87

Antonio e Beatrice devono divedersi una serie di pratiche da svolgere. Le pratiche da svolgere si dividono in 4 diverse categorie, e sono anche lavorabili da Antonio e Beatrice simultaneamente. In una giornata lavorativa, Antonio è in grado di completare 20 Acquisti, oppure 40 Bonifici, oppure 60 Catalogazioni, oppure 25 DataProcessing. In una giornata lavorativa, Beatrice riesce a completare 8 Acquisti, oppure 50 Bonifici, oppure 80 Catalogazioni oppure 40 DataProcessing. I dati del problema sono rappresentati nella seguente tabella. Formulare il problema di PL per decidere come Antonio e Beatrice

	Numero di Pratiche da svolgere
Acquisti	50
Bonifici	100
Catalogazione	150
DataProcessing	230

possano dividersi le pratiche in modo da riuscire a terminare il lavoro prima possibile.

88

La Melamangio azienda agricola specializzata in produzione di mele deve decidere la produzione per il prossimo anno. Sono possibili quattro produzioni. Nella tabella, tutti i dati sono riferiti a una tonnellata di mele A causa di regolamentazioni ambientali la

	Pesticidi (quintali)	Lavoro Mesi/Uomo	Guadagno Euro
Poor	5	0.5	200
Standard	1	0.5	300
Bio	0	0.8	500
BioExcellence	0	1	700

Melamangio non può utilizzare più di 3 quintali di pesticidi; un quintale di pesticidi costa 100 euro. Il magazzino aziendale ha una capacità limitata e può contenere al più 10 tonnellate di mele. Inoltre si hanno a disposizione 7 mesi/uomo di lavoro. Formulare il problema di PL per decidere la produzione della Melamangio in modo da riuscire a massimizzare il guadagno.

89

Una fonderia produce tre leghe metalliche L_1, L_2 e L_3. Per la produzione delle leghe L_1 e L_2 sono utilizzate due materie prime principali P_1 e P_2, mentre per la produzione di un quintale di L_3 devono essere impiegati P_1 e L_2 nelle quantità (sempre espresse in quintali) riportate in Tabella 2.

	P_1	P_2	L_2	prezzo (€/q)
L_1	0.6	0.4		700
L_2	0.3	0.7		600
L_3	0.5		0.5	950

Tabella 2:

Sapendo che sono disponibili in totale 1500 quintali di P_1 e 3000 quintali di P_2, formulare come problema di PL il problema di programmare la produzione in modo da massimizzare il profitto nel prossimo periodo produttivo.

90

L'azienda agricola "Baciata dal sole" vende succo di arancia e arance in busta. Le arance sono classificate da qualità 1 (scadenti) a qualità 10 (eccellenti). L'azienda ha 100000 Kg di arance di qualità 9 e 120000 Kg di qualità 6. Le arance in busta devono avere qualità media almeno pari a 7, quelle per il succo almeno 8. Un kg di arance per il succo dà un profitto netto di 0.45 euro, un kg di arance vendute in busta 0.35 euro. Formulare come PL il problema di come allocare i due tipi di arance tra succo e buste al fine di massimizzare i profitti.

91

La ditta Barby produce un profumo che può essere prodotto con due processi diversi. Col processo 1, un'ora di lavoro e 2 unità di essenza di bergamotto consentono di produrre 3 bottiglie di profumo. Col processo 2, 2 ore di lavoro e 3 unità di essenza di bergamotto consentono di avere 5 bottiglie di profumo. Alla Barby un'ora di lavoro costa 30 euro e un'unità di essenza di bergamotto 20 euro. Ogni anno sono disponibili 20000 ore di lavoro e 35000 unità di essenza. Ogni bottiglia viene venduta a 90 euro.

La Barby sa di poter vendere nel prossimo periodo fino a 1000 bottiglie di profumo. Tuttavia, può aumentare le sue vendite investendo in pubblicità. In particolare, può assumere la modella Blondie che pretende un pagamento di 100 euro ogni 10 minuti di lavoro. L'aumento previsto di vendite, per ogni 10 minuti di lavoro della modella, è di 200 bottiglie.

Formulare come PL il problema di determinare la strategia di produzione/pubblicità che rende massimo il profitto.

92

Una compagnia petrolifera produce 3 tipi di prodotti raffinati (A, B, C) che possono essere venduti, per un massimo di 300 Kg l'uno, ai seguenti prezzi: A 10 euro/kg, B 12 euro/kg, C 20 euro/kg. Ogni Kg di prodotto finito di tipo A o B, richiede 5 euro di materiale grezzo. Spendendo 7 euro, 1 Kg di A può essere trasformato in 0.6 Kg di B e 0.4 Kg di C. Spendendo 5 euro, 1 Kg di B può essere trasformato in 0.8 Kg di C. Formulare come PL il problema di determinare la produzione in modo da massimizzare il profitto.

93

La Candy-Candy cosmetica produce un profumo con due processi. Con il processo 1, un'ora di lavoro e 2 unità di essenza di mandarino consentono di produrre 300 ml di profumo. Col processo 2, 2 ore di lavoro e 3 unità di essenza di mandarino consentono di avere 500 ml di profumo. Alla Candy-Candy un'ora di lavoro costa 20 euro e un'unità di essenza di mandarino 15 euro. Ogni anno sono disponibili 20000 ore di lavoro e 35000 unità di essenza. La Candy-Candy si aspetta di vendere 1000 bottigliette di profumo da 100ml. Ogni bottiglietta viene venduta a 5 euro. Formulare come PL il problema di determinare la strategia di produzione che renda massimo il profitto dell'azienda.

94

Una ditta produce moto e deve pianificare la produzione per l'anno successivo. Ogni trimestre ha una diversa richiesta. Per ogni moto invenduta alla fine di ogni trimestre, si

Trimestre	moto
T1	40
T2	70
T3	50
T4	20

ha un costo di immagazzinamento pari a 100 euro/moto. Un incremento di produzione da un trimestre al successivo rappresenta un costo (training per nuovi operai) quantificabile in 200 euro per ogni moto in più prodotta rispetto al trimestre precedente. Analogamente, una diminuzione di produzione da un trimestre al successivo è anch'essa valutata come un costo (dovuto ai licenziamenti) pari a 150 euro per ogni moto in meno. Formulare come PL il problema di pianificare la produzione in ciascun trimestre in modo da minimizzare i costi complessivi, e volendo soddisfare tutta la domanda nei vari trimestri.

95

La *Photo&C.* sta studiando i tempi di reazione di un nuovo acido per lo sviluppo di fotografie professionali. Sperimentalmente sono stati calcolati i tempi di sviluppo di una fotografia in base alla quantità di acido impiegato. In Tabella 3, sono riportati i tempi di sviluppo t rilevati sperimentalmente per alcuni valori delle quantità q di acido. Sulla base

q (litri)	t (secondi)
0.1	30
0.2	10
0.3	3.5
0.4	2
0.5	1.3

Tabella 3:

dei dati sperimentali si vuole trovare una legge del tipo $t = aq^2 + bq + c$ che approssimi il più possibile l'andamento del tempo di reazione dell'acido, nel senso che minimizza il *massimo* scarto in valore assoluto tra il valore di t sulla parabola e il tempo di sviluppo rilevato sperimentalmente, per ciascun valore di q. Fornire un modello di programmazione lineare per tale problema.

96

In uno studio di commercialisti, quattro persone (Antonio, Bruno, Caterina e Daniela) devono svolgere cinque tipi di attività (1. dichiarazioni dei redditi, 2. dichiarazioni IVA, 3. dichiarazioni IMU, 4. pagamenti IVA, 5. dichiarazioni ISEE). Dalla quantità di pratiche che si sono accumulate, la direzione stima che sono necessarie le ore di lavoro indicate in tabella. Inoltre, ciascuno dei quattro impiegati è specializzato in alcune delle attività sopra menzionate. Considerando che le ore di lavoro richieste da ciascuna attività possono essere liberamente suddivise tra coloro in grado di farle, formulare come PL il problema di assegnare i compiti ai quattro impiegati minimizzando la differenza tra la persona più carica e quella meno carica.

attività	impiegati	tempo totale (ore)
1	Antonio, Bruno	50
2	Antonio, Caterina	60
3	Bruno, Daniela	30
4	Caterina, Daniela	40
5	Antonio, Caterina, Daniela	55

97

Alcuni aerei devono atterrare su una pista. L'ordine di atterraggio è prefissato (1, 2, 3, 4, 5). Per ciascun aereo è dato l'orario nominale di arrivo e inoltre due pesi, w_i^- e w_i^+, che indicano il costo (euro/minuto) per ogni minuto, rispettivamente, di ritardo o di anticipo rispetto all'orario nominale. Tra un atterraggio e il successivo devono intercorrere almeno 15 minuti, per dar modo di liberare la pista.

i	orario nom.	w_i^-	w_i^+
1	9:30	2	0.20
2	9:35	3	0.30
3	9:45	2.50	0.20
4	9:50	1	0.10
5	10:10	4	0.20

Tabella 4: Dati per il Problema 1.

Tenendo conto del fatto che ora sono le 9:00, e che gli aerei sono disponibili all'atterraggio, il problema consiste nel determinare l'orario di atterraggio degli aerei in modo da minimizzare i costi complessivi. Formulare il problema come PL.

98

Un mobilificio produce due tipi di scaffali. Ogni scaffale richiede una certa quantità di legno, un certo numero di viti e bulloni, e un certo numero di ore di manodopera. Sono disponibili complessivamente 100 kg di legno, 500 viti e bulloni (che sono sempre usati a coppie), e 300 ore di manodopera. Tutti i tipi di scaffali possono anche essere incollati, e quindi realizzati senza viti e bulloni, tuttavia questa scelta produce un prodotto di minore qualità, venduto quindi a un prezzo inferiore. Data la seguente tabella in cui sono riportati i dati del problema, formulare come PL il problema di determinare il piano di produzione ottimo.

tipo	legno (kg)	viti/bulloni	manod. (ore)	euro/scaffale avvit.	euro/scaffale incoll.
A	2	4	1.5	250	150
B	1.5	7	3	200	120

99

L'azienda Pilpel vuole produrre una lega metallica composta, in peso, per il 30% di vanadio e per il rimanente 70% di titanio. Per produrla, può utilizzare alcune leghe già presenti in commercio, nelle seguenti percentuali e ai seguenti prezzi per kg:

lega	%vanadio	%titanio	costo (euro/kg)
lega 1	10	90	14
lega 2	25	75	11
lega 3	50	50	8
lega 4	75	25	5
lega 5	95	5	4

1. Formulare come PL il problema di produrre la nuova lega al costo minimo.
2. Verificare che la decisione più conveniente è quella di utilizzare le leghe 2 e 4, e non utilizzare le altre.

100

La Confederazione Meridionale dei Kibbutz (CMK) è un gruppo di tre kibbutz (1, 2 e 3), la cui pianificazione agricola annuale è svolta centralmente dal Ministero per l'Agricoltura.

Il rendimento agricolo di ogni kibbutz è limitato sia dalla quantità di terra irrigabile, sia dalla quantità di acqua destinata all'irrigazione. Questi dati sono riportati in tabella.

kibbutz	terra irrigabile (ettari)	acqua disponibile (migliaia di m^3)
1	400	600
2	600	800
3	300	375

La terra può essere adibita alla coltivazione di barbabietole, cotone o sorgo. Il Ministero ha fissato una quantità massima di ettari che complessivamente possono essere adibiti alle tre coltivazioni. Inoltre, le tre coltivazioni differiscono tra loro per il consumo di acqua (espresso in migliaia di m^3/ettaro) e il guadagno netto (euro/ettaro).

A causa della scarsità di acqua, la CMK non è in grado di utilizzare tutte le proprie terre irrigabili. Per garantire equità tra i tre kibbutz, è stato stabilito che i tre kibbutz dovranno utilizzare la stessa *percentuale* delle proprie terre irrigabili (ad esempio, se il primo kibbutz coltiva 200 ettari, il secondo ne dovrà coltivare 300 e il terzo 150).

Il problema è decidere quanti ettari, in ciascun kibbutz, destinare a ciascuna coltivazione, nel rispetto dei vincoli descritti, e con l'obiettivo di massimizzare il guadagno totale. Formulare il problema come PL.

coltivazione	max ettari	consumo acqua	guadagno
barbabietole	600	3	1000
cotone	500	2	750
sorgo	325	1	250

101

Il famoso culturista italoamericano Frank Colosso deve acquistare gli integratori alimentari per il prossimo ciclo di allenamenti. Il mix di integratori da usare, scelti tra cinque tipologie disponibili, deve fornire il giusto apporto di sostanze nutritive. In tabella sono indicati, per ogni integratore, le quantità di sostanze nutritive contenute in un Kg di integratore, ed il prezzo al Kg. Sono inoltre indicate, per ogni sostanza, le quantità minima e massima da assimilare per ogni pasto.

	Proteine	vitamine	sali min.	carboidrati	prezzo
MAX2000	100g	10g	15g	0.45g	23 euro
Hercules PRO	20g	100g	10g	0.4g	22 euro
Schwartzy	10g	20g	110g	0.5g	23 euro
Superman	80g	80g	80g	1g	28 euro
EnergyX	10g	80g	10g	0.5g	25 euro
min	20g	30g	25g	0.5g	
max	50g	60g	55g	0.75g	

Formulare come modello di programmazione lineare il problema di pianificare la composizione di ogni pasto (500 g di integratori), minimizzando la spesa.

102

Uno stabilimento deve produrre un nuovo tipo di carburante miscelando quattro tipi di benzine. Per ognuna delle quattro benzine è dato il prezzo di acquisto (per gallone), il numero di ottano e il contenuto in pentano. Il nuovo carburante deve avere un numero di ottano pari a 98 [1] e un contenuto in pentano compreso fra lo 0.5 e l' 1.5%. Formulare come PL il problema di determinare la miscela che soddisfa le specifiche al minimo costo.

Benzina	prezzi al gallone (euro)	n. ottano	pentano
Benzina 1	2.5	96	0.8 %
Benzina 2	2.6	97	1.2 %
Benzina 3	2.8	98	1.6 %
Benzina 4	2.7	99	0.4 %

103

Nel corso di un campo di addestramento delle Giovani Marmotte, Qui, Quo e Qua hanno ricevuto dal Gran Mogol l'incarico di portare a termine alcuni compiti. Essi devono pianificare la loro giornata lavorativa suddividendosi tra loro i compiti assegnati, e precisamente 12 cacce, 10 osservazioni, 15 controlli e 8 pulizie. Ognuno dei tre è in grado, in base alle proprie competenze ed attitudini personali, di portare a termine i propri compiti impiegando tempi differenti, come indicato in tabella. Vanno rispettati i seguenti vincoli: A) Nessuno dei tre deve portare a termine più di 6 osservazioni, B) Qua non deve effettuare più di due pulizie, C) Per evitare accuse di favoritismo, il Gran Mogol ha stabilito che nessuno dei tre debba effettuare più controlli della somma di quelli effettuati dagli

[1]Si ricorda che il numero di ottano, indicativo del potere antidetonante di un carburante, è paragonabile alla concentrazione di un componente. Dunque se mescoliamo la stessa quantità di due sostanze, aventi numero di ottano 0 e 100, otteniamo una sostanza avente numero di ottano 50.

altri due. (E' possibile anche svolgere un compito parzialmente, ad esempio se Qui e Quo svolgono una caccia metà per uno, quella caccia occuperà 10 minuti di Qui e 12,5 minuti di Quo.)

Tempo per ciascuna:	caccia	osservazione	controllo	pulizia
Qui	20 min	10 min	30 min	5 min
Quo	25 min	10 min	25 min	10 min
Qua	20 min	15 min	20 min	10 min

Considerando che nessuno dei tre può fare più di una cosa alla volta, il problema consiste nel terminare tutti i compiti il prima possibile. Formulare il problema come PL.

104

La BigBang, società produttrice di esposivi, deve pianificare la propria produzione annuale. Nei suoi impianti essa produce quattro tipologie di esplosivi, a partire da tre differenti materie prime. La tabella riporta la composizione percentuale di ciascun esplosivo, le scorte disponibili delle varie materie prime e il numero totale di ore uomo disponibili. Per ciascun esplosivo, la ditta può acquisire ulteriori materie prime, ai prezzi riportati in tabella, fino ad un limite massimo pari al 150% delle scorte attualmente in magazzino. Può inoltre pagare delle ore di straordinario, al costo di 15€/hr, agli operai per far fronte ad eventuali necessità produttive. Modellare come PL il problema di massimizzare il profitto dell'azienda nell'ipotesi che tutto ciò che viene prodotto venga effettivamente venduto.

Prodotti:	Nitroglic.	Polv. da sparo	Fosforo	Manod. [ore/kg]	Prezzo [/kg]
Dynamite	40%	30%	30%	2.2	250
Superbotto	50%	40%	10%	2	270
BumBum	60%	30%	10%	2.4	320
Bang	60%	20%	20%	2.5	330
Disponibilità:	3000kg	2800kg	2600kg	4000 ore	
Costo [/kg]	15	10	8		

105

Un produttore vinicolo deve decidere la produzione di suoi tre vini (Vecchio mulino, Antica pietraia, Fienile decrepito), i quali sono ottenuti esclusivamente a partire da quattro tipi di uva (Sangiovese, Canaiolo, Malvasia, Merlot). I vini devono rispettare alcuni vincoli nel contenuto percentuale di varie uve. Il produttore può acquistare le uve da un fornitore che dispone di una certa quantità di ciascuna uva. Siccome però il fornitore vuole scoraggiare i clienti dall'effettuare grandi ordinativi, vende i primi 1000 kg di ciascuna uva a un certo prezzo e i successivi a un prezzo superiore. Considerando che da un kg di uva si ottiene un quarto di litro di vino, e supponendo che tutto ciò che viene prodotto venga poi venduto, formulare come modello di PL il problema di pianificare la produzione vinicola con l'obiettivo di massimizzare i guadagni (ossia incassi meno il costo delle uve) nel rispetto dei vincoli indicati.

	Sangiovese	Canaiolo	Malvasia	Merlot	Prezzo (euro/l)
Vecchio mulino	$\geq 60\%$	-	$\geq 10\%$	$\geq 10\%$	22
Antica pietraia	$\geq 50\%$	$\geq 30\%$	-	$\geq 10\%$	19
Fienile decrepito	$\geq 80\%$	-	$\geq 10\%$	-	18

	Sangiovese	Canaiolo	Malvasia	Merlot
disponibilità:	3500 kg	3500 kg	4000 kg	2000kg
Prezzo primi 1000 kg (euro/kg)	1,50	0,75	2	1,80
Prezzo kg successivi (euro/kg)	2	1,50	3	2,50

106

Un impianto siderurgico deve produrre 5 lotti di barre di acciaio, A, B, C, D, E, in quest'ordine. Per ogni lotto i è nota la durata p_i, ossia quanti giorni saranno necessari alla sua produzione, e una data di di consegna concordata col cliente. Se il lotto viene terminato oltre la data di consegna, per ogni giorno di ritardo rispetto a di si paga una penale di w_i^+ euro, mentre se viene terminato prima di d_i, per ogni giorno di anticipo si paga una penale di w_i^- euro (dovuta ai costi di immagazzinamento del prodotto finito). Considerando che l'impianto può lavorare un solo lotto alla volta, e che la lavorazione di un lotto, una volta iniziata, non può essere interrotta, il problema consiste nel determinare il giorno di inizio di ciascun lotto con l'obiettivo di minimizzare i costi complessivi. Formulare il problema come PL.

	d_i	w_i^+	w_i^-	p_i
A	5	100	30	3
B	7	90	40	5
C	12	110	30	4
D	15	120	20	4
E	19	120	10	5

107

Una macchina per xerigrafie deve stampare alcuni lotti di fogli. Ciascun lotto consiste di varie centinaia di fogli. Una volta iniziato un lotto, la macchina non può essere interrotta fino a che il lotto non è esaurito e viene montato il nuovo disegno. I dati relativi ai lotti che devono essere prodotti sono indicati in tabella. Accanto alla durata della lavorazione, viene indicata l'ora alla quale, idealmente, la lavorazione dovrebbe essere completata.

lotto	Tempo richiesto (ore)	ora ideale di fine
1	3	11
2	4	12
3	3	20
4	4	23

Per ogni ora di ritardo di ciascun lotto rispetto a tale istante, si pagano 100 euro di penale. D'altra parte, per ogni ora di anticipo rispetto a tale istante, si pagano 10 euro (per tenere conto del costo di immagazzinamento del prodotto finito). I lotti vanno processati nell'ordine 1, 2, 3, 4. Al termine di un lotto, la macchina richiede 3 ore di lavoro per essere riconfigurata per il lotto successivo. Considerando che la macchina può iniziare a lavorare alle ore 6:00, formulare come PL il problema di determinare l'istante di inizio di ciascun lotto in modo da minimizzare i costi complessivi.

108

Per produrre i suoi tre liquori (Agrumium, Booz e Carminium), un produttore utilizza quattro ingredienti (alcool, succo di arancia, succo di limone, succo di pompelmo), secondo la composizione indicata in tabella. Il produttore può acquistare gli ingredienti da un fornitore che dispone di una certa quantità di ciascun ingrediente. Il fornitore vende i primi 2500 litri di ciascun ingrediente a un certo prezzo (primo prezzo) e i successivi a un prezzo superiore (secondo prezzo). Analogamente il produttore vende i primi 5000 litri di ciascun liquore a un certo prezzo e i successivi a un prezzo inferiore. Tutti i prezzi sono espressi in euro/l. Supponendo che tutto ciò che viene prodotto venga poi venduto, formulare come modello di PL il problema di pianificare la produzione con l'obiettivo di massimizzare il guadagno netto del produttore.

	Alcool	S. ar.	S.lim.	S. pomp.	Primo pr.	Secondo pr.
Agrumium	40%	20%	10%	30%	20	18
Booz	50%	30%	20%	0%	16	13
Carminium	55%	10%	25%	10%	24	20
Disponibilità (l)	3500	3500	4000	2000		
Primo prezzo	1,50	0,75	2	1,80		
Secondo prezzo	2	1,50	3	2,50		