

# Esercizi di Programmazione Lineare Intera

a cura di A. Agnetis

## 1

Risolvere il seguente problema di PLI con l'algoritmo dei piani di Gomory:

$$\begin{aligned} \max z &= 40x_1 + 24x_2 + 15x_3 + 8x_4 \\ 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 &\leq 22 \\ x_i &\geq 0 \\ x_i &\text{ intero} \end{aligned}$$

### Soluzione.

Si tratta di un problema di knapsack intero, che potrebbe dunque anche risolversi ad esempio con la programmazione dinamica, o con un branch and bound specializzato. Tuttavia utilizziamo i piani di Gomory.

Portando il problema in forma canonica:

$$\begin{array}{c|cccccc} 0 & -40 & -24 & -15 & -8 & 0 \\ \hline 22 & 8 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{array}$$

l'elemento di pivot è chiaramente 8, da cui il tableau ottimo

$$\begin{array}{c|ccccc} 110 & 0 & 6 & 10 & 12 & 5 \\ \hline \frac{22}{8} & 1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{array}$$

La soluzione ottima è frazionaria. Dunque, aggiungendo il taglio si ha:

$$\begin{array}{c|cccccc} 110 & 0 & 6 & 10 & 12 & 5 & 0 \\ \hline \frac{22}{8} & 1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 1 \end{array}$$

applicando una iterazione del metodo duale del simplesso, si ha che l'elemento pivot è  $-3/4$ , si ottiene il nuovo tableau ottimo:

$$\begin{array}{c|cccccc}
104 & 0 & 0 & 5 & 8 & 4 & 8 \\
\hline
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{4}{3}
\end{array}$$

e quindi la soluzione ottima  $(2, 1, 0, 0)$ .

## 2

Risolvere il seguente problema di PLI con l'algoritmo dei piani di Gomory, indicando le equazioni del taglio in funzione delle variabili originarie:

$$\begin{aligned}
\max z &= x_1 + 2x_2 \\
x_1 - 2x_2 &\geq -2 \\
x_1 + x_2 &\leq 3 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \\
x_1, x_2 &\text{ interi}
\end{aligned}$$

### Soluzione.

Portando il problema in forma canonica si ha

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\
\hline
2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\
3 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

ove

$$\begin{aligned}
x_3 &= 2 + x_1 - 2x_2 \\
x_4 &= 3 - x_1 - x_2
\end{aligned}$$

Dopo due iterazioni del metodo del simplesso si arriva al tableau ottimo:

$$\begin{array}{c|cccc}
\frac{14}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\
\hline
\frac{5}{3} & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
\frac{4}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}
\end{array}$$

La soluzione è frazionaria, occorre quindi generare un taglio. Scegliendo la prima riga, si ha:

$$-\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \leq -\frac{2}{3}$$

e dunque il nuovo tableau:

$$\begin{array}{c|cccc}
 \frac{14}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\
 \frac{10}{3} & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\
 \frac{4}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\
 -\frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1
 \end{array}$$

effettuando l'operazione di pivot attorno all'elemento sulla riga 3 e in colonna 3, si ottiene il nuovo tableau ottimo

$$\begin{array}{c|cccc}
 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3
 \end{array}$$

e dunque la soluzione ottima del problema originario è  $(2, 1)$ . Per ottenere l'espressione del taglio, osserviamo che questo può scriversi

$$x_3 + x_4 \geq 2$$

da cui, sfruttando le espressioni di  $x_3$  e  $x_4$  sopra riportate, si ha in definitiva che il taglio è

$$x_2 \leq 1$$

### 3

Un insieme di 7 lavorazioni deve essere eseguito da una macchina a controllo numerico. Ciascuna lavorazione richiede alcuni utensili, e, una volta effettuata, porta un certo profitto. La seguente tabella mostra, per ogni lavorazione, l'insieme di utensili richiesto e il corrispondente profitto:

lavorazione	Utensili	profitto
1	A, C, D, E	2000
2	A, B, F, G	1500
3	A, B, C, E	1800
4	B, D, E, G	1700
5	E, F, G	800
6	A, D, G	900
7	A, E, F	750

Il magazzino utensili della macchina può ospitare solo al più 5 utensili. Formulare come PLI il problema di determinare la configurazione del magazzino utensili con l'obiettivo di massimizzare il profitto.

**Soluzione.**

Si tratta di decidere quali utensili dovranno essere montati sulla macchina, e di conseguenza quali lavorazioni potranno essere effettuate. Risulta allora conveniente introdurre le seguenti variabili di decisione:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se la lavorazione } i \text{ è effettuata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se l'utensile } j \text{ è montato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione obiettivo risulta dunque essere

$$\min 2000x_1 + 1500x_2 + 1800x_3 + 1700x_4 + 800x_5 + 900x_6 + 750x_7$$

Vediamo ora i vincoli. Un primo tipo di vincoli consiste nell'esprimere il fatto che una lavorazione può essere eseguita solo se tutti i corrispondenti utensili sono montati sulla macchina. Questo può essere espresso dicendo che una lavorazione  $i$  non può effettuarsi se l'utensile  $j$  richiesto non è montato. Nel nostro esempio, otteniamo 25 vincoli:

$$x_1 \leq y_A$$

$$x_1 \leq y_C$$

$$x_1 \leq y_D$$

$$x_1 \leq y_E$$

$$x_2 \leq y_A$$

$$x_2 \leq y_B$$

$$x_2 \leq y_F$$

$$x_2 \leq y_G$$

...

...

In alternativa, si poteva più compattamente scrivere

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \leq 5y_A$$

$$x_2 + x_3 + x_4 \leq 3y_B$$

$$x_1 + x_3 \leq 2y_C$$

...

...

dove, si noti, se  $y_j = 0$  tutte le variabili corrispondenti a lvaorazioni che richiedono l'utensile  $j$  sono contemporaneamente poste a 0. (Questa seconda formulazione è però molto più debole, dal punto di vista risolutivo, della prima).

Un secondo tipo di vincoli è relativo alla capacità limitata di immagazzinamento della macchina, che può esprimersi semplicemente come

$$y_A + y_B + y_C + y_D + y_E + y_F + y_G \leq 5$$

## 4

In una rete di calcolatori, vi sono  $n$  terminali ciascuno dei quali deve essere collegato ad un concentratore. Ci sono  $m$  concentratori, a ognuno dei quali possono essere collegati al più  $k$  terminali. Perché un terminale possa essere collegato a un concentratore, quest'ultimo deve essere "attivo". Il costo di attivazione di un concentratore  $j$  è  $f_j$ , mentre il costo di collegamento del terminale  $i$  con il concentratore  $j$  è  $c_{ij}$ . Formulare come PLI il problema di minimizzare i costi complessivi, nel rispetto dei vincoli.

### Soluzione.

Si tratta di un problema di plant location. Le variabili di decisione saranno

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il terminale } i \text{ è collegato al concentratore } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se il concentratore } j \text{ è attivato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione obiettivo risulta dunque dalla somma dei due tipi di costi:

$$\min \sum_{i=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^m f_j y_j$$

Per quanto riguarda i vincoli, oltre ai consueti vincoli di assegnamento (ciascun terminale deve essere connesso a uno e un solo concentratore)

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

avremo i vincoli per cui un terminale  $i$  non può essere collegato al concentratore  $j$  se quest'ultimo non è attivato, ossia

$$x_{ij} \leq y_j \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

Infine, i vincoli sulla capacità di ciascun concentratore:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq k \quad j = 1, \dots, m$$

## 5

Ci sono  $n$  lavori *indivisibili* da effettuare, ognuno caratterizzato da una sua durata  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Avendo due persone a disposizione, volete ripartire i lavori tra queste due persone facendo in modo che i loro carichi di lavoro siano il più possibile bilanciati.

Formulare il problema in termini di problema di knapsack, e risolverlo con un opportuno algoritmo nel caso  $n = 4$ ,  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 6$ ,  $p_4 = 7$ .

### Soluzione.

Poiché la somma dei  $p_i$  è pari a 18, si tratta di risolvere il problema

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 &\leq 9 \\ x_i &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

dove le variabili pari a 1 e a 0 indicheranno la partizione dei lavori tra le due persone. Applicando l'algoritmo di programmazione dinamica si ottiene

$\downarrow k \rightarrow y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2
2	0	0	2	3	3	5	5	5	5	5
3	0	0	2	3	3	5	6	6	8	9
4	0	0	2	3	3	5	6	7	8	9

Dalla tabella si ricostruisce una soluzione ottima,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 1$ .

## 6

In figura è rappresentata una rete stradale che unisce varie località. A ogni tratto di strada sono associati due numeri. Il primo rappresenta il tempo necessario a percorrerlo, il secondo il pedaggio che è necessario pagare. Si vuole andare da  $A$  a  $B$  nel minor tempo possibile, ma si hanno in tasca solo 44 euro per pagare i pedaggi. Formulare in termini di programmazione lineare a numeri interi il problema di trovare il percorso più conveniente.

### Soluzione.

La formulazione si ottiene aggiungendo alla classica formulazione di cammino minimo un vincolo di knapsack. Chiaramente, l'aggiunta di questo vincolo distrugge la totale unimodularità della matrice dei coefficienti, per cui il problema non è più risolvibile in termini di programmazione lineare.

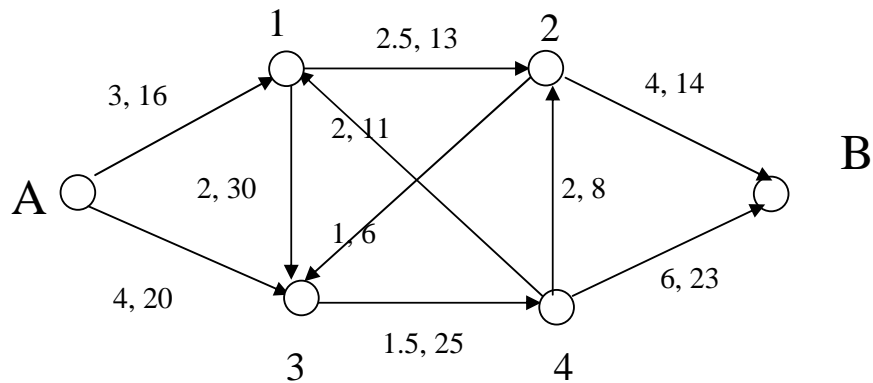


Figura 1: Rete stradale.

$$\begin{aligned}
 \min z &= 3x_{A1} + 4x_{A3} + 2x_{13} + 2.5x_{12} + \\
 &\quad x_{23} + 1.5x_{34} + 2x_{41} + 2x_{42} + 4x_{2B} + 6x_{4B} \\
 x_{A1} + x_{A2} &= 1 \\
 x_{A1} + x_{41} &= x_{13} + x_{12} \\
 x_{12} + x_{42} &= x_{23} + x_{2B} \\
 x_{A3} + x_{13} + x_{23} &= x_{34} \\
 x_{34} &= x_{41} + x_{42} + x_{4B} \\
 16x_{A1} + 20x_{A3} + 30x_{13} + 13x_{12} + 6x_{23} + 25x_{34} + 11x_{41} + 8x_{42} + 14x_{2B} + 23x_{4B} &\leq 44 \\
 x_{ij} &\text{ intero}
 \end{aligned}$$

## 7

Dato un grafo  $G = (N, A)$ , non orientato, si consideri il seguente problema. I nodi del grafo rappresentano città che devono essere difese da pattuglie. Le pattuglie possono essere dislocate in corrispondenza dei nodi del grafo, e possono essere di due tipi, *fisse* e *mobili*. Una pattuglia fissa dislocata nella città  $i$  difende solo la città  $i$ . Una pattuglia mobile dislocata nella città  $i$  difende, oltre a  $i$ , anche tutte le città adiacenti, ossia difende  $\{i\} \cup \delta(i)$ . Dislocare una pattuglia fissa ha un costo pari a 2, una mobile ha costo 3. Il problema è quello di difendere tutti i nodi del grafo al costo minimo. Formulare il problema come programmazione lineare a numeri interi.

**Soluzione.**

Consideriamo due insiemi di variabili, ossia:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se è installata una pattuglia fissa in } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se è installata una pattuglia mobile in } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione obiettivo può essere immediatamente espressa come

$$\min \sum_{i \in N} (2x_i + 3y_i)$$

Si tratta ora di esprimere il vincolo sulla difesa di ciascuna città. Questo può essere scritto tenendo conto che una città  $i$  è difesa se in  $i$  è dislocata una pattuglia, oppure se in  $i \cup \delta(i)$  ve ne è almeno una mobile:

$$x_i + y_i + \sum_{j \in \delta(i)} y_j \geq 1$$

## 8

Siete i curatori dell'opera omnia del celebre gruppo Hashirim, i quali hanno pubblicato, durante la loro carriera, complessivamente  $n$  brani, di varie durate (sia  $p_i$  la durata del brano  $i$ ). Vi è stato chiesto di far uscire una collana di  $m$  compact disc, comprendente tutti i brani, con l'unico requisito che la differenza tra la durata complessiva del cd più lungo e di quello più corto sia minima.

Dovete decidere di quali brani deve essere composto ogni cd. Formulare il problema come programmazione lineare a numeri interi.

### Soluzione.

Utilizziamo delle variabili di assegnamento, del tipo

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il brano } i \text{ è assegnato al cd } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

E dunque si hanno i vincoli in base ai quali ciascun brano deve essere assegnato a un cd:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

Per scrivere la funzione obiettivo, dobbiamo introdurre le variabili scalari  $y$  e  $z$  che staranno a indicare la lunghezza del più corto e più lungo cd rispettivamente. Per fare questo basta imporre

$$y \leq \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \quad j = 1, \dots, m$$



$$z \geq \sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \quad j = 1, \dots, m$$

dopo di che, la funzione obiettivo è semplicemente

$$\min z - y$$

## 9

Un'azienda produce scarpe. Nella tabella sono indicate le risorse richieste dalla produzione di ciascun paio di scarpe, e il prezzo di vendita. Il problema consiste nel determinare la produzione di ciascun tipo di scarpa, considerando le risorse disponibili, e tenendo presente che per ciascun tipo di scarpa è stabilita una soglia minima, sotto la quale non vi è convenienza a produrre (ad esempio, la produzione di scarponi sarà pari a 0 oppure dev'essere almeno pari a 100 paia, e così' per gli altri tipi). Formulare il problema di massimizzare il profitto in termini di programmazione lineare intera.

tipo	cuoio (g)	ore-macchina	chiodi	soglia	prezzo (euro/paio)
scarponi da montagna	850	3	20	100	150
mocassini	600	2	15	200	120
scarpe da passeggio	700	2.5	20	150	130
disponibilità	120000	7000	40000		

### Soluzione.

Come in tutti i problemi di allocazione di risorse, avremo alcune variabili continue ( $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ) corrispondenti al numero di unità di ciascun prodotto da produrre. La funzione obiettivo e i vincoli sulla disponibilità di risorse sono dunque:

$$\begin{aligned} \max z &= 150x_1 + 120x_2 + 130x_3 \\ 850x_1 + 600x_2 + 700x_3 &\leq 120000 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2.5x_3 &\leq 7000 \\ 20x_1 + 15x_2 + 20x_3 &\leq 40000 \end{aligned}$$

oltre a questi vincoli, vanno però aggiunti quelli relativi alla soglia di produzione. In particolare, dobbiamo esprimere il fatto che se un tipo di articolo viene prodotto, la corrispondente variabile deve assumere almeno un certo valore. Questo richiede allora l'introduzione di variabili binarie:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'articolo } i \text{ è prodotto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

vanno quindi aggiunti altri due tipi di vincoli. Il primo tipo impone che una variabile  $x_i$  non può essere maggiore di zero se quell'articolo non viene prodotto. Tale vincolo deve scomparire nel caso in cui invece l'articolo venga prodotto, per cui dobbiamo usare un numero  $M$  sufficientemente grande a secondo membro (ad es.  $M > 100000$ ):

$$x_1 \leq My_1$$

$$x_2 \leq My_2$$

$$x_3 \leq My_3$$

Un secondo tipo di vincoli deve invece imporre che, se un articolo viene prodotto, ciò deve avvenire in una certa quantità minima:

$$x_1 \geq 100y_1$$

$$x_2 \geq 200y_2$$

$$x_3 \geq 150y_3$$

## 10

Una macchina deve effettuare  $n$  lavorazioni non interrompibili  $\{1, 2, \dots, n\}$ . La lavorazione  $i$  richiede un tempo di processamento  $p_i$ . Per ogni lavorazione è specificata una due date  $d_i$ . Formulare in termini di programmazione lineare a numeri interi il problema di determinare l'ordine in cui eseguire le lavorazioni in modo tale da minimizzare la somma delle tardiness (ricordiamo che la tardiness  $T_i$  è definita come  $\max\{0, C_i - d_i\}$ , ove  $C_i$  è il tempo di completamento del job  $i$ ).

### Soluzione.

Si tratta di un problema di scheduling (NP completo in senso ordinario). Possiamo utilizzare le variabili continue  $S_i$  a indicare l'istante di inizio del job  $i$ , e dunque:

$$C_i = S_i + p_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$T_i \geq C_i - d_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$T_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

dove la variabile  $T_i$ , dal momento che stiamo minimizzando, sarà pari, in una soluzione ottima, esattamente alla tardiness del job  $i$ . La funzione obiettivo sarà dunque

$$\min \sum_{i=1}^n T_i$$

Rimane da esprimere il vincolo che la macchina non può eseguire più di una lavorazione alla volta. A questo scopo possiamo introdurre le variabili

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il job } i \text{ è effettuato prima di } j \\ 0 & \text{se il job } j \text{ è effettuato prima di } i \end{cases}$$

Vogliamo dunque imporre che se  $s_{ij} = 1$ , allora deve essere

$$S_i + p_i \leq S_j$$

mentre ciò non è vero se  $s_{ij} = 0$ . Introducendo una costante  $M$  sufficientemente grande (ad esempio  $M > \sum p_i$ ), per ogni coppia di job  $i, j$  avremo i due vincoli:

$$S_i + p_i \leq S_j + M(1 - s_{ij})$$

e

$$S_j + p_j \leq S_i + M(1 - s_{ji})$$

oltre a, ovviamente:

$$s_{ij} + s_{ji} = 1$$

## Esercizi proposti

### 11

Risolvere il seguente problema di knapsack con il metodo del branch and bound o con la programmazione dinamica:

$$\begin{aligned}\max z &= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &\leq 9 \\ x_j &\in \{0, 1\}\end{aligned}$$

**Risposta.** La soluzione ottima è  $(1, 0, 0, 1)$ , di valore 8.

### 12

Risolvere il seguente problema con il metodo del branch and bound:

$$\begin{aligned}\max z &= 3x_1 + x_2 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_j &\text{ intero}\end{aligned}$$

**Risposta.** La soluzione ottima è  $(2, 1)$ , di valore 7.

### 13

Risolvere il seguente problema di knapsack:

$$\begin{aligned}\max z &= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &\leq 9 \\ x_j &\in \{0, 1\}\end{aligned}$$

**Risposta.** La soluzione ottima è  $(1, 0, 0, 1)$ , di valore 8.

## 14

Risolvere il seguente problema di PLI con l'algoritmo dei piani di Gomory:

$$\begin{aligned}\max z &= 40x_1 + 24x_2 + 15x_3 + 8x_4 \\ 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 &\leq 22 \\ x_j &\geq 0 \\ x_j &\text{ intero}\end{aligned}$$

**Risposta.** La soluzione ottima è  $(2, 1, 0, 0)$ , di valore 104.

## 15

Risolvere il seguente problema di PLI con l'algoritmo dei piani di Gomory:

$$\begin{aligned}\max z &= 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 &\leq 0 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 0 \\ x_j &\geq 0 \\ x_j &\in \{0, 1\}\end{aligned}$$

**Risposta.** La soluzione ottima è  $(0, 1)$ , di valore 1.

## 16

Risolvere il seguente problema di knapsack

$$\begin{aligned}\max z &= 52x_1 + 40x_2 + 38x_3 + 19x_4 + x_5 \\ 17x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 4x_4 + 5x_5 &\leq 20 \\ x_i &\in \{0, 1\}\end{aligned}$$

**Risposta.** La soluzione ottima è  $(0, 1, 1, 0, 0)$ , di valore 78.

## 17

Risolvere il seguente problema di knapsack

$$\begin{aligned}\max z &= 52x_1 + 10x_2 + 38x_3 + 9x_4 + x_5 \\ 17x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 3x_4 + x_5 &\leq 29 \\ x_i &\text{ intero}\end{aligned}$$

**Risposta.** La soluzione ottima è  $(1, 0, 0, 4, 0)$ , di valore 88.

## 18

Risolvere il seguente problema di knapsack

$$\begin{aligned}\max z &= 12x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 7x_4 \\ 8x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 5x_4 &\leq 20 \\ x_i &\in \{0, 1\}\end{aligned}$$

**Risposta.** La soluzione ottima è  $(1, 0, 1, 1)$ , di valore 29.

## 19

Si risolva il seguente problema di knapsack

$$\begin{aligned}\max z &= 3x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 11x_4 \\ 6x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 10x_4 &\leq 23 \\ x_i &\in \{0, 1\}\end{aligned}$$

**Risposta.** La soluzione ottima è  $(0, 0, 1, 1)$ , di valore 20.

## 20

Risolvere il seguente problema di PLI con l'algoritmo dei piani di Gomory:

$$\begin{aligned}\max z &= x_1 + 2x_2 \\ x_1 - 2x_2 &\geq -2 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\text{ interi}\end{aligned}$$

**Risposta.** La soluzione ottima è  $(2, 1)$ , di valore 4.

## 21

Grazie a una vincita al superenalotto, avete ora il problema di investire 100 milioni di lire. Un vostro amico vi consiglia di comprare quote di fondi di investimento, della società Kezef. In particolare vi sono due tipi di fondi: Kezef Italia e Kezef Europa. Le quote possono essere acquistate solo in lotti indivisibili, da 12 milioni ciascuno per Kezef Italia, da 20 milioni ciascuno per Kezef Europa. Il vostro amico ritiene che il rendimento annuo di Kezef Italia dovrebbe essere pari a un sesto del capitale investito; quello di Kezef Europa pari al 15%. Il numero di lotti di Kezef Europa non può superare il 50% del numero complessivo di lotti acquistati. Formulare il problema come programmazione lineare a numeri interi e risolverlo con il metodo dei piani di taglio, indicando le disequazioni (tagli) generate nel corso del procedimento.

## 22

Ci sono  $n$  lavori *indivisibili* da effettuare, ognuno caratterizzato da una sua durata  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Avendo due persone a disposizione, volete ripartire i lavori tra queste due persone facendo in modo che i loro carichi di lavoro siano il più possibile bilanciati. Formulare il problema in termini di problema di knapsack.

## 23

Un operatore turistico noleggia il proprio furgoncino a 8 posti per far fare ai turisti escursioni guidate di Radiator Springs. Si presentano all'operatore quattro gruppi di turisti, costituiti da 2, 3, 4 e 5 persone. Siccome non c'è posto per tutti, l'operatore chiede a ogni gruppo (i cui componenti non vogliono separarsi) di offrire una cifra per il trasporto. I componenti dei quattro gruppi si consultano, e alla fine offrono, rispettivamente, 30, 50, 80 e 70 euro. Quali gruppi accetterà l'operatore turistico per massimizzare i guadagni? Rispondere formulando il problema e applicando un opportuno algoritmo.

## 24

Una macchina deve eseguire 6 lavori, ciascuno dei quali è caratterizzato da una durata  $p_i$ , una data di consegna  $d_i$  e un peso  $w_i$ , che può pensarsi come una misura dell'importanza di ciascun lavoro. Tra i lavori esistono relazioni di precedenza. Formulare come PLI il problema di determinare la sequenza di lavorazione sulla macchina in modo tale da

minimizzare il *massimo* valore che assume la quantità  $w_i T_i$ , ove  $T_i$  indica la *tardiness* del lavoro  $i$ -esimo.

$i$	$d_i$	$w_i$	$p_i$	precede...
1	8	2	4	5
2	12	1	3	5
3	8	2	2	6
4	8	1	4	6
5	12	4	1	–
6	13	3	1	–

## 25

Un grafo non orientato  $G(N, A)$  rappresenta un'area geografica, in cui  $N$  è l'insieme dei nodi (numerati da 1 a  $n$ ) e  $A$  è quello degli archi. I nodi rappresentano potenziali città in cui una linea aerea può aprire sedi. Aprire una sede nella città  $i$  ha un costo pari a  $f_i$ . Per ogni arco  $(i, j)$  sono dati due valori:  $c_{ij}$  e  $d_{ij}$ . Può essere attivata una tratta aerea tra le città  $i$  e  $j$ , solo se vi è una sede in  $i$  oppure in  $j$ . Se vi è una sede soltanto in una delle due città, allora la compagnia prevede di guadagnare  $c_{ij}$ . Se vi è una sede in ambedue le città, allora la compagnia prevede di guadagnare  $d_{ij} > c_{ij}$ . Il problema consiste nel determinare in quali città aprire una sede, in modo da massimizzare i profitti. Scrivere la formulazione del problema come PLI.

## 26

E' dato un grafo non orientato  $G(N, A)$ , in cui  $N$  è l'insieme dei nodi (numerati da 1 a  $n$ ) e  $A$  è quello degli archi. Per ogni arco  $(i, j)$  è associato un peso  $c_{ij}$ . Il problema consiste nel colorare ciascun nodo con uno tra quattro colori (Rosso, Blu, Nero, Verde), in modo da minimizzare il peso complessivo degli archi aventi ambedue gli estremi con lo stesso colore. Formulare tale problema come PLI.

## 27

In un pronto soccorso, per ciascun giorno della settimana è dato un certo fabbisogno in termini di persone che devono essere presenti in servizio a tempo pieno. Il fabbisogno di una persona a tempo pieno può essere soddisfatto da due persone a tempo parziale.

	lunedì	martedì	mercoledì	giovedì	venerdì	sabato	domenica
persone	10	8	12	9	9	7	8



La struttura dei turni è la seguente: quattro giorni consecutivi di lavoro a tempo pieno, seguiti da un giorno di lavoro a tempo parziale, seguiti da due di riposo.

Il costo settimanale di un lavoratore si ottiene considerando 100 euro per ogni giorno feriale (dal lunedì al venerdì), 110 per ogni sabato lavorato e 130 per ogni domenica lavorata. Questi costi si dimezzano per le giornate lavorate a tempo parziale.

Formulare come PLI il problema di come coprire il fabbisogno di personale al costo minimo.

## 28

Un circuito elettronico è rappresentato da un grafo non orientato  $G(N, A)$ , in cui  $N$  è l'insieme dei nodi (componenti) e  $A$  quello degli archi (collegamenti). Per ogni nodo  $i$  è dato un peso  $w_i$  che rappresenta l'*area* del componente e per ogni arco  $(i, j)$  un valore  $c_{ij}$  che rappresenta il *numero* di collegamenti elettrici tra i due componenti  $i$  e  $j$ . Si vuole partizionare l'insieme dei nodi in 3 insiemi, in modo tale che il peso dei nodi di ciascun sottoinsieme sia compreso tra due valori  $L$  e  $U$ , e che la somma dei valori degli archi aventi estremi in insiemi diversi sia minimizzata. Formulare tale problema come PLI.

## 29

In una scuola di musica, bisogna definire l'orario settimanale. Ci sono da riempire complessivamente quattro pomeriggi (L, Ma, Me, G) di tre ore ciascuno (indicate come ore 1, 2 e 3). Le specifiche sono le seguenti:

- Ci sono da allocare 6 ore di chitarra, 3 di violino, 2 di pianoforte e 1 di arpa.
- Ogni giorno vi deve essere lezione di almeno due strumenti diversi.
- Siccome l'arpista e il pianista hanno litigato, non vogliono incontrarsi e quindi le due lezioni corrispondenti non devono mai essere consecutive.
- Ogni insegnante può esprimere delle preferenze, in termini di ore in cui non vuole fare lezione:
  - l'insegnante di chitarra non vuole fare lezione nelle ore 1 del lunedì o del martedì;
  - l'insegnante di violino non vuole fare lezione nelle ore 2 del mercoledì o del giovedì;

- l'insegnante di pianoforte non vuole mai fare lezione nell'ora 3 di qualsiasi giorno;
- l'insegnante di arpa non vuole fare lezione il martedì.

Formulare come PLI il problema di determinare un orario che rispetti tutti i vincoli indicati, minimizzando il numero di ore che non rispettano le preferenze degli insegnanti.

## 30

Il centro prove di una casa automobilistica deve eseguire una serie di test su motori. I motori disponibili sono raggruppati in classi, numerate da 1 a 5 (1 è la classe più alta). Ciascun test  $j$  è caratterizzato da due informazioni: il *chilometraggio*  $k_j$  e la *classe minima*  $c_j$ . Ad esempio, se  $c_j = 3$ , vuol dire che il test  $j$  può essere svolto da motori di classe 1, 2 o 3, ma non 4 o 5.

A ogni classe  $i$ , sono associate due quantità: il prezzo  $p_i$  di acquisto di un motore di quella classe, e un costo chilometrico  $h_i$ . Ad esempio, se tutto il test  $j$  venisse svolto da un motore di classe  $i$ , il costo chilometrico sarebbe  $k_j h_i$ . Si consideri che uno stesso motore può essere utilizzato per più test, dunque  $p_i$  viene pagato una volta sola.

Formulare PER ESTESO come PLI il problema di determinare quali motori acquistare e come assegnare i test al fine di minimizzare la spesa complessiva.

test $j$	$k_j$ (km)	$c_j$
A	20000	4
B	40000	2
C	30000	5
D	50000	4
E	20000	3

motore (classe) $i$	$p_i$ (euro)	$h_j$ (euro/km)
1	10500	0.3
2	8500	0.4
3	8000	0.5
4	7500	0.6
5	6000	0.7

## 31

Nel territorio di una ASL, vi sono  $n$  centri abitati, in ognuno dei quali può essere dislocata una unità di pronto soccorso. Per ogni coppia di centri  $i$  e  $j$  è nota la distanza  $d_{ij}$ .

Considerando che, data una dislocazione delle unità, ciascun centro abitato si servirà del pronto soccorso più vicino, il problema consiste nel decidere dove localizzare  $m < n$  unità di pronto soccorso, facendo in modo che sia minima la massima distanza di un centro abitato dal pronto soccorso a esso più vicino. (Non si può aprire più di una unità in un centro abitato.) Formulare il problema come PLI.

## 32

Un sistema per la gestione dei carichi elettrici domestici controlla, tra le altre cose, uno scaldabagno. Lo scaldabagno può essere tenuto acceso o spento durante ciascuna delle 24 ore. Siccome si vuole però che la temperatura dell'acqua non scenda mai troppo rispetto a un valore di riferimento, devono valere le seguenti condizioni:

- Nell'arco delle 24 ore, lo scaldabagno non può rimanere spento per più di 12 ore.
- Lo scaldabagno non può restare mai spento per più di 4 ore consecutive.
- Ogni intervallo di tempo in cui lo scaldabagno è acceso deve durare almeno 3 ore.

Il costo dell'energia elettrica varia di ora in ora: sia  $p_t$  il consumo (in KWh) se lo scaldabagno è acceso durante l'ora  $t$ ,  $t = 1, \dots, 24$  (chiaramente il consumo è nullo se lo scaldabagno è spento). Formulare come programmazione lineare intera il problema di decidere, per ciascuna ora nell'arco di una giornata, se lo scaldabagno deve rimanere acceso o spento, nel rispetto delle condizioni indicate, e in modo da minimizzare i costi complessivi.

## 33

Un'officina di gommista consiste di un reparto cambio gomme (1), seguito da un reparto dove viene effettuata la convergenza (2). Ogni vettura  $i$  deve essere processata prima dal reparto (1), per un tempo  $p_{i1}$ , e poi dal (2), per un tempo  $p_{i2}$ , fermo restando che ciascun reparto può operare su una vettura sola alla volta. L'istante al quale una vettura termina la lavorazione nel reparto (2) prende il nome di *tempo di completamento*. La sequenza con cui le vetture sono processate dai due reparti è la stessa. Considerando che per ciascuna vettura saranno necessari i tempi (in minuti) indicati in tabella, formulare come programmazione lineare intera il problema di determinare la sequenza delle vetture che minimizza la somma dei tempi di completamento delle lavorazioni.

vettura	$p_{i1}$	$p_{i2}$
A	12	8
B	7	15
C	9	11
D	8	4

### 34

Un grafo  $G = (N, A)$  rappresenta una rete stradale. Una pattuglia di polizia può essere localizzata in qualsiasi nodo. Vi sono due tipi di pattuglie. Una normale, che ha un costo  $c_n$ , che consente di controllare il nodo stesso. Una speciale, che ha un costo superiore  $c_s > c_n$ , che consente di controllare, oltre al nodo stesso, anche tutti i suoi adiacenti. Per il grafo in figura, formulare come programmazione a numeri interi il problema di determinare in quali nodi dislocare pattuglie normali e speciali in modo da controllare tutti i nodi del grafo al costo minimo.

### 35

Uno stabilimento per la produzione di ceramiche deve organizzare la produzione per il prossimo periodo. La fornace deve produrre i lotti indicati in tabella, per ognuno dei quali è dato l'istante di rilascio ( $r_i$ , release date, in giorni a partire da oggi) prima del quale il lotto non può iniziare, il tempo necessario al suo processamento ( $p_i$ , giorni), una data di consegna prevista ( $d_i$ , due date, in giorni a partire da oggi) e la penale ( $w_i$ , in euro) che si paga se un lotto non viene terminato entro la propria due date. Una volta iniziato, il lotto non può essere interrotto.

Formulare come programmazione lineare intera il problema di determinare l'istante di inizio di ciascun lotto in modo tale da minimizzare i costi legati alle penali.

lotto	$r_i$	$p_i$	$d_i$	$w_i$
A	0	4	8	3000
B	1	5	8	2500
C	7	3	12	1000
D	2	6	15	4000

### 36

Dalle 12 alle 18 di un certo giorno, il prezzo dell'energia elettrica al consumatore è il seguente (centesimi di euro/kWh, supposto costante all'interno dello slot temporale orario):

12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18
3	1	2	2	3	1

Un consumatore deve usare, nell'arco orario compreso tra le 12 e le 18, tre elettrodomestici: lavatrice, lavastoviglie e forno. Per i programmi scelti, tali elettrodomestici hanno i profili di carico (kW) indicati nella seguente tabella (si noti che i programmi di lavatrice e forno durano tre ore, la lavastoviglie due):

lavatrice			lavastoviglie		forno		
2	1	1,5	2,5	1	2,5	2	1,5

Una volta fatto partire, un elettrodomestico non può essere interrotto. In nessuna ora si possono superare i 3.5 kW complessivi. Il problema è decidere quando far partire ciascun elettrodomestico per minimizzare i costi complessivi, nel rispetto del vincolo sul consumo complessivo. Formulare il problema come programmazione lineare a numeri interi.

## 37

È dato un insieme di 10 elettrodomestici, che devono essere caricati su 4 furgoni. Ciascun elettrodomestico è caratterizzato da un peso  $w_i$ , e dal suo tipo (congelatore, lavatrice, lavastoviglie). Il massimo peso che un furgone può portare è 230 kg. Ciascun elettrodomestico, per il trasporto, deve essere montato su un apposito supporto di legno. Uno stesso supporto può essere usato, su un furgone, per più elettrodomestici *dello stesso tipo*. I furgoni hanno varie restrizioni per quanto riguarda i tipi di elettrodomestico che possono ospitare, come indicato nella tabella, che riporta anche il costo dei vari tipi di supporto.

$i$	$w_i$	tipo
1	80	congelatore
2	90	congelatore
3	105	congelatore
4	80	frigorifero
5	75	frigorifero
6	85	frigorifero
7	90	frigorifero
8	55	lavastoviglie
9	65	lavastoviglie
10	75	lavastoviglie

tipo	furgoni compatibili	costo supporto
congelatore	1,2,4	500 euro
frigorifero	1,3,4,5	600 euro
lavastoviglie	2,3,4,5	700 euro

Formulare come PLI il problema di come caricare i furgoni minimizzando la spesa per i supporti.

## 38

Un insieme di  $n$  lavorazioni deve essere effettuato da una macchina utensile. Ogni lavorazione è caratterizzata da un numero di giorni-macchina necessari per effettuarla  $p_i$ , una data  $d_i$  (espressa in giorni a partire da oggi), e un guadagno  $r_i$ . Il guadagno però è conseguito se e solo se la lavorazione termina entro la propria data. La macchina utensile può eseguire una sola lavorazione per volta. Le lavorazioni non sono interrompibili.

Formulare come PLI il problema di determinare in che ordine sequenziare le lavorazioni sulla macchina al fine di massimizzare il guadagno.