

Flusso a costo minimo e semplice su reti *

La particolare struttura di alcuni problemi di PL può essere talvolta utilizzata per la progettazione di tecniche risolutive molto più efficienti dell'algoritmo del semplice. Il caso più importante si ha nei cosiddetti *problemi di trasporto* o *problemi di flusso su reti*. Come mostrato originariamente da G.B.Dantzig(1951b) e A. Orden(1956), la particolare struttura dei problemi di costo su reti di flusso permette forti semplificazioni nel metodo del semplice. Nel seguito supporremo note le nozioni di base sul funzionamento del metodo del semplice, quali il concetto di soluzione di base, il criterio di ottimalità e le condizioni di complementarità. Il metodo che si ottiene particolarizzando il metodo del semplice alla struttura di reti prende appunto il nome di *metodo del semplice su reti*.

1 Problemi di Flusso a Costo Minimo

Il problema di Flusso a Costo Minimo consiste nel determinare la via più economica per trasportare una determinata quantità di un bene (e.g. petrolio, arance, automobili...) da uno o più punti di produzione ad uno o più punti di consumo, attraverso una rete di trasporto data (e.g. una rete idraulica, una rete di distribuzione, una rete stradale etc). Va sottolineato fin d'ora che il modello matematico del problema si presta a rappresentare molti problemi che nulla hanno a che fare con la spedizione di merci, e pertanto in questo testo si preferisce la nozione più astratta di *flusso*. La rete può essere convenientemente rappresentata mediante un grafo orientato, come in figura 1.

In questa rappresentazione i 5 nodi del grafo, denominati 1, 2, ..., 5, possono essere associati ad altrettante località (città, depositi, impianti industriali, stazioni...), e gli 8 archi a vie di comunicazione a senso unico (tratte stradali, ferroviarie...) tra queste località. Si osservi che non si perde di generalità nel considerare le strade a senso unico piuttosto che a doppio senso; al contrario ogni strada a doppio senso può essere rappresentata da una coppia di archi che puntano in direzioni opposte tra le due località. Seguendo la terminologia utilizzata comunemente nella teoria dei grafi, indicheremo con n in numero

*basato su dispense scritte da Dario Pacciarelli (Dipartimento di Informatica e Automazione, Università di Roma Tre), a cura di Alessandro Agnetis e Marco Pranzo (Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università di Siena).

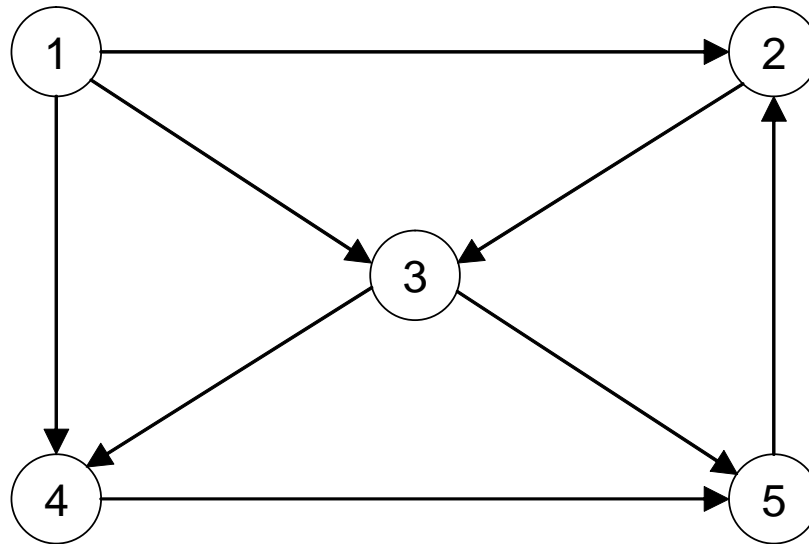


Figura 1: Un esempio di rete di trasporto

dei nodi del grafo e con m il numero di archi, per cui il grafo dell'esempio 1 ha $n = 5$ e $m = 8$.

La topologia della rete costituisce solo una parte dei dati in un problema di trasporto. A questi si aggiungono:

- la domanda di beni in certe località e la disponibilità dei beni in altre località;
- i costi di trasporto da una località all'altra
- eventualmente, una capacità massima associata a ciascun arco della rete.

In questa sezione, supporremo che non vi siano vincoli di capacità sugli archi, ossia, in altre parole, che ciascun arco abbia capacità infinita. Nel seguito generalizzeremo il metodo al caso capacitato.

Per analogia con il problema di distribuzione di liquidi, i nodi che richiedono beni sono chiamati *pozzi*, mentre i nodi con disponibilità di beni sono chiamati *sorgenti*. Possono esistere anche dei nodi che non richiedono né dispongono di beni, tali nodi sono detti *di transito*. Si noti che questa classificazione dei nodi in tre tipologie è completamente indipendente dalla struttura della rete, ma è definita soltanto dai dati numerici di disponibilità e domanda. Nell'esempio 1, se c'è una domanda di 6 unità al nodo 4, di 8 unità al nodo 5, e una disponibilità di 10 unità al nodo 1, e di 4 unità al nodo 2, allora 4 e 5 sono

nodi *pozzo*, mentre 1 e 2 sono nodi *sorgente*. Il nodo 3 è un nodo di transito. Rappresentando la disponibilità di bene come una domanda negativa, è possibile allora associare ad ogni nodo $i = 1, \dots, n$ un'etichetta pari alla domanda d_i del nodo, che sarà positiva per i pozzi, negativa per le sorgenti e nulla per i nodi di transito. Il vettore domanda è un vettore d ad n componenti, in cui la i -esima componente è pari a d_i . La domanda appena descritta corrisponde quindi al vettore:

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Noi supprremo sempre verificata la seguente assunzione:

Assunzione 1.1 *La disponibilità totale di tutti i nodi sorgente è uguale alla domanda totale di tutti i nodi pozzo.*

Questa assunzione appare piuttosto irrealistica in pratica: sarebbe sorprendente che la domanda totale di arance fosse esattamente uguale all'offerta del mercato. Tuttavia, tale assunzione non limita l'applicabilità della teoria risultante: problemi pratici riguardanti il trasporto di beni possono essere sempre ricondotti ad una forma che soddisfi l'assunzione 1.1 aggiungendo opportuni nodi e archi fittizi, con funzioni del tutto analoghe alle variabili di scarto utilizzate per ricondurre in forma standard i problemi di PL. D'altra parte l'assunzione 1.1 rende la teoria più semplice ed elegante: ogni soluzione che soddisfa la domanda di tutti i *pozzi* deve soddisfare tale domanda esattamente e deve esaurire completamente la disponibilità di tutte le *sorgenti*.

Per quanto riguarda i costi di trasporto da una località all'altra, si assume che ogni arco (i, j) della rete abbia un *costo unitario* di trasporto c_{ij} associato. Pertanto un'unità di bene spedita da un'origine ad una destinazione "paga" un costo pari alla somma dei costi unitari di trasporto di tutti gli archi attraversati dal bene. Il problema di flusso di costo minimo consiste nel cercare una soluzione che minimizzi il costo totale che è necessario pagare per soddisfare la domanda di tutti i nodi della rete. Un ulteriore dato del problema sarà quindi il vettore c dei costi degli archi della rete. Per l'esempio di figura

1 un possibile vettore dei costi è il seguente:

$$c = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{13} \\ c_{14} \\ c_{23} \\ c_{34} \\ c_{35} \\ c_{45} \\ c_{52} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 12 \\ -7 \end{pmatrix} \quad (2)$$

In un problema di flusso una soluzione è definita specificando, per ogni arco (i, j) , la quantità di bene x_{ij} che transita sull'arco, per tutti gli archi della rete. La quantità x_{ij} si dice *flusso sull'arco* (i, j) . Una soluzione può quindi essere rappresentata con un vettore x ad m componenti. Per esempio, per il problema di figura 1, e con la domanda (1), una soluzione può essere la seguente:

$$x = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{23} \\ x_{25} \\ x_{34} \\ x_{35} \\ x_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Negli esempi a seguire sarà spesso conveniente rappresentare graficamente il vettore x , disegnando solo gli archi (i, j) della rete per i quali $x_{ij} > 0$, ed ignorando gli archi (i, j) per i quali $x_{ij} = 0$. La soluzione (3) può quindi essere rappresentata come in figura 2.

Quello che ci interessa determinare è un valore del vettore x , a cui associare un costo $c^T x$ che sia minimo tra tutte le soluzioni ammissibili. Una soluzione, descritta dal valore del flusso sui singoli archi, è *ammissibile* se e solo se:

- (i) Per ogni nodo di transito la somma dei flussi degli archi entranti è pari alla somma dei flussi degli archi uscenti. Ad esempio, $6 + 4 = 2 + 8$ per il nodo di transito 3 della soluzione (3).
- (ii) Per ogni nodo pozzo, la somma dei flussi degli archi entranti meno la somma dei flussi degli archi uscenti è uguale alla domanda del nodo. Nell'esempio (3), si ha $4 + 2 = 6$ al pozzo 4.
- (iii) Per ogni nodo sorgente, la somma dei flussi uscenti meno la somma dei flussi entranti è pari alla disponibilità del nodo. Nell'esempio (3), si ha $6 + 4 = 10$ alla sorgente 1.

$$\begin{array}{rcccccccc}
\min & 10x_{12} + 8x_{13} + x_{14} + 2x_{23} + x_{34} + 4x_{35} + 12x_{45} - 7x_{52} & & & & & & & \\
& -x_{12} & -x_{13} & -x_{14} & & & & & = -10 \\
& x_{12} & & & -x_{23} & & & +x_{52} & = -4 \\
& & x_{13} & & +x_{23} & -x_{34} & -x_{35} & & = 0 \\
& & & x_{14} & & +x_{34} & & -x_{45} & = 6 \\
& & & & & & +x_{35} & +x_{45} & -x_{52} = 8 \\
& x \geq 0 & & & & & & &
\end{array} \tag{6}$$

Si osservi che la matrice A non ha rango pieno: basta infatti sommare tutte le righe per ottenere il vettore nullo, il che implica che le righe di A non sono linearmente indipendenti fra loro. La assunzione 1.1 ci assicura comunque che il problema ammette soluzione, in quanto $\text{rango}[A] = \text{rango}[A \ d]$. Pertanto, in un problema di flusso a costo minimo, una delle equazioni può sempre essere cancellata.

Nella parte restante di questo capitolo vedremo come si particolarizzano i passi dell'algoritmo del simplesso per il problema di flusso a costo minimo.

2 Soluzioni base e alberi ricoprenti

Poiché sappiamo che la matrice A non ha rango massimo, una base di A consiste di $n - 1$ colonne di A linearmente indipendenti. Queste colonne corrispondono ad una collezione di archi della rete di flusso. Vogliamo dimostrare che, se la rete è connessa (come supporremo sempre), tutte le basi di A sono associate ad alberi ricoprenti della rete. Poiché la nozione di albero ricoprente è associata ai grafi non orientati, per estenderla ai grafi orientati è sufficiente ignorare il verso degli archi della rete di flusso. Inoltre, in queste note utilizzeremo sempre il termine *ciclo* per riferirci a un insieme di archi tali, ignorando il loro orientamento, da formare un cammino chiuso (in cui il primo e l'ultimo nodo del cammino coincidono). La figura 3 mostra un esempio di albero ricoprente del grafo di figura 1.

Vogliamo anzitutto dimostrare il seguente lemma:

LEMMA 1 *Sia $T \subset A$ un insieme di colonne di A tali che gli archi ad esse corrispondenti formano un albero ricoprente. Allora, le colonne di T sono linearmente indipendenti.*

Dim.– Iniziamo con l'osservare che ogni albero ha la seguente proprietà: indipendentemente da come sia etichettato un nodo iniziale v_0 , i rimanenti nodi possono essere numerati v_1, v_2, \dots, v_{n-1} in modo tale che, per ogni $i \geq 1$, esiste esattamente un arco con un estremo uguale a v_i e l'altro estremo uguale ad uno dei nodi precedentemente etichettati v_0, v_1, \dots, v_{i-1} . Allo scopo è sufficiente effettuare una visita dell'albero etichettando i nodi (da v_0 a v_{n-1}) e gli archi (da 1 a $n - 1$) nell'ordine in cui vengono visitati. Se

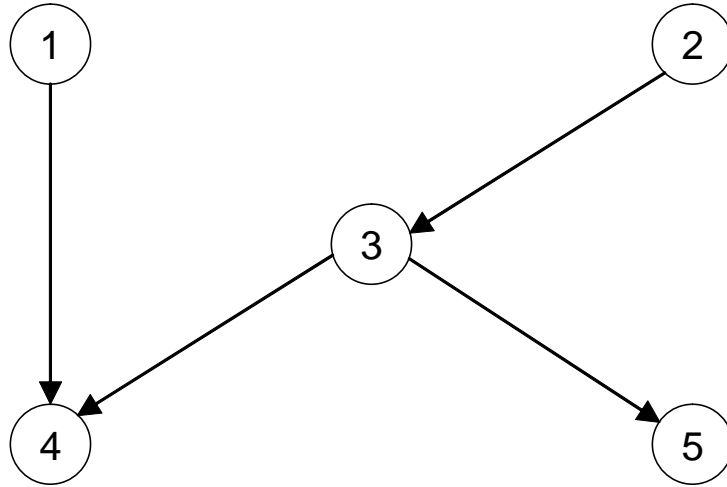


Figura 3: Un albero ricoprente.

ordiniamo le $n - 1$ colonne e le n righe della matrice A associate all'albero ricoprente, nell'ordine di visita suddetto, si ottiene una matrice $(n - 1) \times n$. Se scartiamo la prima riga della matrice (associata all'etichetta v_0), resta una sottomatrice di A , di dimensioni $(n - 1) \times (n - 1)$ che, per costruzione, è triangolare superiore ed ha tutti gli elementi sulla diagonale principale diversi da zero. Questa sottomatrice ha quindi determinante diverso da zero, il che implica che la matrice A ha rango $n - 1$, e che le colonne associate ad ogni albero ricoprente sono sempre linearmente indipendenti fra loro. Questo dimostra che le colonne di A associate ad un albero ricoprente della rete di flusso sono sempre basi di A . \square

A titolo di esempio, per l'albero ricoprente di figura 3, se visitiamo i nodi nell'ordine 1, 4, 3, 2, 5, e quindi visitiamo gli archi nell'ordine $(1, 4)$, $(3, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, otteniamo la nuova numerazione di figura 4, la cui matrice di incidenza, ottenuta ri-ordinando righe e colonne nel nuovo ordine di visita, è:

$$\begin{array}{l}
 \text{etichetta} \\
 v_0 \\
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{archi} \\
 (1, 4)(3, 4)(2, 3)(3, 5) \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 -1 & & & \\
 1 & 1 & & \\
 & -1 & 1 & -1 \\
 & & -1 & \\
 & & & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \tag{7}$$

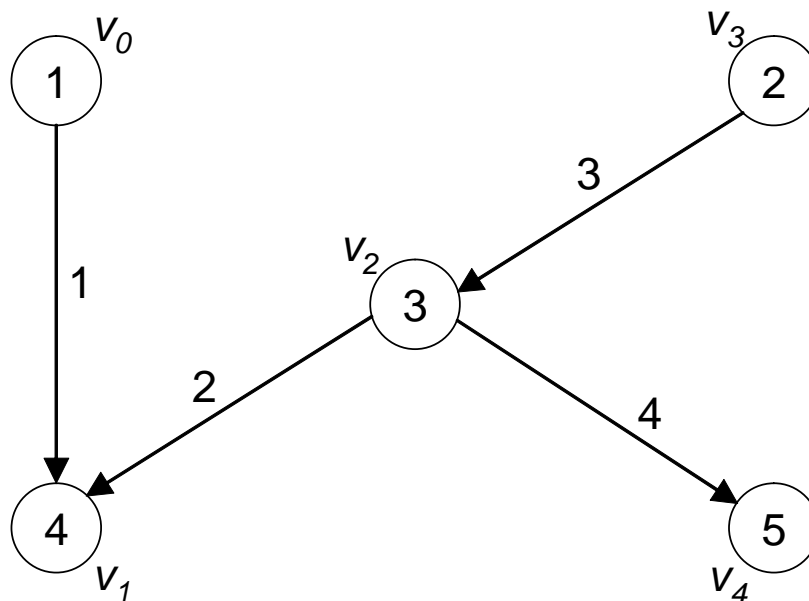


Figura 4: Un albero etichettato

Nella parte restante di questa sezione vogliamo dimostrare il viceversa di quanto dimostrato sopra:

LEMMA 2 *Un sottoinsieme T di colonne di A è una base solo se è associato ad un albero ricoprente della rete di flusso.*

Dim.– Una base di A contiene necessariamente $n - 1$ colonne, e un insieme di $n - 1$ colonne di A che non sia un albero ricoprente deve necessariamente contenere un ciclo. Per i nostri scopi è quindi sufficiente dimostrare che le colonne di A associate ad un ciclo sono linearmente dipendenti, ovvero che esiste una combinazione lineare delle colonne, con coefficienti non tutti nulli, a somma 0. Dato un ciclo, i coefficienti della combinazione lineare possono ottenersi semplicemente percorrendo il ciclo in un verso qualsiasi e fissando il coefficiente dell'arco (i, j) del ciclo:

- pari a 1 se l'arco è *concorde* con il verso di percorrenza del ciclo;
- pari a -1 se l'arco è *discorde* dal verso di percorrenza del ciclo;

Viene lasciato per esercizio al lettore verificare che questa combinazione lineare delle colonne di A associate ad un ciclo ha somma zero. \square

A titolo di esempio, si consideri il ciclo formato dagli archi $(1, 3)$, $(3, 4)$ e $(1, 4)$ in figura 2. Percorrendo il ciclo nel verso $1, 3, 4$ si ha che l'arco $(1, 4)$ è discorde, mentre gli altri

due sono concordi con il verso di percorrenza. Le colonne di A associate ad i tre archi sono:

$$A_{13} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A_{34} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A_{14} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sommando A_{13} con A_{34} e sottraendo A_{14} , si ottiene la colonna nulla, il che dimostra che queste tre colonne sono linearmente dipendenti e quindi non possono far parte contemporaneamente di una base di A .

In definitiva, dai Lemmi 1 e 2 si ha il seguente fondamentale teorema:

TEOREMA 1 *Data una rete di flusso connessa, e detta A la sua matrice di incidenza nodi-archi, una sottomatrice B $(n - 1) \times (n - 1)$ è una base di A se e solo se gli archi associati alle colonne di B costituiscono un albero ricoprente.*

Risolvendo un problema di flusso di costo minimo con l'algoritmo del simplesso, avremo quindi che tutte le soluzioni base ammissibili esplorate nella fase 2 sono alberi ricoprenti della rete di flusso. Come accade per qualsiasi problema di PL, anche nei problemi di flusso possono esistere basi ammissibili, non ammissibili e degeneri. La condizione di ammissibilità di una base è sempre la solita: $x_B = B^{-1}d \geq 0$, che però in questo caso può essere verificata più agevolmente risolvendo per sostituzione il sistema $Bx_B = d$, a partire da una foglia dell'albero ricoprente, e verificando che $x_B \geq 0$.

Si può verificare, per esempio, che l'albero di figura 3 NON è ammissibile, in quanto la corrispondente soluzione base è:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_{14} \\ x_{34} \\ x_{23} \\ x_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Una soluzione base ammissibile è invece quella di figura 5, per la quale si ha:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{34} \\ x_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_1 \\ -d_2 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (8)$$

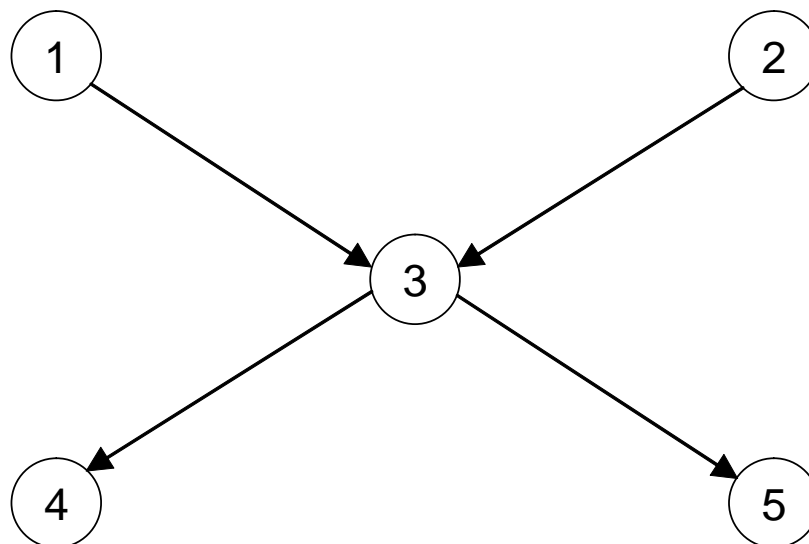


Figura 5: una soluzione di base ammissibile.

3 Condizioni di ottimalità

In questa sezione vogliamo mostrare come sia possibile verificare l'ottimalità di una soluzione di base in modo efficiente, utilizzando le condizioni di complementarità. Il duale del problema di flusso a costo minimo (4) è il seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & d^T u \\ & u^T A \leq c^T \end{aligned} \tag{9}$$

In realtà, come abbiamo già osservato, il problema primale ha una equazione ridondante, che potrebbe essere eliminata senza alterare il problema. Questo significa che il duale ha una variabile di troppo, che potrebbe essere eliminata senza alterare il problema. Per semplicità di notazione, tratteremo primale e duale senza eliminare equazioni/variabili, ma terremo conto di questa osservazione fissando arbitrariamente a zero una delle variabili duali (il che equivale ad eliminarla). Il problema duale può essere scritto più convenientemente per esteso, indicando con \mathcal{A} l'insieme degli archi della rete di flusso:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n d_i u_i \\ & u_j - u_i \leq c_{ij} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A} \end{aligned} \tag{10}$$

Le variabili duali u sono spesso chiamate *potenziali*. Consideriamo allora una soluzione di base, e indichiamo la partizione degli archi di \mathcal{A} nei due insiemi \mathcal{B} (gli archi dell'albero

ricoprente) e \mathcal{F} (gli altri archi della rete). Se all'ottimo un arco è in base, il corrispondente vincolo duale deve essere soddisfatto all'uguaglianza, ossia:

$$u_j - u_i = c_{ij} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{B} \quad (11)$$

Le (11) sono $n - 1$ equazioni in n variabili, delle quali però una può essere fissata arbitrariamente a zero, per quanto detto sopra. Si può allora determinare una soluzione u semplicemente per sostituzione, ottenendo un'unica soluzione di cui dobbiamo verificare l'ammissibilità duale, cioè il soddisfacimento di tutti gli altri vincoli:

$$u_j - u_i \leq c_{ij} \quad \forall (i, j) \in \mathcal{F} \quad (12)$$

Se dunque, data una soluzione di base ammissibile x , le u_i ottenute con le (11) verificano anche le (12), la soluzione x è ottima.

Ad esempio, per la base ammissibile di figura 5, e con i costi dati in (6) si ha:

$$\begin{cases} u_3 - u_1 = c_{13} = 8 \\ u_3 - u_2 = c_{23} = 2 \\ u_4 - u_3 = c_{34} = 1 \\ u_5 - u_3 = c_{35} = 4 \end{cases}$$

Da cui, fissando arbitrariamente $u_3 = 0$, si ottiene: $u_1 = -8$, $u_2 = -2$, $u_4 = 1$, $u_5 = 4$. Sostituendo nelle (12) si ha:

$$\begin{cases} u_2 - u_1 \leq c_{12} = 10 \\ u_4 - u_1 \leq c_{14} = 1 \\ u_5 - u_4 \leq c_{45} = 12 \\ u_2 - u_5 \leq c_{52} = -7 \end{cases}$$

Sostituendo si ha che primo e terzo vincolo sono soddisfatti, mentre secondo e quarto sono violati. La base corrente *non* è quindi ottima.

4 Condizioni di illimitatezza e cambiamento di base

Vogliamo ora mostrare come sia possibile verificare l'illimitatezza inferiore del prolema, oppure operare un cambiamento di base in modo efficiente.

Se una soluzione x non verifica le condizioni di ottimalità, dalle (12) deve esistere un arco $(i, j) \in \mathcal{F}$ tale che $u_j - u_i > c_{ij}$. In altri termini, il costo ridotto della variabile x_{ij} , chiamando A_{ij} la colonna associata a tale variabile, sarà

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u^T A_{ij} = c_{ij} - u_j + u_i < 0,$$

e quindi converrà far entrare in base la variabile x_{ij} , ovvero *attivare* l'arco (i, j) . L'arco (i, j) forma però con gli archi di \mathcal{B} (l'albero ricoprente) un ciclo. Sia \mathcal{C} l'insieme degli archi del ciclo. Poiché la nuova base dovrà ancora essere un albero ricoprente, l'arco uscente dalla base dovrà necessariamente essere un arco di \mathcal{C} . Quale sarà allora l'arco che deve lasciare la base? Possiamo procedere in modo del tutto analogo a quanto fatto per il metodo del simplesso generale. Infatti, essendo $\bar{c}_{ij} < 0$, conviene aumentare il flusso su (i, j) . Questo però implica che, per mantenere l'ammissibilità della soluzione corrente, dobbiamo necessariamente alterare di conseguenza il valore del flusso su tutti gli archi del ciclo, aumentando il flusso degli archi concordi con (i, j) e diminuendo il flusso degli archi discordi da (i, j) .

Se accade che *tutti* gli archi del ciclo \mathcal{C} sono concordi con (i, j) , è evidente che possiamo aumentare indefinitamente il flusso sugli archi di \mathcal{C} , diminuendo contemporaneamente la funzione obiettivo: in tal caso il problema è *illimitato inferiormente*. Questa condizione può verificarsi se e solo se nel ciclo *orientato* \mathcal{C} la somma dei costi degli archi è negativa:

$$\sum_{(h,k) \in \mathcal{C}} c_{hk} < 0.$$

Altrimenti, c'è un arco discorde, sia esso (u, v) , il cui flusso si annulla per primo, aumentando il flusso sull'arco (i, j) . Tale arco (u, v) sarà quello che esce dalla base. Il massimo valore ammissibile ϑ per quanto concerne il flusso nell'arco (i, j) è pertanto:

$$\vartheta = \min\{x_{hk} : (h, k) \in \mathcal{C}, (h, k) \text{ discorde da } (i, j)\}.$$

La nuova soluzione base si ottiene dunque dalla precedente semplicemente *aumentando* di ϑ il flusso degli archi di \mathcal{C} concordi con (i, j) , e *diminuendo* di ϑ in flusso degli archi di \mathcal{C} discordi da (i, j) .

Sempre continuando con l'esempio (6) e con la base di figura 5, si ha che un possibile arco entrante in base è l'arco $(i, j) = (1, 4)$, che forma con l'albero il ciclo $\mathcal{C} = \{(1, 4), (1, 3), (3, 4)\}$. Gli archi di \mathcal{C} discordi da $(1, 4)$ sono $(1, 3)$ e $(3, 4)$. Il flusso su questi archi, dato in (8) è $x_{13} = 10$ e $x_{34} = 6$. Pertanto $\vartheta = 6$, l'arco uscente dalla base è l'arco $(3, 4)$ e la nuova soluzione base è:

$$\tilde{x}_B = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{13} \\ \tilde{x}_{23} \\ \tilde{x}_{14} \\ \tilde{x}_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 6 \\ 4 \\ 0 + 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Il cambiamento di base è evidenziato in figura 6. A questo punto possiamo procedere con una nuova iterazione:

Calcolo delle variabili u . dalle condizioni di complementarità si ha:

$$\begin{cases} u_3 - u_1 = c_{13} = 8 \\ u_3 - u_2 = c_{23} = 2 \\ u_4 - u_1 = c_{14} = 1 \\ u_5 - u_3 = c_{35} = 4 \end{cases}$$

Fissando arbitrariamente $u_1 = 0$ si ha: $u_3 = 8$, $u_2 = 8 - 2 = 6$, $u_4 = 1$, $u_5 = 4 + 8 = 12$.

L'ammissibilità duale diventa:

$$\begin{cases} u_2 - u_1 \leq c_{12} = 10 \\ u_4 - u_3 \leq c_{34} = 1 \\ u_5 - u_4 \leq c_{45} = 12 \\ u_2 - u_5 \leq c_{52} = -7 \end{cases}$$

Da cui si osserva che il quarto vincolo è violato. Entra quindi in base l'arco $(5, 2)$ che forma con gli altri archi in base il ciclo $\mathcal{C} = \{(5, 2), (2, 3), (3, 5)\}$. Poiché tutti gli archi di \mathcal{C} sono concordi con $(5, 2)$, concludiamo che il problema è illimitato inferiormente. In effetti, il ciclo orientato $\{(5, 2), (2, 3), (3, 5)\}$ ha costo totale:

$$c_{52} + c_{23} + c_{35} = 2 + 4 - 7 = -1 < 0$$

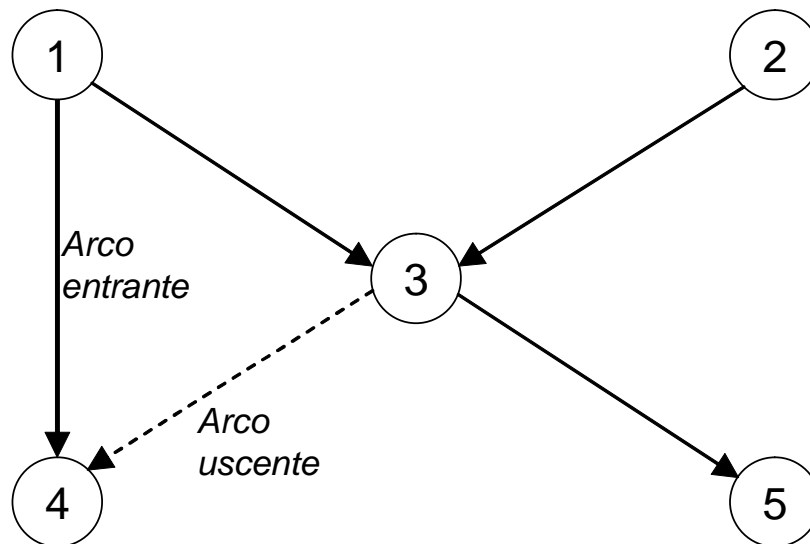


Figura 6: Cambiamento di base.

5 Fase 1 del simplesso su reti

Abbiamo finora tralasciato il problema di determinare una prima distribuzione di flusso ammissibile, che costituisce la fase 1 del metodo del simplesso.

L'idea di fondo è piuttosto semplice. Si ricorderà che nella fase 1 del metodo del simplesso si aggiunge una variabile artificiale per ogni vincolo, in modo tale da ottenere immediatamente una base ammissibile per il problema artificiale. Nel simplesso su reti si opera in maniera del tutto analoga. Stavolta però le variabili sono associate ad archi di una rete di flusso, e quindi dobbiamo aggiungere *archi artificiali* alla rete in modo da ottenere una soluzione ammissibile immediata. Il modo più semplice di ottenere questo è di convogliare tutta la disponibilità di flusso delle sorgenti per ridistribuirla ai pozzi, ovvero aggiungere un *arco artificiale* uscente da ogni sorgente ed un *arco artificiale* entrante in ogni pozzo. Questi archi dovranno poi essere tutti collegati ad un *nodo artificiale* che svolge il ruolo di smistamento del flusso dalle sorgenti ai pozzi della rete. Si osservi che, se c'è almeno un nodo di transito, i soli archi artificiali non formano un albero ricoprente. Per ottenere una base iniziale si può allora aggiungere arbitrariamente un arco originale della rete per ogni nodo di transito, tali da non formare cicli fra loro e con gli archi artificiali.

Analogamente alla fase 1 del simplesso, anche nella fase 1 del simplesso su reti la funzione obiettivo sarà la minimizzazione del flusso sui soli archi artificiali, dunque porremo pari a 1 il costo di tutti gli archi artificiali e 0 quello degli altri.

Una volta determinata la soluzione ottima del problema artificiale, si prosegue in stretta analogia con il metodo del simplesso: se nella soluzione ottima è presente in base qualche arco artificiale con un flusso diverso da zero, il problema originale è *impossibile*, se il flusso in tutti gli archi artificiali è nullo, il flusso negli archi originali costituisce una soluzione ammissibile del problema originale. Anche in questo caso è possibile che resti in base qualche arco artificiale (anzi, uno deve restare per forza per collegare alla rete il nodo artificiale), però il passaggio alla fase 2 è molto più semplice, perché questa volta possiamo semplicemente cancellare dalla rete il nodo artificiale e tutti gli archi artificiali, e poi aggiungere qualche eventuale arco originale alla base per riottenere un albero ricoprente ed iniziare la fase 2. In quest'ultimo caso avremo chiaramente una base iniziale degenera.

A titolo di esempio si consideri la rete in figura 7 e la domanda (14).

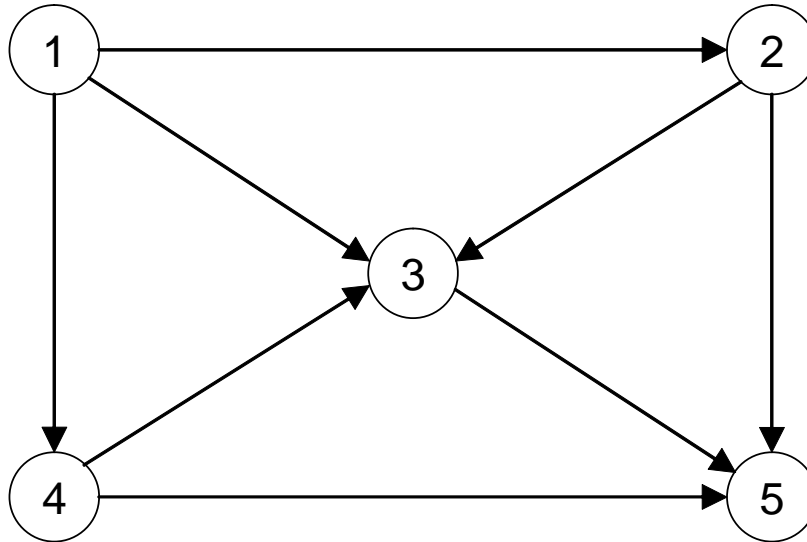


Figura 7: Un esempio di rete di trasporto.

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{14}$$

La fase 1 del simplesso su reti si imposta aggiungendo un nodo artificiale 6, due archi artificiali (1, 6) e (4, 6) dalle due sorgenti al nodo artificiale e due archi artificiali (6, 2) e (6, 5) dal nodo artificiale ai due pozzi, come in figura 8. Per ottenere una base iniziale del problema è necessario aggiungere un altro arco per collegare il nodo di transito 3 al resto dell'albero. Si aggiunga ad esempio l'arco (3, 5). La funzione obiettivo sarà la minimizzazione del flusso sui quattro archi artificiali, il vettore dei costi corrispondente è dato in (2), insieme alla soluzione base iniziale. L'albero ricoprente iniziale è invece riportato in figura 9.

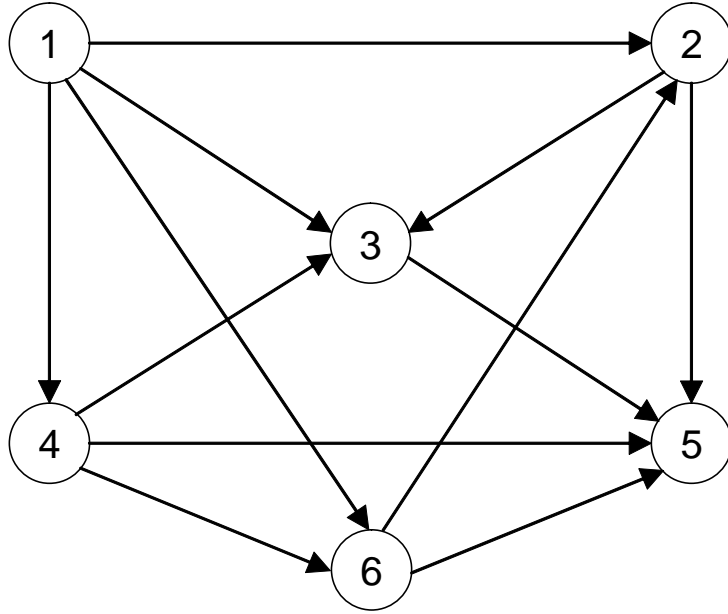


Figura 8: La rete di flusso artificiale.

$$c = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{13} \\ c_{14} \\ c_{23} \\ c_{25} \\ c_{35} \\ c_{43} \\ c_{54} \\ c_{16} \\ c_{46} \\ c_{62} \\ c_{65} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} x_{16} \\ x_{46} \\ x_{62} \\ x_{65} \\ x_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |d_1| \\ |d_4| \\ |d_6| \\ |d_5| \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Il lettore può verificare che, se entra in base l'arco $(1, 2)$, esce $(1, 6)$. Se quindi facciamo entrare in base l'arco $(4, 3)$, esce $(6, 5)$. A questo punto, la soluzione è ottima per la fase 1, restano tuttavia in base gli archi artificiali $(4, 6)$ e $(6, 2)$, con flusso $x_{46} = x_{62} = 4$. Il problema iniziale è quindi impossibile. L'albero ricoprente ottimo per il problema in Fase 1, ma non ammissibile per il problema in Fase 2 è mostrato in Figura 10. Questa situazione può essere verificata sulla rete. Infatti, se nella costruzione della soluzione duale assegnamo il valore $u_6 = 1$ al nodo artificiale, gli altri nodi della rete si dividono in nodi con variabile duale $u_i = 0$ e nodi con variabile duale $u_j = 2$. Se la soluzione è ottima per la fase 1 non può esistere un arco (i, j) nella rete che va da un nodo a variabile

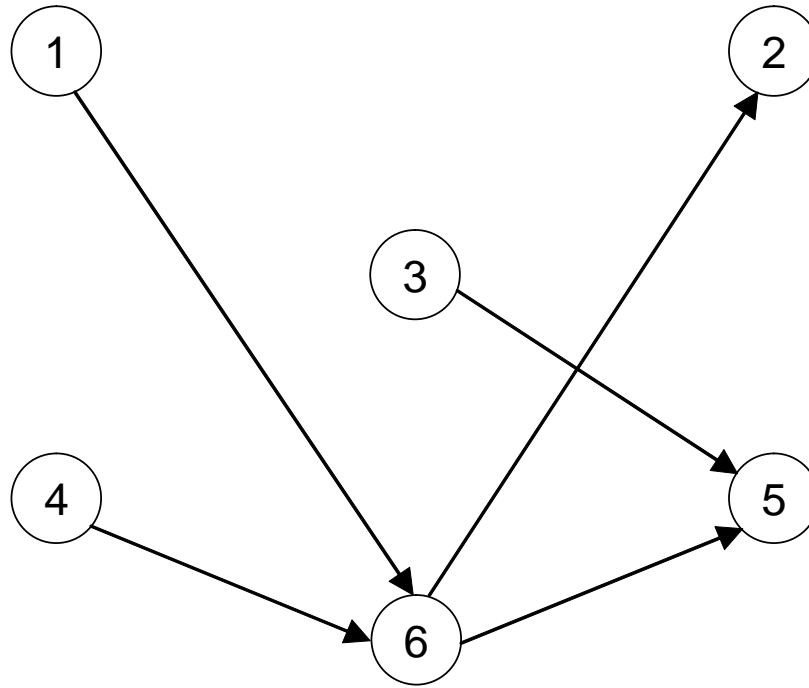


Figura 9: Una base ammissibile del problema artificiale

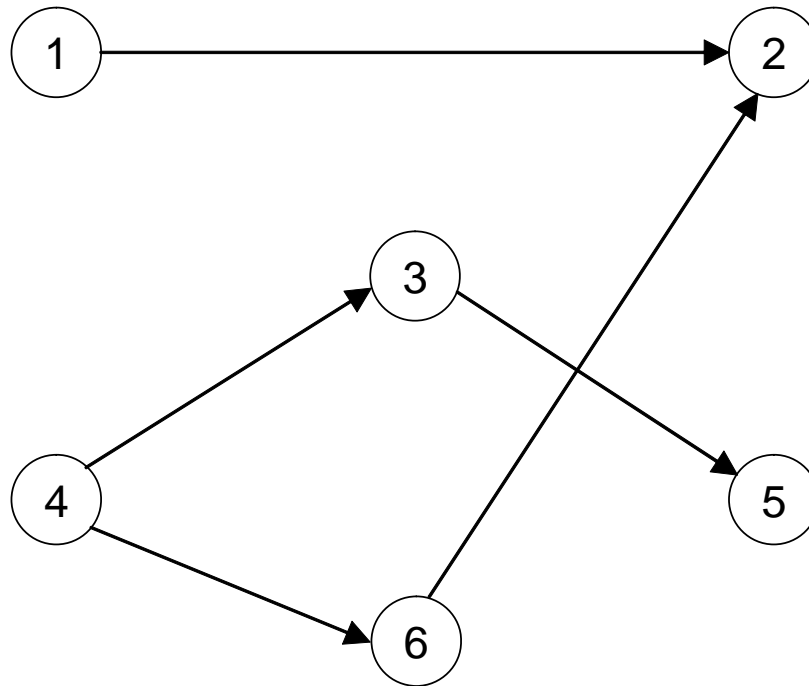


Figura 10: Una base ottima del problema artificiale, ma non ammissibile per il problema originale

duale 0 ad un nodo a variabile duale 2 (che altrimenti violerebbe l'ammissibilità duale $u_j - u_i \leq 0$). Tuttavia la somma delle domande dei nodi a variabile duale 0 è strettamente negativa, così come la somma delle domande dei nodi a variabile duale 2 è strettamente positiva. In altre parole esiste una disponibilità di flusso dei nodi a variabile duale 0 che non può raggiungere i nodi a variabile duale 2, e questo determina l'impossibilità di risolvere il problema. Nell'esempio di figura 7 si può vedere infatti come il nodo 2 (pozzo) sia irraggiungibile dal nodo 4 (sorgente), e come il nodo 1 non sia in grado di soddisfare tutta la domanda del nodo 2.

6 Il problema di Flusso a Costo Minimo su rete capacitata

In questo paragrafo discuteremo come sia possibile estendere l'algoritmo del semplice su reti anche al caso in cui la rete sia capacitata, ovvero nel caso in cui sugli archi della rete siano presenti delle capacità. Il caso di reti capacitate risulta essere abbastanza frequente in applicazioni pratiche, essendoci spesso un limite superiore alla massima portata che può fluire su un singolo arco.

Sia k il vettore delle capacità, in cui k_{ij} rappresenta la capacità dell'arco (i, j) , ovvero il massimo flusso che vi può scorrere. Dunque, un flusso x_{ij} che scorre in un arco (i, j) sarà ammissibile se e solo se $0 \leq x_{ij} \leq k_{ij}$. Il problema di flusso a costo minimo su una rete capacitata può essere dunque formulato matematicamente come segue:

$$\begin{aligned} \min c^T x \\ Ax = d \\ x \leq k \\ x \geq 0 \end{aligned} \tag{16}$$

ovvero, aggiungendo un vettore di variabili di slack s e portando il problema in forma standard:

$$\begin{aligned} \min [c \ 0] \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ k \end{bmatrix} \\ x, s \geq 0 \end{aligned} \tag{17}$$

In Figura 11 è rappresentata la rete di flusso di figura 7, con aggiunte le capacità degli

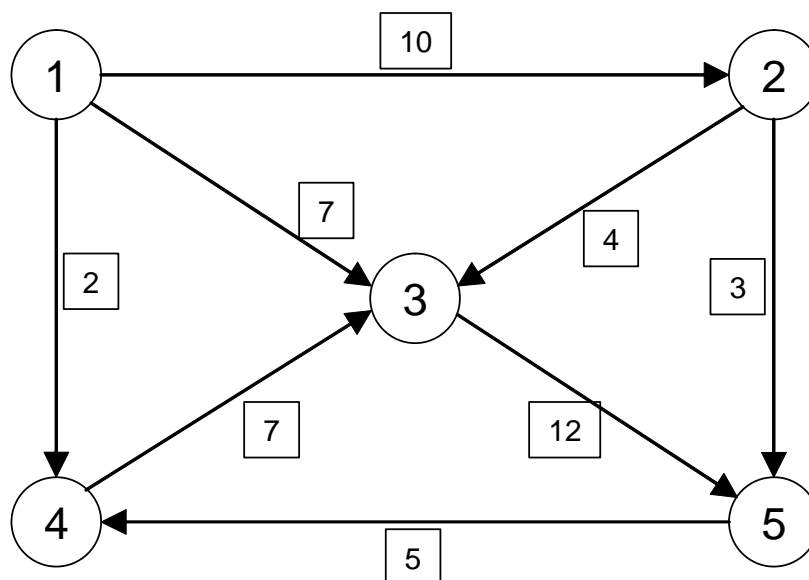


Figura 11: Rete di flusso capacitata.

archi (indicate nei rettangoli). I dati del problema sono:

$$k = \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{13} \\ k_{14} \\ k_{23} \\ k_{25} \\ k_{35} \\ k_{43} \\ k_{54} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 12 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{13} \\ c_{14} \\ c_{23} \\ c_{25} \\ c_{35} \\ c_{43} \\ c_{54} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \\ 4 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Ripercorriamo ora tutti i passi dell'algoritmo del simplesso su reti per estenderli al caso di reti capacitate.

Nel caso non capacitato, le soluzioni di base erano rappresentabili come alberi ricoprenti della rete, e potevano essere utilizzate per partizionare l'insieme degli archi \mathcal{A} nei due sottoinsiemi \mathcal{B} (archi in base) e \mathcal{F} (archi fuori base). Ora, nel caso capacitato, la corrispondenza tra alberi ricoprenti e soluzioni di base va leggermente rivista. In particolare, data una soluzione di base ammissibile x per il problema, possiamo partizionare l'insieme degli archi in *tre* sottoinsiemi: l'insieme \mathcal{V} di archi vuoti (aventi flusso nullo), l'insieme \mathcal{S} di archi saturi (aventi flusso x_{ij} pari alla loro capacità k_{ij}), e l'insieme, chiamiamolo \mathcal{B} , di archi che non sono né saturi né vuoti.

TEOREMA 2 *Si consideri una rete di flusso connessa, una soluzione di base ammissibile x e la corrispondente tripartizione $(\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{B})$ degli archi. Gli archi dell'insieme \mathcal{B} non formano cicli.*

Dim.– Supponiamo che gli archi di \mathcal{B} formino un ciclo. Soltanto per semplicità notazionale ed espositiva, ci riferiamo a un ciclo formato da cinque archi:

$$(i_1, i_2), (i_2, i_3), (i_4, i_3), (i_4, i_5), (i_1, i_5)$$

in cui dunque, fissando arbitrariamente come verso del ciclo quello dell'arco (i_1, i_2) , alcuni archi (nella fattispecie $(i_1, i_2), (i_2, i_3), (i_4, i_5)$) sono concordi col verso del ciclo, mentre gli altri (ossia $(i_4, i_3), (i_1, i_5)$) sono discordi. Le conclusioni cui giungeremo sono comunque del tutto generali, e valgono per cicli con un numero qualsiasi di archi.

Con riferimento alla formulazione (17), avremo che le variabili $\{x_{i_1, i_2}, x_{i_2, i_3}, x_{i_4, i_5}\}$ sono sicuramente in base, e dunque parimenti le variabili di slack $\{s_{i_1, i_2}, s_{i_2, i_3}, s_{i_4, i_5}\}$, dal momento che gli archi di \mathcal{B} non sono saturi. Le 10 colonne corrispondenti a tali variabili (riportando solo le righe di tali colonne con elementi diversi da zero) sono quindi:

$$\begin{array}{l}
 i_1 \\
 i_2 \\
 i_3 \\
 i_4 \\
 i_5 \\
 (i_1, i_2) \\
 (i_2, i_3) \\
 (i_4, i_3) \\
 (i_4, i_5) \\
 (i_1, i_5)
 \end{array}
 \left[
 \begin{array}{cccccccccc}
 x_{i_1, i_2} & x_{i_2, i_3} & x_{i_4, i_3} & x_{i_4, i_5} & x_{i_1, i_5} & s_{i_1, i_2} & s_{i_2, i_3} & s_{i_4, i_3} & s_{i_4, i_5} & s_{i_1, i_5} \\
 -1 & & & & -1 & & & & & \\
 1 & -1 & & & & & & & & \\
 & 1 & 1 & & & & & & & \\
 & & -1 & -1 & & & & & & \\
 & & & 1 & 1 & & & & & \\
 \hline
 1 & & & & & 1 & & & & \\
 & 1 & & & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & & & & 1 & \\
 & & & & 1 & & & & & 1
 \end{array}
 \right] \quad (19)$$

ora, se effettuiamo una combinazione lineare delle colonne, usando come coefficiente +1 per le colonne delle variabili x_{ij} corrispondenti ad archi concordi e delle variabili s_{ij} corrispondenti ad archi discordi, e usando come coefficiente -1 per le colonne delle variabili x_{ij} corrispondenti ad archi discordi e delle variabili s_{ij} corrispondenti ad archi concordi, otteniamo la colonna nulla. Questo dimostra che le 10 colonne indicate non possono fare tutte parte di una base, e dunque i 5 archi corrispondenti non possono essere tutti nell'insieme \mathcal{B} . \square

Dal risultato appena visto, consegue che, in una soluzione di base, al più $n - 1$ archi possono appartenere all'insieme \mathcal{B} , e tali archi non possono formare cicli. Questo fatto ci consente di continuare a identificare le soluzioni di base con gli alberi ricoprenti. Si noti però che stavolta a uno stesso albero ricoprente (insieme \mathcal{B}) possono corrispondere più

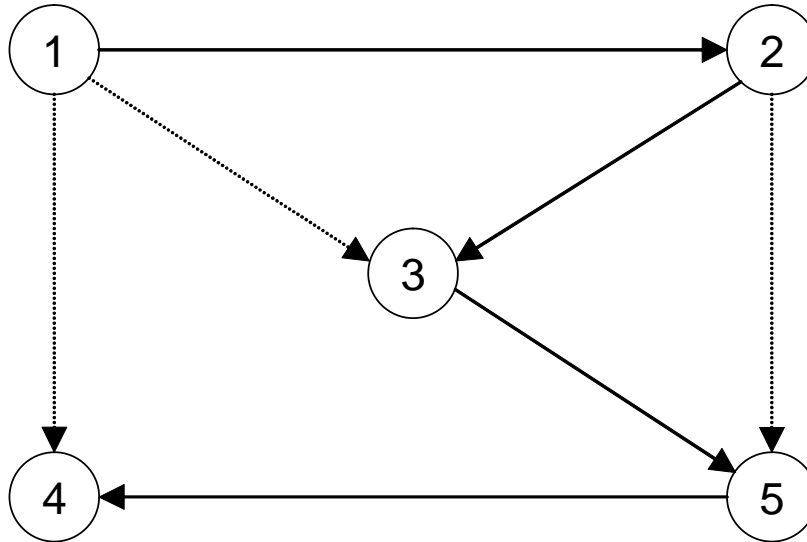


Figura 12: Gli insiemi \mathcal{B} (linea continua) e \mathcal{S} (linea tratteggiata).

soluzioni, per diversi insiemi di archi vuoti e saturi (\mathcal{V} e \mathcal{S}). È abbastanza semplice infatti verificare che, dati gli insiemi \mathcal{V} e \mathcal{S} , il valore del flusso negli altri archi è univocamente determinato e può essere calcolato attraverso lo stesso procedimento già descritto per il caso non capacitato. L'unica accortezza in più che bisogna avere è che, se $(i, j) \in \mathcal{S}$, ne va tenuto conto nel calcolare il flusso sugli archi di \mathcal{B} . Ad esempio, consideriamo la rete di Figura 11, e sia $\mathcal{B} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 4)\}$, mentre $\mathcal{S} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 5)\}$ e $\mathcal{V} = \{(4, 3)\}$ (Figura 12). Chiaramente, $x_{43} = 0$, $x_{14} = 1$, $x_{13} = 7$ e $x_{25} = 3$. Nell'ordine, si può calcolare $x_{12} = 10 - 2 - 7 = 1$, $x_{23} = 4 + 1 - 3 = 2$, $x_{35} = 8 + 4 - 3 = 9$ e $x_{54} = 9 + 3 - 8 = 4$. Si noti che tutti questi valori rispettano i vincoli di capacità, per cui la soluzione è ammissibile.

Si noti peraltro che analogamente al caso non capacitato, nell'insieme \mathcal{B} potrebbero esserci archi saturi e/o vuoti. In questo caso si ha una *soluzione di base degenere* (e un corrispondente *albero ricoprente degenere*). Altrimenti, la soluzione è *non degenere*. Come per il caso non capacitato, gli archi saturi o vuoti aggiunti per completare la base sono considerati a tutti gli effetti come archi appartenenti all'insieme \mathcal{B} .

Vediamo ora come estendere al caso capacitato le considerazioni relative alle condizioni

di ottimalità. Anzitutto, scriviamo il duale di (17).

$$\begin{cases} \max [d^T & k^T] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ [u^T & v^T] \begin{bmatrix} A & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \leq [c^T & 0^T] \end{cases} \quad (20)$$

Le condizioni di complementarità diventano:

$$\left([c^T \ 0^T] - [u^T \ v^T] \begin{bmatrix} A & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = 0 \quad (21)$$

Per ogni arco (i, j) , si hanno quindi le due condizioni:

$$(c_{ij} + u_i - u_j - v_{ij}) x_{ij} = 0 \quad (22)$$

$$v_{ij} s_{ij} = 0 \quad (23)$$

Se $(i, j) \in \mathcal{B}$, si ha che $x_{ij} \neq 0$ e $s_{ij} = 0$, per cui le (22) e (23) si riducono a

$$c_{ij} + u_i - u_j = 0 \quad (i, j) \in \mathcal{B} \quad (24)$$

in stretta analogia con le (12). Queste sono dunque $n - 1$ equazioni in n incognite, di cui una, al solito, può essere arbitrariamente fissata a 0. I valori così trovati devono poi soddisfare tutti i vincoli del duale. Dunque, se prendiamo un arco vuoto $(i, j) \in \mathcal{V}$, essendo comunque $s_{ij} \neq 0$, si ha (dalla (23)) $v_{ij} = 0$ e deve essere

$$u_j - u_i \leq c_{ij} \quad (i, j) \in \mathcal{V} \quad (25)$$

Invece, per un arco saturo si ha, dalla (22):

$$c_{ij} + u_i - u_j = v_{ij}$$

e dunque, considerando che, dalla formulazione (20) deve essere $v_{ij} \leq 0$, si ottiene

$$u_j - u_i \geq c_{ij} \quad (i, j) \in \mathcal{S} \quad (26)$$

Dunque, ad una data iterazione dell'algoritmo del simplesso su reti, la base corrente sarà ottima se i potenziali ai nodi u_i , calcolati usando le (24), soddisfano le (25)–(26). Per l'esempio di Figura 12, i potenziali assumono i seguenti valori, avendo fissato il potenziale del nodo 1 pari a zero ($u_1 = 0$):

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 12 \\ 28 \\ 16 \end{pmatrix} \quad (27)$$

In questo esempio, la soluzione non è ottima, in quanto non tutti gli archi fuori base rispettano le condizioni di ottimalità. In particolare, per l'arco saturo $(2, 5)$ si ha $\bar{c}_{25} = u_5 - u_2 - c_{25} = 16 - 10 - 7 = -1 \not\geq 0$.

Se le condizioni di ottimalità non sono rispettate, un qualsiasi arco (vuoto o saturo) che non rispetta la propria condizione di ottimalità potrà essere scelto per entrare in base. Una volta selezionato l'arco che entrerà in base, si deve individuare l'arco che uscirà dalla base. Generalizzando quanto precedentemente introdotto per il caso non capacitato bisognerà individuare il massimo flusso ϑ circolante nel ciclo \mathcal{C} generato dall'aggiunta dell'arco (i, j) . In questo caso, il massimo flusso circolante ϑ potrà anche essere limitato da archi concordi al verso di circolazione in \mathcal{C} imposto dall'arco (i, j) che giungono a saturazione oltre che da archi discordi che vengono scaricati.

$$\vartheta = \min \left\{ \begin{array}{l} x_{pq} : (p, q) \in \mathcal{C}, (p, q) \text{ discorde da } (i, j), \\ k_{pq} - x_{pq} : (p, q) \in \mathcal{C}, (p, q) \text{ concorde con } (i, j) \end{array} \right\} \quad (28)$$

L'arco che determina il valore ϑ uscirà di base, e verrà sostituito dall'arco (i, j) . In particolare, l'aggiornamento dell'albero \mathcal{B} verrà effettuato come nel caso non capacitato, ovvero aumentando o diminuendo di ϑ il flusso circolante sugli archi concordi e discordi di \mathcal{C} . (Si noti che se tutti i valori di capacità sono valori finiti, non è possibile avere soluzioni illimitate inferiormente.) Una iterazione del metodo del simpleso viene detta *non degenera* se il flusso $\vartheta > 0$, mentre una iterazione è detta *degenera* se $\vartheta = 0$. Iterazioni degeneri possono accadere solo se l'albero ricoprente \mathcal{B} è degenera, ovvero se contiene degli archi saturi o vuoti. Con riferimento alla rete e alla SBA di Figura 12, entrando in base l'arco $(1, 4)$, il ciclo è $\mathcal{C} = \{(2, 3), (3, 5), (2, 5)\}$. Diminuendo il flusso sull'arco $(2, 5)$, il primo arco a uscire da \mathcal{B} è $(2, 3)$, che si satura, per $\vartheta = 2$. Di conseguenza, nella nuova soluzione di base ammissibile, $x_{25} = 2$, $x_{23} = 4$ e $x_{35} = 11$. Quindi la nuova partizione degli archi è: $\mathcal{B}' = \{(1, 2), (2, 5), (3, 5), (5, 4)\}$, $\mathcal{S}' = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$ e $\mathcal{V}' = \{(4, 3)\}$. Lasciamo come esercizio verificare che la nuova soluzione è ottima.

Si noti infine che per il calcolo di una soluzione iniziale (Fase 1) è possibile applicare semplicemente la Fase 1 precedentemente descritta per reti non capacitate (usando capacità sufficientemente alte per gli archi artificiali).