

Università degli Studi di Siena

**Brevi note di
Teoria dei Segnali Aleatori**

Mauro Barni
Giacomo Cancelli

Gennaio 2006

Indice

Tabella dei Simboli	iii
1 Richiami di Teoria delle Variabili Aleatorie	1
1.1 Distribuzione di Probabilità	1
1.1.1 Distribuzione di Probabilità Condizionata	2
1.2 Densità di Probabilità	2
1.2.1 Densità di Probabilità Condizionata	4
1.3 Estensioni	4
1.3.1 Teorema della Probabilità Totale Riadattato	4
1.3.2 Funzioni di Variabili Aleatorie	4
1.4 Momenti	5
1.4.1 Media di una v.a.	5
1.4.2 Varianza	6
1.4.3 Valore Quadratico Medio	7
1.4.4 Momenti di ordine superiore	7
1.5 Distribuzione di Probabilità Congiunta	7
1.6 Densità di Probabilità Congiunta	7
1.6.1 Densità di Probabilità Condizionata	8
1.6.2 Legami fra Variabili Aleatorie	8
2 Processi Stocastici: definizioni	10
2.1 Analisi Temporale	10
2.2 Analisi d'Insieme	11
2.3 Momenti	11
2.3.1 Valor medio di un processo	12
2.3.2 Autocorrelazione di un processo	12
2.3.3 Autocovarianza	13
3 Processi Stazionari	14
3.1 Stazionarietà in Senso Stretto	14
3.2 Stazionarietà in Senso Lato	14
3.2.1 Stazionarietà congiunta	15
3.3 Dominio della Frequenza	15

3.3.1	Densità Spettrale di Potenza Media	17
3.3.2	Densità Spettrale di Potenza Media Congiunta	19
3.4	Sistemi LTI	19
3.4.1	Rumore Bianco	21
4	Processi Ergodici	23
4.1	Ergodicità in Senso Lato	23
4.2	Successioni di Variabili Aleatorie	24
4.2.1	Convergenza Ovunque	24
4.2.2	Convergenza Quasi Ovunque	24
4.2.3	Convergenza in Media	24
4.2.4	Convergenza in Probabilità	25
4.2.5	Convergenza in Distribuzione	25
4.3	Ergodicità in Media	25
4.4	Ergodicità in Potenza Media	29
5	Rappresentazione Analitica di Segnali a Banda Stretta	31
5.1	Segnali Deterministici	32
5.1.1	Sistemi LTI	34
5.2	Processi a banda stretta	35

Tabella dei Simboli

\mathbb{N}	insieme dei numeri naturali
\mathbb{R}	insieme dei numeri reali
$\Re\{\cdot\}$	parte reale di un numero complesso
$\Im\{\cdot\}$	parte immaginaria di un numero complesso
x	variabile deterministica
$s(t)$	segnale deterministico
$\mathfrak{F}\{\cdot\}$	Trasformata di Fourier
\Leftrightarrow	relazione tra un segnale e la relativa Trasformata di Fourier
$ \cdot $	valore assoluto
$\ \cdot\ $	norma
\otimes	operatore di convoluzione
$\mathcal{P}\{\mathcal{S}\}$	probabilità dell'insieme \mathcal{S}
\mathbf{x}	variabile aleatoria
$F_{\mathbf{x}}$	distribuzione di probabilità
$f_{\mathbf{x}}$	densità di probabilità
$E[\cdot]$	operatore valore atteso
$\mu_{\mathbf{x}}$	valore medio di \mathbf{x}
$\mu_{\mathbf{T}}$	media temporale
$\sigma_{\mathbf{x}}$	deviazione standard di \mathbf{x}
$\sigma_{\mathbf{x}}^2$	varianza di \mathbf{x}
$\mathbf{x}(k, t)$	processo stocastico
$H_{\mathbf{xx}}(\tau)$	autocorrelazione di $\mathbf{x}(k, t)$
$C_{\mathbf{xx}}(\tau)$	autocovarianza di $\mathbf{x}(k, t)$
$\mathcal{E}_{\mathbf{x}}$	energia media
$\mathcal{P}_{\mathbf{x}}$	potenza media
$S_{\mathbf{xx}}$	densità spettrale di potenza media
$C_{\mathbf{xx}}$	autocovarianza
$S_{\mathbf{xx}}^c$	spettro dell'autocovarianza
$s^+(t)$	preinvoluppo complesso di $s(t)$
$\tilde{s}(t)$	involuppo complesso di $s(t)$
$s_i(t)$	componente in fase di $s(t)$
$s_q(t)$	componente in quadratura di $s(t)$

Capitolo 1

Richiami di Teoria delle Variabili Aleatorie

Dato un esperimento \mathcal{E} , sia \mathcal{S} lo spazio dei risultati associato a tale esperimento. Una *variabile aleatoria* è una funzione:

$$\mathbf{x}(\eta) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{N}$$

oppure

$$\mathbf{x}(\eta) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \tag{1.1}$$

dove η rappresenta un possibile risultato dell'esperimento (non necessariamente identificato con un numero). Il motivo della definizione delle variabili aleatorie come funzioni risiede proprio nella natura non necessariamente numerica dei risultati dell'esperimento: spetta alla *variabile aleatoria* intesa come funzione $x(\eta)$ associare ad ogni valore di \mathcal{S} uno e un solo valore di \mathbb{R} (oppure \mathbb{N}).

Nel caso abbastanza comune in cui $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$ ($\subseteq \mathbb{N}$), si può semplificare la notazione $\mathbf{x}(\eta)$ definendo la v.a. direttamente come l'uscita dell'esperimento. In tal caso la v.a. verrà indicata semplicemente con \mathbf{x} (da non confondersi con la variabile deterministica x).

1.1 Distribuzione di Probabilità

Data una v.a. \mathbf{x} si consideri la seguente funzione:

$$F_{\mathbf{x}}(x) = P\{\mathbf{x} \leq x\} \tag{1.2}$$

Tale funzione è chiamata *funzione di distribuzione di probabilità* e indica qual è la probabilità che si realizzi l'evento che \mathbf{x} sia minore o uguale di x . È facile verificare che $F_{\mathbf{x}}$ verifica le seguenti proprietà:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\mathbf{x}}(x) = 1$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\mathbf{x}}(x) = 0$
3. $F_{\mathbf{x}}(x_2) - F_{\mathbf{x}}(x_1) = P\{\mathbf{x} \in (x_1, x_2]\} \quad \forall x_2 > x_1$
4. $F_{\mathbf{x}}$ è non decrescente
5. $F_{\mathbf{x}}$ è continua a destra

Dove le prime due proprietà derivano dalla definizione di funzione di distribuzione di probabilità (associata alla probabilità dell'evento certo $P\{\mathcal{S}\} = 1$ dell'insieme nullo $P\{\emptyset\} = 0$), mentre la terza proprietà si può vedere come la $P\{\mathcal{A}\}$ con $\mathcal{A} = (-\infty, x_2] \setminus (-\infty, x_1]$.

1.1.1 Distribuzione di Probabilità Condizionata

Data una v.a. \mathbf{x} e un evento \mathcal{M} , si definisce *funzione di distribuzione di probabilità condizionata* all'evento \mathcal{M} la quantità:

$$F_{\mathbf{x}}(x|\mathcal{M}) = P\{\mathbf{x} \leq x|\mathcal{M}\} \quad (1.3)$$

La $F_{\mathbf{x}}$ condizionata descrive la probabilità che la \mathbf{x} assuma un valore minore di un determinato valore x (con $x \in \mathbb{R}$) supposto che si sia verificato l'evento \mathcal{M} .

1.2 Densità di Probabilità

La funzione distribuzione di probabilità permette di calcolare agevolmente la probabilità che l'uscita di un esperimento assuma un valore all'interno di un certo intervallo \mathcal{A} , ma non dà esplicite indicazioni su quali sono le realizzazioni più probabili e più in generale come si distribuisce tale probabilità su tutto \mathbb{R} . Per analizzare questa concentrazione si studia la derivata prima della $F_{\mathbf{x}}$ (supposto che esista):

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \frac{dF_{\mathbf{x}}(x)}{dx}. \quad (1.4)$$

Tale funzione è chiamata *funzione di densità di probabilità* e si può esprimere anche nel seguente modo:

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{F_{\mathbf{x}}(x + dx) - F_{\mathbf{x}}(x)}{dx}$$

È facile mostrare che per descrivere completamente una v.a. occorre conoscere la $f_{\mathbf{x}}$ o la $F_{\mathbf{x}}$.

La tabella 1.2 riporta gli andamenti grafici di alcune distribuzioni di probabilità (e le rispettive densità di probabilità) di uso comune.

La densità di probabilità soddisfa a sua volta alcune proprietà:

1. $\int_{x_1}^{x_2} f_{\mathbf{x}}(x)dx = P\{\mathbf{x} \in (x_1, x_2]\} = F_{\mathbf{x}}(x_2) - F_{\mathbf{x}}(x_1)$
2. $\int_{\mathbb{R}} f_{\mathbf{x}}(x)dx = 1$

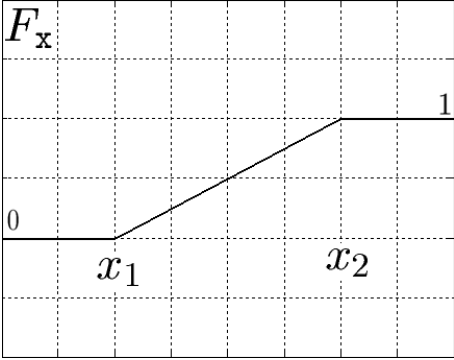
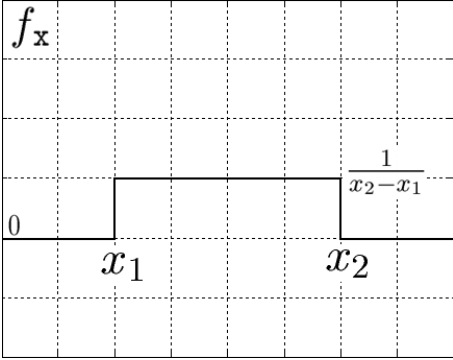
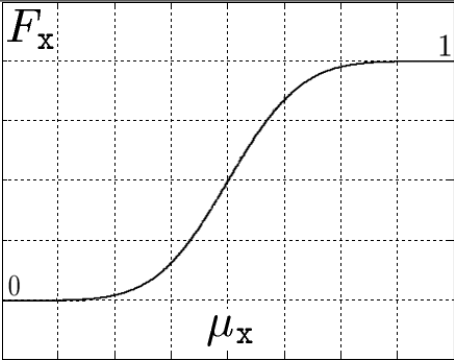
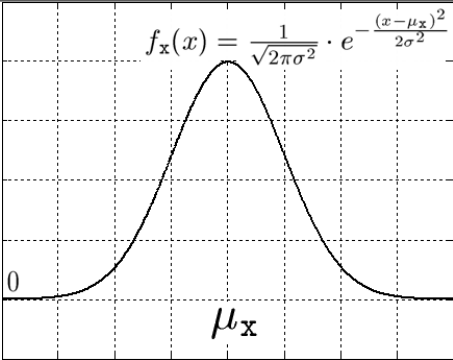
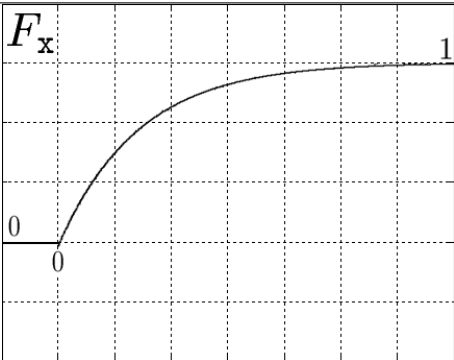
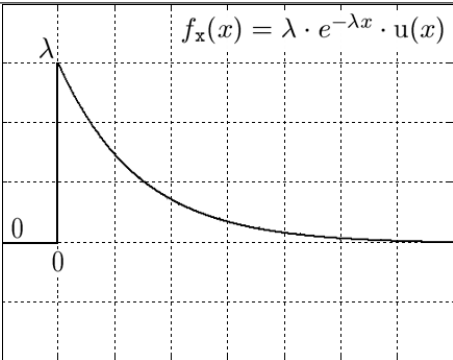
distribuzione		densità	
$F_{\mathbf{x}}$ 	$f_{\mathbf{x}}$ 		
andamento uniforme			
$F_{\mathbf{x}}$ 	$f_{\mathbf{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_{\mathbf{x}})^2}{2\sigma^2}}$ 		
andamento gaussiano			
$F_{\mathbf{x}}$ 	$f_{\mathbf{x}}(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot u(x)$ 		
andamento esponenziale			

Tabella 1.1: Distribuzioni e densità di probabilità di uso comune

$$3. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_{\mathbf{x}}(x) = 0$$

$$4. f_{\mathbf{x}}(x) \geq 0$$

Se la funzione di densità di probabilità non contiene funzioni impulsive (δ di Dirac) o equivalentemente la $F_{\mathbf{x}}$ non presenta discontinuità di prima specie), allora la probabilità che la v.a. assuma un singolo valore è nulla e \mathbf{x} si dice *continua*. Se la $f_{\mathbf{x}}$ si compone di sole δ la v.a. è di tipo *discreto*, in tutti gli altri casi la v.a. si dice *mista*.

1.2.1 Densità di Probabilità Condizionata

Data una v.a. \mathbf{x} e un evento \mathcal{M} , si definisce *funzione di densità di probabilità condizionata* all'evento \mathcal{M} la seguente:

$$f_{\mathbf{x}}(x|\mathcal{M}) = \frac{dF_{\mathbf{x}}(x|\mathcal{M})}{dx} \quad (1.5)$$

In analogia con la funzione distribuzione di probabilità condizionata (1.3), la $f_{\mathbf{x}}(x|\mathcal{M})$ descrive come è distribuita la concentrazione di probabilità tenendo conto del verificarsi di \mathcal{M} .

1.3 Estensioni

1.3.1 Teorema della Probabilità Totale Riadattato

Teorema della Probabilità Totale Riadattato. *Dato un insieme di eventi \mathcal{A}_i , con $i = 1..N$ tale che $\bigcup_{i=1}^N \mathcal{A}_i = \mathcal{S}$ e $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ allora:*

$$F_{\mathbf{x}}(x) = \sum_{i=1}^N F_{\mathbf{x}}(x|\mathcal{A}_i) \cdot P\{\mathcal{A}_i\}$$

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \sum_{i=1}^N f_{\mathbf{x}}(x|\mathcal{A}_i) \cdot P\{\mathcal{A}_i\}$$

Tale teorema è la trascrizione del *Teorema della Probabilità Totale* adattata alla teoria delle v.a..

1.3.2 Funzioni di Variabili Aleatorie

Nella pratica è frequente che due v.a. \mathbf{x} e \mathbf{y} siano legate fra loro da una funzione. Basti pensare al caso di un circuito elettrico avente una resistenza modellata come una v.a. \mathbf{x} . La corrente \mathbf{y} che attraversa tale resistenza può essere anch'essa modellata come una v.a., che sarà ovviamente funzione del valore (aleatorio) assunto dalla resistenza.

In generale il legame tra \mathbf{x} e y può essere così rappresentato:

$$y = g(\mathbf{x}) \quad (1.6)$$

Come si può vedere, le due v.a. sono legate dalla funzione g . Questo legame porta ad avere una dipendenza anche tra le due funzioni di densità di probabilità. In particolare, è possibile ricavare la f_y data la f_x grazie al seguente teorema.

Teorema 1. *Sia f_x la funzione di densità di probabilità associata alla v.a. x . Sia g una funzione derivabile con $g'(x_i) \neq 0 \forall i = 1..n$. Allora:*

$$f_y(y) = \sum_{i=1}^n \frac{f_x(x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (1.7)$$

Con x_i soluzioni dell'equazione $y = g(x)$

Se g è invertibile, allora $x = g^{-1}(y)$ ed esiste una e una sola soluzione. Nel caso in cui il denominatore sia nullo in un punto, per applicare l'eq. (1.7) può essere necessario ricorrere al calcolo del limite da destra e da sinistra nei punti di discontinuità. Nel caso in cui il denominatore si annulli su tutto un intervallo il teorema precedente non si applica e la f_y può essere ricavato partendo dalla definizione di F_y e quindi derivando.

1.4 Momenti

La conoscenza della F_x o della f_x descrive completamente la v.a. \mathbf{x} , ma utilizzare queste informazioni per analizzare un problema reale può risultare troppo complesso. Come risulta in genere complesso ricavare le suddette funzioni mediante un studio statistico. Per semplificare l'analisi spesso si ricorre a quelli che vengono chiamati *momenti* della v.a. che riassumono le caratteristiche principali della v.a. senza aver bisogno di conoscere la f_x . Va però sempre ricordato che, tranne casi particolari, la conoscenza dei momenti non permette di descrivere completamente la v.a..

1.4.1 Media di una v.a.

Il primo momento è la *media* di una v.a.:

$$E[\mathbf{x}] = \int_{\mathbb{R}} x f_x(x) dx = \mu_x \quad (1.8)$$

La media di una v.a. prende anche il nome di *valor atteso di \mathbf{x}* , oppure *valor medio*. La $E[\mathbf{x}]$ è caratterizzata dalle seguenti proprietà:

1. Se f_x è pari $\Rightarrow \mu_x = 0$

2. μ_x è il baricentro della f_x

Come si può notare, è sufficiente conoscere completamente la f_x per ricavare il valore medio, ma non è vero il contrario.

Per le funzioni di v.a. (eq. (1.6)) si può dimostrare che:

$$E[y] = E[g(x)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_x(x) dx = \mu_y \quad (1.9)$$

La proprietà precedente è molto importante in quanto mostra come per calcolare la media di y non sia necessario ricavare la f_y in quanto la sola conoscenza della f_x è sufficiente.

È possibile definire in modo equivalente anche il *valor medio condizionato*:

$$E[x|\mathcal{A}] = \int_{\mathbb{R}} x f_x(x|\mathcal{A}) dx$$

che indica la media di una v.a. condizionata. Sfruttando il teorema della probabilità totale (sez. 1.3.1) possiamo ricavare la seguente relazione:

$$E[x] = \sum_{i=1}^N E[x|\mathcal{A}_i] \cdot P\{\mathcal{A}_i\}$$

con \mathcal{A}_i insiemi di eventi, con $i = 1..N$ tali che:

$$\bigcup_{i=1}^N \mathcal{A}_i = \mathcal{S} \text{ e } \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

1.4.2 Varianza

La *varianza* di una v.a. è definita come:

$$E[(x - \mu_x)^2] = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu_x)^2 f_x(x) dx = \sigma_x^2 \quad (1.10)$$

La varianza di una v.a. dà una misura di quanto la v.a. si disperde attorno al valor medio. Se la varianza è piccola si hanno maggiori probabilità di avere le realizzazioni della v.a. prossime a μ_x . La varianza è anche detta *momento centrale di ordine 2*. La quantità:

$$\sigma_x = \sqrt{E[(x - \mu_x)^2]} \quad (1.11)$$

è detta deviazione standard della v.a..

1.4.3 Valore Quadratico Medio

Il *valore quadratico medio* è definito:

$$E[\mathbf{x}^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_{\mathbf{x}}(x) dx \quad (1.12)$$

È possibile ricavare $E[\mathbf{x}^2]$ avendo a disposizione solo la media e la varianza.

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{x}}^2 &= E[(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}})^2] \\ &= E[\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}\mu_{\mathbf{x}} + \mu_{\mathbf{x}}^2] \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x^2 - 2x\mu_{\mathbf{x}} + \mu_{\mathbf{x}}^2) f_{\mathbf{x}}(x) dx \\ &= E[\mathbf{x}^2] - 2\mu_{\mathbf{x}}E[\mathbf{x}] + \mu_{\mathbf{x}}^2 \\ &= E[\mathbf{x}^2] - \mu_{\mathbf{x}}^2 \\ \Rightarrow E[\mathbf{x}^2] &= \sigma_{\mathbf{x}}^2 + \mu_{\mathbf{x}}^2 \end{aligned}$$

Il valore quadratico medio è chiamato anche *momento del secondo ordine*.

1.4.4 Momenti di ordine superiore

Più in generale è possibile definire il *momento normale di ordine i* come:

$$E[\mathbf{x}^i] = \int_{\mathbb{R}} x^i f_{\mathbf{x}}(x) dx \quad (1.13)$$

e il *momento centrale di ordine i*:

$$E[(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}})^i] = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu_{\mathbf{x}})^i f_{\mathbf{x}}(x) dx \quad (1.14)$$

utili per un'analisi della v.a. ad un ordine maggiore.

1.5 Distribuzione di Probabilità Congiunta

Quando si ha a che fare con due v.a. \mathbf{x} e \mathbf{y} (più in generale con n v.a.), non bastano le sole $F_{\mathbf{x}}$ e $F_{\mathbf{y}}$ per descrivere completamente il sistema aleatorio. Manca l'informazione su come \mathbf{x} e \mathbf{y} interagiscono tra loro. Tale informazione è racchiusa nella distribuzione di probabilità congiunta, definita come:

$$F_{\mathbf{xy}}(x, y) = P\{\mathbf{x} \leq x, \mathbf{y} \leq y\}. \quad (1.15)$$

1.6 Densità di Probabilità Congiunta

In analogia con la precedente, si definisce *densità di probabilità congiunta* la seguente quantità (supposto che la $F_{\mathbf{xy}}(x, y)$ sia derivabile):

$$f_{\mathbf{xy}}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\mathbf{xy}}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

La f_{xy} è a sua volta una descrizione completa delle due v.a. in esame. È possibile risalire alle singole *funzioni di densità di probabilità marginali* con:

$$f_x(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{xy}(x, y) dy$$

$$f_y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{xy}(x, y) dx$$

In generale non risulta possibile ricavare f_{xy} conoscendo esclusivamente f_x e f_y , dato che le densità di probabilità marginali non contengono al loro interno l'informazione sull'eventuale dipendenza da altre v.a..

1.6.1 Densità di Probabilità Condizionata

Per analogia alla densità di probabilità condizionata (eq. (1.5)), la *funzione di densità di probabilità condizionata* è definita nel seguente modo:

$$f_x(x|y) = f_x(x|y = y) = \frac{f_{xy}(x, y)}{f_y(y)} \quad (1.16)$$

Questo fatto deriva ancora una volta dal teorema della probabilità totale (sez. 1.3.1):

$$\int_{\mathbb{R}} f_{xy}(x, y) dy = f_x(x) = \int_{\mathbb{R}} f_x(x|y) \cdot f_y(y) dy \quad (1.17)$$

dove gli eventi condizionanti sono continui.

1.6.2 Legami fra Variabili Aleatorie

Se la particolare realizzazione di una v.a. x non influenza la realizzazione di y si ha che:

$$f_{xy}(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y) \quad (1.18)$$

In questo caso x e y si dicono *indipendenti* e il condizionamento a y non influenza la densità di probabilità marginale di x :

$$f_x(x|y) = \frac{f_{xy}(x, y)}{f_y(y)} = f_x(x)$$

Il concetto di indipendenza è molto forte. Deriva da un'analisi completa delle possibili interazioni tra due v.a.. Non conoscendo f_{xy} , ma solo i suoi momenti (come μ_x , μ_y , σ_x^2 e σ_y^2) non si può dir nulla sull'indipendenza. A questo proposito viene in aiuto il concetto di correlazione di due variabili aleatorie, definita come:

$$E[xy] = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{xy}(x, y) dx dy \quad (1.19)$$

Le v.a. x e y si dicono:

- *scorrelate* se $E[\mathbf{xy}] = E[\mathbf{x}] \cdot E[\mathbf{y}]$
- *ortogonali* se $E[\mathbf{xy}] = 0$
- *indipendenti* se $f_{\mathbf{xy}}(x, y) = f_{\mathbf{x}}(x) \cdot f_{\mathbf{y}}(y)$

La correlazione (o la scorrelatezza) indica la presenza (o meno) di un legame tra due v.a. analizzate al secondo ordine tramite i valori medi. Se c'è indipendenza, questo implica che si ha anche scorrelatezza, ma non sempre vale il viceversa (solo nel caso di \mathbf{x} e \mathbf{y} gaussiane). Poiché può capitare che una v.a. abbia valore nullo, talvolta si parla di scorrelatezza in termini di ortogonalità.

Talvolta è più conveniente esprimersi in termini di covarianza, definita come:

$$C_{\mathbf{xy}} = E[(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{y} - \mu_{\mathbf{y}})] = E[\mathbf{xy}] - \mu_{\mathbf{x}}\mu_{\mathbf{y}} \quad (1.20)$$

Se $C_{\mathbf{xy}} = 0$, allora \mathbf{x} e \mathbf{y} sono scorrelate.

Capitolo 2

Processi Stocastici: definizioni

I segnali sono utilizzati per modellare la realtà e la trasformata di Fourier è uno degli strumenti (di certo non l'unico) utilizzato per analizzare i segnali. D'altra parte, il mondo reale ha un andamento tutt'altro che deterministico, quindi occorre definire un nuovo strumento matematico che includa il concetto di aleatorietà e, allo stesso tempo, metta a disposizione gli strumenti classici per l'analisi dei segnali determinati. Tale strumento prende il nome di *processo stocastico* e si indica con:

$$\mathbf{x}(k, t). \tag{2.1}$$

Talvolta può essere utile pensare i processi stocastici come le uscite di particolari esperimenti il cui spazio dei risultati sia lo spazio dei segnali. In tale ottica, il nuovo oggetto introdotto, detto anche *segnale aleatorio* è descritto da due variabili, k e t , che indicizzano, rispettivamente, la particolare realizzazione dell'esperimento e l'evoluzione temporale del processo¹. In generale i processi stocastici possono essere studiati sia fissando la realizzazione k (analisi temporale) sia fissando l'istante temporale d'osservazione t (analisi d'insieme).

2.1 Analisi Temporale

L'*analisi temporale* di un processo stocastico $\mathbf{x}(k, t)$ si effettua fissando k . Ci si concentra quindi su una particolare realizzazione e se ne studia l'evoluzione temporale. Cambiando k si ottiene una nuova realizzazione e quindi un diverso andamento temporale. Riprendendo l'esempio dell'analisi della corrente che passa in una resistenza, è come avere infiniti circuiti 'identici' (o più esattamente simili) e studiarne uno alla volta. Le correnti che si otterranno saranno simili, ma non identiche (ad esempio a causa del rumore

¹Si tenga bene a mente il carattere del tutto simbolico dell'indice k , espressamente indicato solo per richiamare la natura aleatoria del processo.

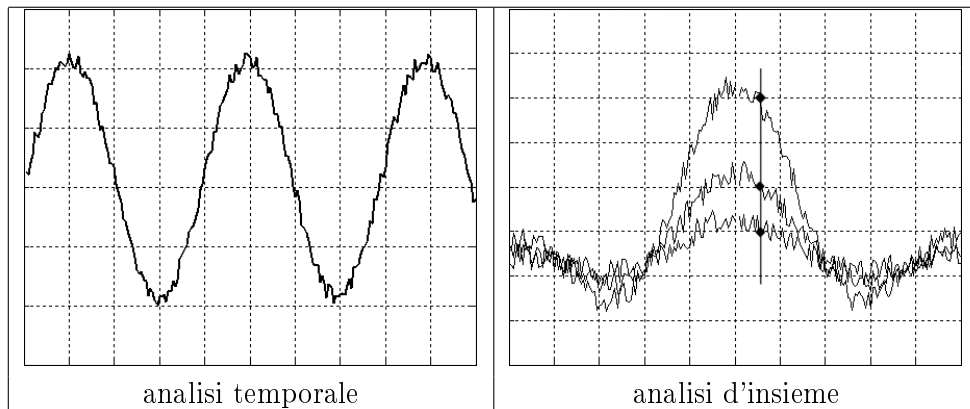


Tabella 2.1: Analisi temporale (sinistra) e analisi d'insieme (destra).

termico, dell'aleatorietà della resistenza e delle caratteristiche dello stesso amperometro utilizzato per effettuare la misura). La figura di sinistra della tabella 2.1 mostra graficamente una particolare realizzazione di un processo stocastico. Il grafico mette in risalto l'evoluzione temporale della particolare realizzazione del processo. Osservando altre realizzazioni si ottengono differenti andamenti.

2.2 Analisi d'Insieme

L'*analisi d'insieme* di un processo stocastico $\mathbf{x}(k, t)$ si effettua fissando l'istante temporale di osservazione. È come accendere tutti i circuiti contemporaneamente e, fissato $t = t^*$, andare a studiare gli infiniti valori ottenuti, da considerare più semplicemente come realizzazioni della variabile aleatoria $\mathbf{x}(k, t^*)$. La figura di destra della Tabella 2.1 mostra più realizzazioni sovrapposte di uno stesso processo stocastico. Fissando l'indice temporale si ottiene una v.a. descritta da una particolare funzione di densità di probabilità. Al variare di t^* si ottengono nuove v.a. con nuove $f_{\mathbf{x}}$.

2.3 Momenti

L'analisi d'insieme di un processo permette di vedere il processo come una sequenza infinita di v.a. indicizzate dal tempo t . Per caratterizzare completamente un processo stocastico occorre dunque caratterizzare completamente le infinite v.a. che lo compongono. Al prim'ordine questo equivale a conoscere:

$$f_{\mathbf{x}(k, t^*)}(x) \quad \forall t^* \in \mathbb{R}$$

Come si è già posto in evidenza nel caso di due variabili aleatorie, al sola conoscenza della densità di probabilità non è sufficiente a caratterizzare un

esperimento in presenza di più variabili aleatore, in quanto è necessario fornire le densità di probabilità congiunte. La caratterizzazione completa di un processo, pertanto, richiede che sia conosciuta la seguente quantità:

$$f_{\mathbf{x}(k,t_1) \mathbf{x}(k,t_2) \dots \mathbf{x}(k,t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \forall t_1, t_2, \dots, t_n \quad \forall n$$

Naturalmente quello appena descritto non è un approccio pratico. Di solito ci si accontenta di un'analisi semplificata, che si limita a descrivere solo i legami fino al secondo ordine:

$$f_{\mathbf{x}(k,t_1) \mathbf{x}(k,t_2)}(x_1, x_2) \quad \forall t_1, t_2$$

Il passo successivo è quello di considerare un'analisi tramite valor medi.

2.3.1 Valor medio di un processo

Si definisce *media d'insieme*, o valor medio, di un processo stocastico il seguente valore atteso:

$$E[\mathbf{x}(k, t)] = \int_{\mathbb{R}} x f_{\mathbf{x}(k,t)}(x) dx = \mu_{\mathbf{x}}(t) \quad (2.2)$$

In considerazione del fatto che fissando t si ottiene una v.a., fare la media di un processo stocastico equivale a calcolare la media di ogni v.a. identificata da t e questo porta ad avere una dipendenza del valore atteso dal tempo.

2.3.2 Autocorrelazione di un processo

Il valor medio fornisce solo un'analisi al prim'ordine. Passando al second'ordine significa considerare la correlazione delle due v.a. che si ottengono considerando due istanti temporali e cioè $\mathbf{x}(k, t_1)$ e $\mathbf{x}(k, t_2)$. In tale ottica, si definisce *autocorrelazione d'insieme* di un processo stocastico la quantità:

$$E[\mathbf{x}(k, t_1)\mathbf{x}(k, t_2)] = \iint_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 f_{\mathbf{x}(k,t_1)\mathbf{x}(k,t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = H_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t_1, t_2) \quad (2.3)$$

Si osservi che ponendo $t_1 = t_2$ quello che si ottiene è il valore quadratico medio (eq. (1.12)) della v.a. $\mathbf{x}(k, t)$.

Correlazione incrociata

Nel caso in cui si abbia a che fare con 2 processi, in modo analogo al concetto di correlazione (eq. 1.19), si definisce la *correlazione incrociata* o *cross correlazione* dei processi:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}(k, t_1)\mathbf{y}(k, t_2)] &= \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{\mathbf{x}(k,t_1)\mathbf{y}(k,t_2)}(x, y) dx dy \\ &= H_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

In questo caso la (2.4) definisce (tramite valor medi) il legame del secondo ordine fra i processi stocastici $\mathbf{x}(k, t)$ e $\mathbf{y}(k, t)$.

2.3.3 Autocovarianza

Dalla (2.2) e dalla (2.3), per un determinato t^* si può ricavare la varianza della v.a. $\mathbf{x}(k, t^*)$ (o varianza del processo qualora si tenga conto della dipendenza da t):

$$\sigma_{\mathbf{x}(k, t^*)}^2 = H_{\mathbf{xx}}(t^*, t^*) - \mu_{\mathbf{x}}^2(t^*)$$

Più in generale, si definisce *autocovarianza* di un processo stocastico la quantità:

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{xx}}(t_1, t_2) &= E[(\mathbf{x}(k, t_1) - \mu_{\mathbf{x}}(t_1))(\mathbf{x}(k, t_2) - \mu_{\mathbf{x}}(t_2))] \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} (x_1 - \mu_{\mathbf{x}}(t_1))(x_2 - \mu_{\mathbf{x}}(t_2)) f_{\mathbf{x}(k, t_1)\mathbf{x}(k, t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= H_{\mathbf{xx}}(t_1, t_2) - \mu_{\mathbf{x}}(t_1) \cdot \mu_{\mathbf{x}}(t_2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Capitolo 3

Processi Stazionari

Per come sono state definite nel capitolo precedente, le proprietà statistiche (media, autocorrelazione, ...) di un processo stocastico dipendono da t oppure da due istanti di tempo t_1 e t_2 (nel caso di un'analisi al secondo ordine).

3.1 Stazionarietà in Senso Stretto

Nella realtà, la maggior parte dei processi sono non stazionari, ma la loro analisi risulta molto complessa, è quindi utile introdurre una classe più semplice di processi detti stazionari. Un processo stocastico si dice *stazionario in senso stretto* (SSS) se verifica la seguente relazione:

$$f_{\mathbf{x}(k,t_1) \dots \mathbf{x}(k,t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\mathbf{x}(k,t_1+\tau) \dots \mathbf{x}(k,t_n+\tau)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.1)$$

$\forall t_1, \dots, t_n, \forall n, \forall \tau$. In pratica, un processo è stazionario in senso stretto se le sue proprietà statistiche non dipendono da traslazioni temporali.

3.2 Stazionarietà in Senso Lato

La stazionarietà in senso stretto risulta essere una caratteristica troppo restrittiva da richiedere (e soprattutto da verificare) e quindi poco interessante da studiare. Rilassando un po' i vincoli imposti, è possibile definire *processo stazionario in senso lato* (SSL) un processo $\mathbf{x}(k, t)$ che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\mu_{\mathbf{x}}(t) = \mu_{\mathbf{x}}$
2. $H_{\mathbf{xx}}(t_1, t_2) = H_{\mathbf{xx}}(t_1 - t_2) = H_{\mathbf{xx}}(\tau)$

Affinché il processo sia stazionario in senso lato la media del processo non deve dipendere dal tempo e l'autocorrelazione deve dipendere solo dalla distanza fra i due istanti di tempo t_1 e t_2 e non dal loro specifico valore. In

pratica viene richiesto che la sola caratterizzazione al second'ordine tramite valor medi sia invariante ad una traslazione dell'asse dei tempi. Per alleggerire la notazione si è soliti riferirsi alla suddetta dipendenza con una nuova variabile $\tau = t_1 - t_2$.

L'autocorrelazione di un processo stocastico stazionario soddisfa le seguenti proprietà:

1. $H_{xx}(0) = E[\mathbf{x}(k, t)\mathbf{x}(k, t)] = E[\mathbf{x}^2(k, t)] = \mathcal{P}_x$
2. $H_{xx}(\tau) = H_{xx}(-\tau)$
3. $|H_{xx}(\tau)| \leq H_{xx}(0)$

La prima proprietà indica come la potenza media di un processo SSL (indicata con \mathcal{P}_x) corrisponda all'autocorrelazione calcolata in zero (questa proprietà verrà dimostrata nei paragrafi successivi). La seconda e la terza proprietà specificano le caratteristiche che una funzione deve soddisfare affinché possa essere una $H_{xx}(\tau)$ valida. Naturalmente $H_{xx}(0)$ deve essere, per il particolare significato che assume, una quantità positiva.

3.2.1 Stazionarietà congiunta

In modo analogo alla stazionarietà in senso lato, due processi stocastici $\mathbf{x}(k, t)$ e $\mathbf{y}(k, t)$, si definiscono *mutamente stazionari* se soddisfano le seguenti proprietà:

1. $\mathbf{x}(k, t)$ è stazionario in senso lato
2. $\mathbf{y}(k, t)$ è stazionario in senso lato
3. $H_{xy}(t_1, t_2) = H_{xy}(t_1 - t_2) = H_{xy}(\tau)$

Tali processi sono detti anche *congiuntamente stazionari*.

Dalla definizione di autocorrelazione di un processo (2.3) e dalla condizione di stazionarietà in senso lato deriva che:

$$\begin{aligned} H_{xy}(\tau) &= H_{xy}(t_1 - t_2) = E[\mathbf{x}(k, t_1)\mathbf{y}(k, t_2)] \\ &= E[\mathbf{y}(k, t_2)\mathbf{x}(k, t_1)] = H_{yx}(t_2 - t_1) \\ &= H_{yx}(-\tau) \end{aligned} \tag{3.2}$$

L'equazione (3.2) esplicita il legame tra H_{xy} e H_{yx} .

3.3 Dominio della Frequenza

La trasformata di Fourier è uno strumento molto utile per analizzare i segnali deterministici $s(t)$, però non può essere applicato direttamente alle singole realizzazioni di un processo (cioè fissando l'indice k), in quanto,

almeno nel caso stazionario, tale realizzazione non ha, solitamente, energia finita. Occorre dunque seguire una strada diversa. I seguenti teoremi richiamano alcune proprietà della Trasformata di Fourier per segnali determinati che saranno utili nel seguito.

Teorema di Parseval. *Sia $s(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un segnale reale ad energia finita avente trasformata di Fourier $S(f)$. Allora:*

$$R_{ss}(\tau) = s(\tau) \otimes s^*(-\tau) = \int_{\mathbb{R}} s(t + \tau) \cdot s^*(t) dt \quad (3.3)$$

$$R_{ss}(0) = \int_{\mathbb{R}} \|s(t)\|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \|S(f)\|^2 df \quad (3.4)$$

$$\mathcal{F}\{R_{ss}(\tau)\} = \|S(f)\|^2 \quad (3.5)$$

Con $\|S(f)\|^2$ densità spettrale di energia e $R_{ss}(\tau)$ autocorrelazione temporale del segnale.

Dal teorema precedente si evince il particolare significato della trasformata di Fourier dell'autocorrelazione di $s(t)$, che fornisce la *densità spettrale di energia* del segnale. Quando si ha a che fare con segnale a energia infinita (e potenza media finita) la trasformata di Fourier non esiste. Per aggirare l'ostacolo si ricorre alla teoria della trasformata di Fourier di *segnali persistenti*¹. La chiave di tale teoria sta nell'autocorrelazione del segnale, autocorrelazione che, a differenza dei segnali a energia finita, è definita come:

$$R_{ss}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t + \tau) \cdot s^*(t) dt \quad (3.6)$$

La trasformata di Fourier dell'eq. (3.6) prende il nome di densità spettrale di potenza media:

$$\mathcal{F}\{R_{ss}(\tau)\} = \mathcal{G}_{ss}(f) \quad (3.7)$$

e descrive come si distribuisce la potenza del segnale alle varie frequenze. Mentre per i segnali ad energia finita l'autocorrelazione (eq. (3.3)) fornisce informazioni sull'energia contenuta nel segnale, per i segnali persistenti (eq. (3.6)) fornisce un'informazione riguardo la potenza del segnale.

Si consideri ora l'energia di una singola realizzazione di un processo $\mathbf{x}(k, t)$. Si deve calcolare il seguente integrale:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{x},k} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{x}^2(k, t) dt.$$

¹Un segnale persistente è un segnale, non necessariamente periodico avente energia infinita, ma potenza media finita.

Mediando su k si ottiene la cosiddetta energia media del processo (dove la parola media indica una media d'insieme):

$$\mathcal{E}_x = E[\mathcal{E}_{x,k}] = E \left[\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(k, t) dt \right]$$

Per la linearità dell'operatore valore atteso $E[\cdot]$ si ottiene:

$$\mathcal{E}_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E[x^2(k, t)] dt$$

Con l'ipotesi della stazionarietà in senso lato del processo:

$$\mathcal{E}_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} H_{xx}(0) dt = +\infty \quad (3.8)$$

Come si può notare dall'eq. (3.8), un processo stocastico stazionario in senso lato ha $\mathcal{E}_x = \infty$.

Analogamente si può calcolare la potenza media del processo:

$$\begin{aligned} E[\mathcal{P}_{x,k}] &= E \left[\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(k, t) dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E[x^2(k, t)] dt \\ &= H_{xx}(0) \cdot \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \\ &= H_{xx}(0) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Un processo stazionario ha quindi $\mathcal{P}_x < \infty$, e più precisamente $\mathcal{P}_x = H_{xx}(0)$.

3.3.1 Densità Spettrale di Potenza Media

I processi stocastici stazionari in senso lato risultano perciò essere 'simili' ai segnali persistenti. Il seguente teorema costituisce la chiave per l'applicazione della Teoria di Fourier allo studio dei processi stocastici.

Teorema di Wiener - Kintchine. *Sia $x(k, t)$ un processo stocastico reale stazionario in senso lato avente autocorrelazione $H_{xx}(\tau)$.*

Allora:

$$S_{xx}(f) = \mathcal{F}\{H_{xx}(\tau)\} \quad (3.10)$$

$$\mathcal{P}_x = H_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df \quad (3.11)$$

La trasformata S_{xx} è chiamata densità spettrale di potenza media.

Dimostrazione. Si inizia col calcolare la densità spettrale di potenza di una singola realizzazione del processo. Sia

$$R_{\mathbf{x}(k,t)\mathbf{x}(k,t)}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mathbf{x}(k, t) \mathbf{x}(k, t + \tau) dt$$

la correlazione² temporale della realizzazione indicizzata con k . La densità spettrale di potenza corrispondente vale:

$$\mathcal{F}\{R_{\mathbf{x}(k,t)\mathbf{x}(k,t)}(\tau)\} = \mathcal{G}_{\mathbf{x}(k,t)\mathbf{x}(k,t)}(f) = \mathcal{G}_{\mathbf{xx}}(f, k),$$

e in generale dipende da k . Per calcolare la densità spettrale di potenza (media) del processo non resta che mediare su k (media d'insieme):

$$\begin{aligned} E[\mathcal{G}_{\mathbf{xx}}(f, k)] &= E[\mathcal{F}\{R_{\mathbf{x}(k,t)\mathbf{x}(k,t)}(\tau)\}] \\ &= E\left[\mathcal{F}\left\{\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mathbf{x}(k, t) \mathbf{x}(k, t + \tau) dt\right\}\right] \\ &= \mathcal{F}\left\{\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} E[\mathbf{x}(k, t) \mathbf{x}(k, t + \tau)] dt\right\} \\ &= \mathcal{F}\left\{H_{\mathbf{xx}}(\tau) \cdot \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} dt\right\} \\ &= \mathcal{F}\{H_{\mathbf{xx}}(\tau)\} \\ &= S_{\mathbf{xx}}(f) \end{aligned}$$

□

Il teorema di Wiener - Kintchine dà un significato fisico alla trasformata di Fourier dell'autocorrelazione d'insieme. La densità spettrale di potenza media di un processo stocastico indica le frequenze (o gli intervalli di frequenze) dove mediamente il segnale ha potenza non nulla.

La funzione densità spettrale di potenza media soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\mathbf{xx}}(f) df = \mathcal{P}_{\mathbf{x}} = H_{\mathbf{xx}}(0) = E[\mathbf{x}^2(k, t)]$
2. $S_{\mathbf{xx}}(f)$ è reale pari
3. $S_{\mathbf{xx}}(f) \geq 0$

Per verificare la seconda proprietà si sfrutta una proprietà della trasformata di Fourier secondo cui la trasformata di una funzione reale pari è ancora una funzione reale pari. Per giustificare la terza proprietà, basta considerare

²Trattando il caso di processi reali non è necessario considerare $\mathbf{x}^*(k, t)$.

il significato fisico assunto dalla S_{xx} , che essendo, per ogni frequenza, una densità di potenza non può che essere maggiore o uguale a 0 (e al tempo stesso reale³).

3.3.2 Densità Spettrale di Potenza Media Congiunta

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto nel paragrafo precedente, si definisce *densità spettrale di potenza media congiunta* la quantità:

$$S_{xy}(f) = \mathcal{F}\{H_{xy}(\tau)\} \quad (3.12)$$

dove con H_{xy} si intende la cross correlazione fra il processo $\mathbf{x}(k, t)$ e il processo $\mathbf{y}(k, t)$.

3.4 Sistemi LTI

Dopo aver introdotto il concetto di processo stocastico, è di fondamentale importanza studiare come si evolve l'uscita di un sistema lineare tempo invariante (LTI) quando al suo ingresso viene posto un processo SSL $\mathbf{x}(k, t)$. Il seguente teorema fornisce utili risultati in proposito.

Teorema 1. *Sia $\mathbf{x}(k, t)$ un processo stocastico stazionario in senso lato. Sia $h(t)$ la risposta impulsiva di un sistema lineare tempo invariante. Sia $\mathbf{y}(k, t)$ l'uscita del sistema.*

Allora:

1. $\mu_y = \mu_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau$
2. $H_{yx}(\tau) = H_{xx}(\tau) \otimes h(\tau)$
3. $H_{yy}(\tau) = H_{xx}(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$

Dimostrazione. Si procede applicando le definizioni.

³Una giustificazione più rigorosa può essere data considerando la densità spettrale di potenza media all'uscita di un filtro passa banda ideale, così come deriva dalle relazioni discusse nel paragrafo 3.4.

1.

$$\begin{aligned}
\mu_y(t) &= E[y(k, t)] \\
&= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}(k, t - t') \cdot h(t') dt'\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} E[\mathbf{x}(k, t - t')] \cdot h(t') dt' \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_x \cdot h(t') dt' \\
&= \mu_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(t') dt'
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
H_{yx}(\tau) &= E[y(k, t + \tau)\mathbf{x}(k, t)] \\
&= E\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}(k, t + \tau - t') \cdot h(t') dt'\right) \cdot \mathbf{x}(k, t)\right] \\
&= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}(k, t + \tau - t') \cdot \mathbf{x}(k, t) \cdot h(t') dt'\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} E[\mathbf{x}(k, t + \tau - t') \cdot \mathbf{x}(k, t)] \cdot h(t') dt' \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} H_{xx}(\tau - t') \cdot h(t') dt' \\
&= H_{xx}(\tau) \otimes h(\tau)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
H_{yy}(\tau) &= E[y(k, t + \tau)y(k, t)] \\
&= E\left[y(k, t + \tau)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}(k, t - t') \cdot h(t') dt'\right)\right] \\
&= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y(k, t + \tau) \cdot \mathbf{x}(k, t - t') \cdot h(t') dt'\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} E[y(k, t + \tau) \cdot \mathbf{x}(k, t - t')] \cdot h(t') dt' \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} H_{yx}(\tau + t') \cdot h(t') dt' \\
&= H_{yx}(\tau) \otimes h(-\tau) \\
&= H_{xx}(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)
\end{aligned}$$

□

Di seguito vengono riportati alcuni utili corollari del teorema precedente.

Corollario 1. *Sia $\mathbf{x}(k, t)$ un processo stocastico stazionario in senso lato. Siano $h(t)$ e $H(f)$, rispettivamente, la risposta impulsiva e la risposta in frequenza di un sistema lineare tempo invariante. Sia $\mathbf{y}(k, t)$ l'uscita del sistema.*

Allora:

1. $\mathbf{y}(k, t)$ è stazionario in senso lato
2. $\mathbf{x}(k, t)$ e $\mathbf{y}(k, t)$ sono mutuamente stazionari
3. $\mu_{\mathbf{y}} = \mu_{\mathbf{x}} \cdot H(0)$
4. $S_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(f) = S_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(f) \cdot H(f) \cdot H(-f) = S_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(f) \cdot \|H(f)\|^2$ se il sistema è reale

Dimostrazione. ⁴

Essendo le prime 3 proprietà del tutto evidenti, si dimostra la sola proprietà 4. Il punto di partenza è la proprietà 3 del teorema 1:

$$\begin{aligned}
 S_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(f) &= \mathcal{F}\{H_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(\tau)\} \\
 &= \mathcal{F}\{H_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)\} \\
 &= \mathcal{F}\{H_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau)\} \cdot \mathcal{F}\{h(\tau)\} \cdot \mathcal{F}\{h(-\tau)\} \\
 &= S_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(f) \cdot H(f) \cdot H(-f)
 \end{aligned}$$

Se il sistema è reale allora $H(f)$ ha simmetria hermitiana e la densità spettrale di potenza media del processo $\mathbf{y}(k, t)$ si può scrivere come:

$$S_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(f) = S_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(f) \cdot \|H(f)\|^2 .$$

□

3.4.1 Rumore Bianco

Un processo stocastico molto utile che interviene nella trattazione di un gran numero di casi pratici, è il cosiddetto rumore bianco. Il *rumore bianco* è un particolare processo stocastico stazionario in senso lato. La caratteristica principale è la totale assenza di memoria delle sue realizzazioni. Il valore assunto all'istante $t + \tau$ non è legato al valore assunto all'istante t , $\forall \tau \neq 0$. Il processo rumore bianco è spesso indicato con il simbolo:

$$\mathbf{n}(k, t) \tag{3.13}$$

⁴Con la notazione $H(\cdot)$ senza pedici, si indica la trasformata di Fourier di $h(\cdot)$, cioè la risposta in frequenza del sistema e non l'autocorrelazione del processo $\mathbf{x}(k, t)$.

dall'inglese *noise*.

Il rumore bianco è un'astrazione matematica utilizzata per modellare i disturbi a cui è sottoposto il segnale. Di solito si intende a media nulla:

$$\mu_n = 0 \quad (3.14)$$

Un processo, per essere un rumore bianco deve avere una densità spettrale di potenza media costante su tutte le frequenze:

$$S_{nn}(f) = \frac{N_0}{2} \quad (3.15)$$

Il processo ha quindi potenza infinita.

$$\mathcal{P}_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} = +\infty \quad (3.16)$$

L'autocorrelazione del processo è:

$$H_{nn}(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau) \quad (3.17)$$

La particolare forma della funzione di autocorrelazione indica chiaramente come il rumore bianco sia un processo completamente privo di memoria in quanto i valori che esso assume in due istanti quanto si voglia vicini sono sempre scorrelati. La densità spettrale di potenza costante, invece, giustifica l'appellativo *bianco* associato al processo, introdotto in analogia con la luce, dove il colore bianco indica la presenza di tutti i colori (frequenze) con la stessa intensità.

Capitolo 4

Processi Ergodici

Nei processi stocastici si hanno a disposizione due possibili tipi di analisi che mettono in risalto differenti aspetti del processo: analisi temporale (sez. 2.1) e analisi d'insieme (sez. 2.2). Ad esempio effettuando la media d'insieme (sez. 2.3.1) si ottiene una funzione dipendente da t , mentre con la media temporale si ottengono valori dipendenti dalla specifica realizzazione k . In generale, quindi, non è possibile scambiare l'analisi temporale con quella d'insieme. Nei particolari casi in cui ciò risulta realizzabile (identici risultati per entrambe le analisi), il processo si dice *ergodico*. Se ogni caratterizzazione d'insieme dà gli stessi risultati della corrispondente caratterizzazione temporale, allora il processo si dice *ergodico in senso stretto*. L'ergodicità in senso stretto è abbastanza difficile da studiare, e risulta inutilmente restrittiva quando si è interessati ad una sola analisi del secondo ordine tramite valori medi. Per questo motivo nel resto del capitolo ci occuperemo solo dell'ergodicità in senso lato, e, ancora più in particolare, dell'ergodicità in media.

4.1 Ergodicità in Senso Lato

Un processo si dice *ergodico in senso lato* se:

- $\mu_{\mathbf{x}}(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \mathbf{x}(k, t) dt$
- $H_{\mathbf{xx}}(t + \tau, t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \mathbf{x}(k, t + \tau) \cdot \mathbf{x}(k, t) dt$

Il primo punto esprime l'*ergodicità in media*, mentre il secondo si riferisce all'*ergodicità in autocorrelazione*. In entrambi i casi a sinistra dell'uguale è riportata l'analisi d'insieme e a destra quella temporale. È immediato osservare che perché le due uguaglianze abbiano senso è necessario che le medie di insieme (valor medio e autocorrelazione) non dipendano dal tempo.

Per poter parlare di ergodicità in senso lato è quindi necessario che il processo sia stazionario in senso lato.

4.2 Successioni di Variabili Aleatorie

Per un'esposizione rigorosa del concetto di ergodicità in media è necessario chiarire il concetto di *limite di una successione di variabili aleatorie*:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n. \quad (4.1)$$

Il significato di convergenza di una successione di v.a. può assumere differenti significati a seconda del contesto, per questo motivo occorre specificare ogni volta il significato assunto dal termine *convergenza*.

4.2.1 Convergenza Ovunque

Si dice che $\mathbf{x}_n(k)$ converge a $\mathbf{x}(k)$ *ovunque* se:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n(k) = \mathbf{x}(k) \quad \forall k, \quad (4.2)$$

dove l'indice k è stato inserito per esplicitare in maniera più chiara il carattere aleatorio sia dei singoli termini della successione che del valore assunto dal limite. La 4.2 è la definizione di convergenza più restrittiva.

4.2.2 Convergenza Quasi Ovunque

Si dice che $\mathbf{x}_n(k)$ converge a $\mathbf{x}(k)$ *quasi ovunque* se:

$$\mathcal{P}\left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n(k) \neq \mathbf{x}(k) \right\} = 0 \quad \text{oppure} \quad \mathcal{P}\left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n(k) = \mathbf{x}(k) \right\} = 1 \quad (4.3)$$

È immediato verificare che la convergenza ovunque \Rightarrow la convergenza quasi ovunque.

4.2.3 Convergenza in Media

Si dice che $\mathbf{x}_n(k)$ converge a $\mathbf{x}(k)$ in *media* e si scrive:

$$\text{l.i.m.}^1_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n(k) = \mathbf{x}(k)$$

se:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left[(\mathbf{x}_n(k) - \mathbf{x}(k))^2 \right] = 0 \quad (4.4)$$

La convergenza ovunque \Rightarrow la convergenza in media, ma la convergenza in media non implica quella quasi ovunque, che, d'altra parte, non implica la convergenza in media.

¹Limit In the Mean.

È possibile quindi trovare dei processi che convergono in media ma non quasi ovunque e viceversa².

4.2.4 Convergenza in Probabilità

Si dice che $\mathbf{x}_n(k)$ converge a $\mathbf{x}(k)$ in *probabilità* se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}\{|\mathbf{x}_n(k) - \mathbf{x}(k)| > \varepsilon\} = 0 \quad (4.5)$$

Le convergenze precedentemente espote \Rightarrow la convergenza in probabilità.

4.2.5 Convergenza in Distribuzione

Si dice che $\mathbf{x}_n(k)$ converge a $\mathbf{x}(k)$ in *distribuzione* se:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{\mathbf{x}_n(k)}(x) = F_{\mathbf{x}(k)}(x) \quad \forall x. \quad (4.6)$$

La convergenza in probabilità \Rightarrow la convergenza in distribuzione.

La figura 4.1 descrive graficamente i legami fra i tipi di convergenza sopra esposti.

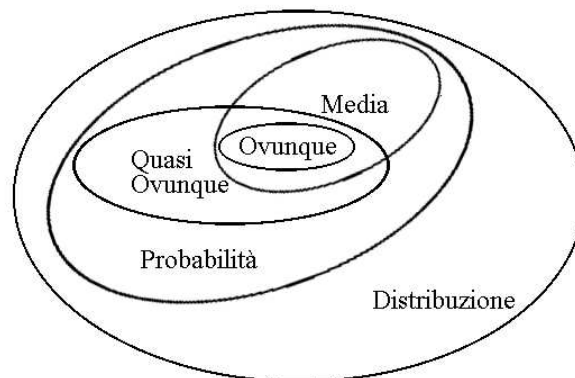


Figura 4.1: Relazioni esistenti tra i vari tipi di convergenza.

4.3 Ergodicità in Media

Siamo ora in grado di dare una definizione esatta dell'ergodicità in media di un processo: un processo si dice ergodico in media se:

$$\mu_{\mathbf{x}} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \mathbf{x}(k, t) dt}_{\mu_{\mathbf{x}}} \quad (4.7)$$

²A. Papoulis - "Probability, random variables and stochastic processes" - 1991, McGraw-Hill.

dove μ_T è chiaramente una v.a. dipendente dalla realizzazione k e dove si è sfruttata l'ipotesi di stazionarietà in senso lato del processo.

Dato che l'operazione di limite viene applicata ad una successione di v.a., va specificata la definizione di convergenza che si intende utilizzare. A tale proposito osserviamo che, operativamente, è necessario (e sufficiente) che, fissato un errore piccolo a piacere, la probabilità che sostituire la media d'insieme con quella temporale porti ad un errore maggiore di quello fissato sia piccola a piacere. Non è difficile riconoscere nella condizione appena descritta la definizione di convergenza in probabilità. Purtroppo la convergenza in probabilità ha lo svantaggio di essere complessa da trattare. Prendere invece in considerazione la definizione di convergenza in media (eq. 4.4) agevola l'analisi e se verificata, implica la convergenza in probabilità. Di contro vengono scartati alcuni processi che convergono in probabilità ma non in media³.

Applicando la definizione di convergenza in media all'equazione 4.7 si ottiene:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \underbrace{E[(\mu_T - \mu_x)^2]}_{\sigma_{\mu_T}^2 = \sigma_x^2} = 0 \quad (4.8)$$

dove si è osservato come la quantità $E[(\mu_T - \mu_x)^2]$ corrisponda alla varianza della v.a. μ_T , infatti:

$$E[\mu_T] = E\left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \mathbf{x}(k, t) dt\right] = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} E[\mathbf{x}(k, t)] dt = \mu_x.$$

Tale proprietà viene di solito riassunta dicendo che μ_T è una stima corretta (non polarizzata) di μ_x . Il risultato fondamentale della teoria dei processi ergodici in media è riassunto nel seguente teorema:

Teorema di Chebichev. *Un processo SSL è ergodico in media se e solo se:*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} C_{xx}(\tau) \cdot \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) d\tau = 0$$

Dimostrazione. Partendo dalla definizione di μ_T si può scrivere:

$$\begin{aligned} \mu_T &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \mathbf{x}(k, t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2T} \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \cdot \mathbf{x}(k, t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2T} \cdot \text{rect}\left(\frac{\tau - t}{2T}\right) \cdot \mathbf{x}(k, t) dt \Big|_{\tau=0} \end{aligned}$$

³I processi scartati a causa di tale scelta sono di scarso interesse pratico.

Si introduce un nuovo segnale derivato dal passaggio di $\mathbf{x}(k, t)$ in un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t) = \frac{1}{2T} \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$:

$$\mathbf{y}(k, t) = \mathbf{x}(k, t) \otimes \frac{1}{2T} \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

Il segnale $\mathbf{y}(k, t)$ così ottenuto è caratterizzato da media, autocorrelazione e densità spettrale di potenza media date da

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbf{y}} &= \mu_{\mathbf{x}} \cdot H(0) \\ H_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(\tau) &= H_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) \\ S_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(f) &= S_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(f) \cdot \|H(f)\|^2\end{aligned}$$

La varianza $\sigma_{\mathbf{y}}^2$ può dunque essere interpretata come la varianza dell'uscita del filtro all'istante $t = 0$. In formule:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathbf{y}}^2 &= E\left[\mathbf{y}(k, 0)^2\right] - E\left[\mathbf{y}(k, 0)\right]^2 \\ &= H_{\mathbf{y}\mathbf{y}}(0) - \mu_{\mathbf{y}}^2 \\ &= H_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)|_{\tau=0} - \mu_{\mathbf{x}}^2 \cdot H(0)^2.\end{aligned}$$

L'autocorrelazione del processo $\mathbf{x}(k, t)$ può essere così riscritta:

$$H_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) = C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) + \mu_{\mathbf{x}}^2$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathbf{y}}^2 &= (C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) + \mu_{\mathbf{x}}^2) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)|_{\tau=0} - \mu_{\mathbf{x}}^2 \cdot H(0)^2 \\ &= C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)|_{\tau=0} + \mu_{\mathbf{x}}^2 \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)|_{\tau=0} - \mu_{\mathbf{x}}^2 \cdot H(0)^2\end{aligned}$$

Sviluppando il secondo termine:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbf{x}}^2 \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)|_{\tau=0} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mu_{\mathbf{x}}^2 \cdot h(\tau') \cdot h(\tau'' - \tau) \, d\tau' \, d\tau'' \Big|_{\tau=0} \\ &= \mu_{\mathbf{x}}^2 \cdot \int_{\mathbb{R}} h(\tau') \, d\tau' \cdot \int_{\mathbb{R}} h(\tau'') \, d\tau'' \\ &= \mu_{\mathbf{x}}^2 \cdot H(0)^2,\end{aligned}$$

si può riscrivere $\sigma_{\mathbf{y}}^2$ come:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathbf{y}}^2 &= C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)|_{\tau=0} \\ &= C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) \otimes \frac{1}{2T} \cdot \text{tr}\left(\frac{\tau}{2T}\right) \Big|_{\tau=0} \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t) \cdot \left(1 - \frac{|\tau - t|}{2T}\right) \, dt \Big|_{\tau=0}.\end{aligned}$$

Osservando che la covarianza e la funzione $\text{tr}(\cdot)$ sono funzioni pari e inserendo anche l'operazione di limite si ottiene:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sigma_T^2 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) \cdot \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) d\tau = 0.$$

Segue la tesi. □

Con considerazioni analoghe al teorema precedente possono essere dimostrare anche le seguenti condizioni sufficienti per l'ergodicità in media di un processo:

1. Condizione sufficiente per l'ergodicità in media del processo $\mathbf{x}(k, t)$ è che:

$$\exists d : C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) = 0 \quad |\tau| > d$$

2. Condizione sufficiente per l'ergodicità in media del processo $\mathbf{x}(k, t)$ è che si verifichi:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) = 0$$

La dimostrazione della seconda condizione, che implica la prima, è la seguente:

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{1}{T} \int_0^{2T} C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) \cdot \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{2T} C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) d\tau - \frac{1}{T} \int_0^{2T} C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) \cdot \frac{\tau}{2T} d\tau \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^{2T} |C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau)| d\tau + \frac{1}{T} \int_0^{2T} |C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau)| \cdot \left|\frac{\tau}{2T}\right| d\tau \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^{2T} |C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau)| d\tau + \frac{1}{T} \int_0^{2T} |C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau)| d\tau = \frac{2}{T} \int_0^{2T} |C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

Sfruttando la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T_0 \quad : \quad |C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau)| < \varepsilon \quad \forall \tau > T_0$$

e dividendo l'integrale in due parti si ricava una sua maggiorazione:

$$\begin{aligned} \Rightarrow &= \frac{2}{T} \int_0^{T_0} |C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau)| d\tau + \frac{2}{T} \int_{T_0}^{2T} |C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{2}{T} \int_0^{T_0} |C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau)| d\tau + \frac{2}{T} \int_{T_0}^{2T} \varepsilon d\tau \\ &= \frac{2K}{T} + \frac{2}{T} \cdot \varepsilon \cdot (2T - T_0) \end{aligned}$$

dove K è il massimo valore assunto da $|C_{\mathbf{xx}}(\tau)|$ nell'intervallo $[0, T_0]$.

Considerando poi che $\sigma_1^2 \geq 0$, si ottiene:

$$0 \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \sigma_1^2 \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{2K}{T} + \frac{2}{T} \cdot \varepsilon \cdot (2T - T_0) \right) = 4\varepsilon.$$

Poiché la relazione precedente vale $\forall \varepsilon > 0$, la sufficienza è verificata.

□

Oltre alle condizioni sopra descritte il teorema seguente fornisce una condizione necessaria e sufficiente per l'ergodicità in media di un processo.

Teorema di Slutsky. *Un processo è ergodico in media se e solo se:*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T C_{\mathbf{xx}}(\tau) d\tau = 0$$

Introducendo il concetto di *spettro dell'autocovarianza*:

$$S_{\mathbf{xx}}^c(f) = \mathcal{F}\{C_{\mathbf{xx}}(\tau)\} = S_{\mathbf{xx}}(f) - \mu_{\mathbf{x}}^2 \cdot \delta(f) \quad (4.9)$$

è possibile riscrivere nel dominio della frequenza il teorema di Slutsky:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T C_{\mathbf{xx}}(\tau) d\tau = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{S_{\mathbf{xx}}^c(0)}{2T} = 0 \quad (4.10)$$

che è vero se e solo se $S_{\mathbf{xx}}^c(0) < \infty$

Se nell'origine dello spettro della covarianza non sono presenti $\delta(\cdot)$ allora il processo $\mathbf{x}(k, t)$ è ergodico in media.

4.4 Ergodicità in Potenza Media

Analogamente alla definizione di ergodicità in media, il processo $\mathbf{x}(k, t)$ si dice *ergodico in potenza media* quando si può invertire l'analisi d'insieme della potenza con quella temporale:

$$\mathcal{P} = \underbrace{E[\mathbf{x}^2(k, t)]}_{\text{studio d'insieme}} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \mathbf{x}^2(k, t) dt}_{\text{studio temporale}} \quad (4.11)$$

Sostituendo $\mathbf{v}(k, t) = \mathbf{x}^2(k, t)$, studiare l'ergodicità in potenza media del processo $\mathbf{x}(k, t)$ diventa equivalente a studiare l'ergodicità in media del processo $\mathbf{v}(k, t)$. Applicando il teorema di Slutsky si ottiene:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T C_{\mathbf{vv}}(\tau) d\tau = 0$$

da cui, svolgendo i passaggi, si arriva a:

$$\begin{aligned} C_{vv}(\tau) &= H_{vv}(\tau) - \mu_v^2 \\ &= E[\mathbf{x}^2(k, t + \tau)\mathbf{x}^2(k, t)] - E[\mathbf{x}^2(k, t)]^2 \\ &= H_{\mathbf{x}^2\mathbf{x}^2}(\tau) - H_{\mathbf{xx}}^2(0) \\ \Rightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T H_{\mathbf{x}^2\mathbf{x}^2}(\tau) d\tau &= H_{\mathbf{xx}}^2(0) \end{aligned} \quad (4.12)$$

L'equazione 4.12 fornisce una condizione necessaria e sufficiente per l'ergodicità in media del processo $\mathbf{x}(k, t)$.

Capitolo 5

Rappresentazione Analitica di Segnali a Banda Stretta

Si definiscono *segnali a banda stretta* quei segnali il cui spettro ha una larghezza molto piccola rispetto alla sua posizione sull'asse delle frequenze. Ad esempio un possibile segnale a banda stretta $s(t)$ può essere costruito (ma non è l'unico modo) a partire da una modulazione fra un $\cos(2\pi f_0 t)$ e un segnale $s'(t)$ in banda base:

$$s(t) = s'(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{con } f_0 \gg B' \quad (5.1)$$

con B' banda di $s'(t)$.

Per esempio i segnali emessi da un'emittente televisiva, radiofonica, o da una scheda di rete wireless sono tutti segnali a banda stretta. La figura 5 dà una rappresentazione grafica dello spettro di un segnale a banda stretta.

Analizzando tali segnali con gli usuali strumenti utilizzati per i segnali passa basso si presentano alcuni effetti indesiderati. Il principale problema si

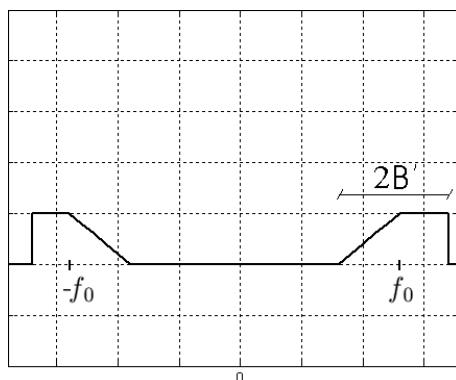


Figura 5.1: Trasformata di Fourier di un segnale a banda stretta

riscontra applicando al segnale il teorema di Shannon (o del campionamento). Si supponga per esempio di dover memorizzare un minuto di un segnale vocale di banda $B' = 4 \text{ KHz}$ che per essere trasmesso è stato centrato in $f_0 = 5 \text{ GHz}$. In questo caso, la banda del segnale da memorizzare è $B = 5\,000\,004\,000 \text{ Hz}$. Per Shannon la frequenza di campionamento minima per poter ricostruire completamente il segnale è:

$$f_c = 2B \simeq 10 \text{ GHz}$$

Questo significa che per memorizzare un minuto di segnale occorrono $600 \cdot 10^9$ campioni. Un approccio non praticabile nemmeno con i moderni calcolatori. Sfruttando il teorema del campionamento non è possibile scendere al di sotto dei $2B$ campioni se si vuole ricostruire senza perdita il segnale.

In questo esempio il vero problema è che il segnale da memorizzare è solamente quello centrato in $f_0 = 5 \text{ GHz}$, ma con supporto $2B' = 8 \text{ KHz}$. Applicando invece il teorema, si ottengono campioni che contengono al loro interno anche l'informazione della nullità dello spettro compresa in $[0; f_0 - B']$.

5.1 Segnali Deterministici

Per risolvere le problematiche derivanti dall'analisi dei segnali a banda stretta, si ricorre ad un cambio di rappresentazione: facendo passare il segnale attraverso alcuni sistemi LTI in cascata si deve riuscire a scrivere $s(t)$ come derivante da una funzione $g(s'(t))$ con la speranza che $s'(t)$ sia un segnale in banda base. Così facendo, con la conoscenza di g e dei campioni prodotti da $s'(t)$ diventerebbe possibile ricostruire completamente il segnale di partenza.

L'analisi che svolgeremo nel seguito, si basa su due ipotesi fondamentali:

- $s(t)$ reale
- $s(t)$ generico a banda stretta

Avendo assunto $s(t)$ reale, segue che $S(f)$ ($s(t) \Leftrightarrow S(f)$) ha simmetria hermitiana, in particolare $\Re\{S(f)\}$ è pari e $\Im\{S(f)\}$ è dispari. Ne discende che la parte destra dello spettro, cioè i valori di $S(f)$ per $f \geq 0$ contengono tutta l'informazione necessaria per descrivere in frequenza $s(t)$. Il segnale di partenza deve quindi potersi ricostruire esattamente a partire da una funzione del tipo $\alpha \cdot S(f) \cdot U(f)$ con $u(t) \Leftrightarrow U(f)$ funzione gradino unitario e α una costante nota. In particolare si può scrivere:

$$S^+(f) = 2 \cdot S(f) \cdot U(f) \Leftrightarrow s^+(t) = s(t) + s(t) \otimes \frac{j}{\pi t} = s(t) + j \hat{s}(t) \quad (5.2)$$

La quantità $s^+(t)$ si chiama *preinviluppo complesso* di $s(t)$, mentre $\hat{s}(t)$ indica la trasformata di Hilbert di $s(t)$.

Così facendo si ottiene un solo intervallo di frequenze dove lo spettro non è nullo. Il passo successivo è il seguente:

$$\tilde{S}(f) = S^+(f + f_0) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{s}(t) = s^+(t) \cdot e^{-j 2\pi f_0 t} \quad (5.3)$$

Il segnale $\tilde{s}(t)$ è chiamata *inviluppo complesso* e in generale la sua trasformata non gode della simmetria Hermitiana. È possibile perciò scrivere l'inviluppo complesso di $s(t)$ come $\Re\{\tilde{s}(t)\} + j \Im\{\tilde{s}(t)\}$:

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= (s(t) + j \hat{s}(t)) \cdot e^{-j 2\pi f_0 t} \\ &= (s(t) + j \hat{s}(t)) \cdot (\cos(2\pi f_0 t) - j \sin(2\pi f_0 t)) \\ &= s(t) \cos(2\pi f_0 t) + j \hat{s}(t) \cos(2\pi f_0 t) - j s(t) \sin(2\pi f_0 t) + \hat{s}(t) \sin(2\pi f_0 t) \\ &= s_i(t) + j s_q(t) \end{aligned}$$

$s_i(t)$ è chiamata *componente in fase* del segnale $s(t)$ e $s_q(t)$ è chiamata *componente in quadratura*.

La tabella 5.1 riassume i passaggi precedenti nel dominio della frequenza.

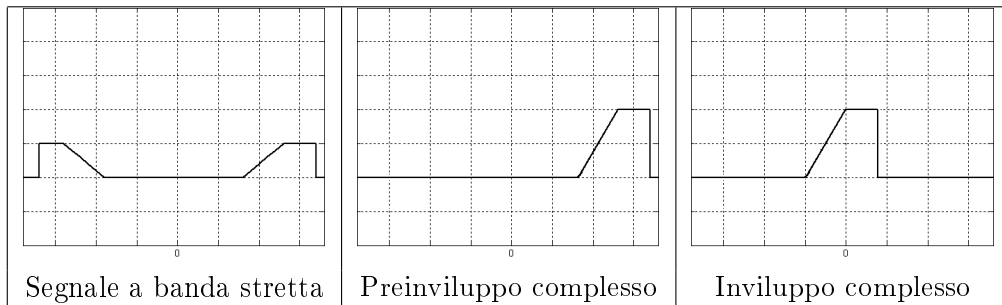


Tabella 5.1: Rappresentazione in frequenza di $s(t)$

Le formule che permettono di ricavare la componente in fase e quella in quadratura del segnale possono essere raggruppate in forma vettoriale per una rappresentazione più compatta.

$$\begin{pmatrix} s_i(t) \\ s_q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi f_0 t) & \sin(2\pi f_0 t) \\ -\sin(2\pi f_0 t) & \cos(2\pi f_0 t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s(t) \\ \hat{s}(t) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Tale rappresentazione prende il nome di *equazioni di analisi del segnale*. Invertendo il sistema 5.4 si ottengono l'*equazioni di sintesi del segnale*:

$$\begin{pmatrix} s(t) \\ \hat{s}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi f_0 t) & -\sin(2\pi f_0 t) \\ \sin(2\pi f_0 t) & \cos(2\pi f_0 t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_i(t) \\ s_q(t) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Date le componenti in fase e in quadratura del segnale e la frequenza f_0 , si risale attraverso la 5.5 al segnale $s(t)$ di partenza. Il sistema fornisce anche

un metodo per ricavare la trasformata Hilbert a partire dalle funzioni $s_i(t)$ e $s_q(t)$.

Osservando il comportamento in frequenza dell'involuppo complesso è facile dimostrare che:

$$S_i(f) = \left[S(f + f_0) + S(f - f_0) \right] \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right) \quad (5.6)$$

e

$$S_q(f) = j \left[S(f - f_0) - S(f + f_0) \right] \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right) \quad (5.7)$$

Queste equazioni sono un ulteriore modo per ricavare (in frequenza) le componenti in fase e in quadratura. Come si può notare tali componenti sono in banda base.

La frequenza f_0 non è vincolante (può essere scelta arbitrariamente), ma si può dimostrare che fissandola a metà dello spettro non nullo si ottiene la scelta ottima (ovvero quella che minimizza la banda di $s_i(t)$ e di $s_q(t)$).

In riferimento all'esempio sopra esposto sulla memorizzazione di un minuto del segnale $s(t)$, con l'introduzione della forma canonica di segnali a banda stretta il problema (da una complessità iniziale di $600 \cdot 10^9$ campioni) si riduce al campionamento di due segnali¹ (la componente in fase e quella in quadratura) di banda B' . In questo modo con solo $60 \cdot 2 \cdot 2B' = 960000$ campioni e l'informazione $f_0 = 5 \text{ GHz}$ si memorizza senza perdita il segnale di partenza $s(t)$.

Un segnale a banda stretta può essere espresso anche come:

$$\begin{aligned} s(t) &= s_i(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) - s_q(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) \\ &= \underbrace{\sqrt{s_i^2(t) + s_q^2(t)}}_{\text{Ampiezza}} \cdot \cos\left(2\pi f_0 t + \underbrace{\arctan\left(\frac{s_q(t)}{s_i(t)}\right)}_{\text{Fase}}\right) \end{aligned}$$

dove le componenti $s_i(t)$ e $s_q(t)$, opportunamente combinate, modulano ampiezza e fase della portante $\cos(2\pi f_0 t)$. Da questo derivano i nomi di fase e quadratura della rappresentazione analitica dei segnali a banda stretta.

5.1.1 Sistemi LTI

È interessante studiare come opera un sistema LTI con risposta impulsiva a banda stretta² quando viene attraversato da un segnale $s(t)$ anch'esso a banda stretta.

¹contro il solo segnale dell'applicazione diretta del teorema di Shannon.

²In realtà quest'ipotesi non è a causa della natura a banda stretta del segnale in ingresso al sistema.

Chiamando $y(t) \Leftrightarrow Y(f)$ l'uscita e $h(t) \Leftrightarrow H(f)$ la risposta del sistema si ha che:

$$Y(f) = H(f) \cdot S(f)$$

ne deriva che anche $y(t)$ è a banda stretta. Calcolando l'involuppo complesso di $Y(f)$ e moltiplicando a sinistra e a destra per 2 si ottiene:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \tilde{Y}(f) &= 2 \cdot Y^+(f + f_0) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot U(f + f_0)^2 \cdot Y(f + f_0) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \underbrace{U(f + f_0) \cdot H(f + f_0)}_{\tilde{H}(f)} \cdot S(f + f_0) \cdot U(f + f_0) \\ &= \underbrace{2 \cdot U(f + f_0) \cdot H(f + f_0)}_{\tilde{H}(f)} \cdot \underbrace{2 \cdot U(f + f_0) \cdot S(f + f_0)}_{\tilde{S}(f)} \end{aligned}$$

Cioè:

$$\tilde{Y}(f) = \frac{1}{2} \cdot \tilde{H}(f) \cdot \tilde{S}(f) \quad (5.8)$$

Nel tempo si ha che:

$$\begin{aligned} [y_i(t) + j y_q(t)] &= \frac{1}{2} \cdot \left[(s_i(t) + j s_q(t)) \otimes (h_i(t) + j h_q(t)) \right] \\ &= [s_i(t) \otimes h_i(t) + j s_q(t) \otimes h_i(t) + j s_i(t) \otimes h_q(t) - s_q(t) \otimes h_q(t)] \\ &\Rightarrow \begin{cases} y_i(t) = \frac{1}{2} \cdot [s_i(t) \otimes h_i(t) - s_q(t) \otimes h_q(t)] \\ y_q(t) = \frac{1}{2} \cdot [s_q(t) \otimes h_i(t) + s_i(t) \otimes h_q(t)] \end{cases} \end{aligned}$$

Si osservi come il calcolo dell'uscita del sistema possa essere eseguito tutto in banda base (per passare in banda passante solo alla fine del procedimento). Questa possibilità è di importanza fondamentale per la simulazione numerica dei sistemi, in quanto permette di simulare il comportamento del sistema utilizzando delle frequenze di campionamento decisamente più basse di quelle a cui sarebbe necessario operare per lo studio diretto in banda passante.

5.2 Processi a banda stretta

In analogia con i risultati ricavati dalla rappresentazione analitica di segnali determinati a banda stretta, si introducono le componenti in fase e in quadratura di processi stocastici a banda stretta³:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(k, t) = \mathbf{x}(k, t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) + \hat{\mathbf{x}}(k, t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) \\ \mathbf{x}_q(k, t) = -\mathbf{x}(k, t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) + \hat{\mathbf{x}}(k, t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \end{cases} \quad (5.9)$$

³La definizione di banda stretta si riferisce alla densità spettrale di potenza media S_{xx} .

Essendo anche le componenti in fase e in quadratura dei processi stocastici, è innanzitutto necessario studiare la loro stazionarietà in senso lato ipotizzando la stazionarietà in senso lato di $\mathbf{x}(k, t)$.

Si verifica innanzitutto la stazionarietà in media:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}_i(k, t)] &= E[\mathbf{x}(k, t)] \cdot \cos(2\pi f_0 t) + E[\hat{\mathbf{x}}(k, t)] \cdot \sin(2\pi f_0 t) \\ &= \mu_{\mathbf{x}} \cdot \cos(2\pi f_0 t) + \mu_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \sin(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

$\mu_{\hat{\mathbf{x}}}$ può essere calcolato considerando $\hat{\mathbf{x}}(k, t)$ come l'uscita di un sistema LTI con $H(f) = -j \operatorname{sgn}(f)$, e utilizzando il corollario nel paragrafo 3.4:

$$\mu_{\hat{\mathbf{x}}} = H(0) \cdot \mu_{\mathbf{x}}$$

Cioè:

$$E[\mathbf{x}_i(k, t)] = \mu_{\mathbf{x}} \cdot (\cos(2\pi f_0 t) + H(0) \cdot \sin(2\pi f_0 t))$$

e

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}_q(k, t)] &= -E[\mathbf{x}(k, t)] \cdot \sin(2\pi f_0 t) + E[\hat{\mathbf{x}}(k, t)] \cdot \cos(2\pi f_0 t) \\ &= -\mu_{\mathbf{x}} \cdot \sin(2\pi f_0 t) + \mu_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \cos(2\pi f_0 t) \\ &= \mu_{\mathbf{x}} \cdot (-\sin(2\pi f_0 t) + H(0) \cdot \cos(2\pi f_0 t)) \end{aligned}$$

Affinché i due processi siano stazionari in media devono avere valor medio indipendente da t . Questo è possibile se e solo se $\mu_{\mathbf{x}} = 0$.

Per quanto riguarda l'autocorrelazione della componente in fase si ha:

$$\begin{aligned} H_{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i}(\tau) &= E[\mathbf{x}_i(k, t + \tau) \mathbf{x}_i(k, t)] \\ &= E\left[(\mathbf{x}(k, t + \tau) \cdot \cos(2\pi f_0(t + \tau)) + \hat{\mathbf{x}}(k, t + \tau) \cdot \sin(2\pi f_0(t + \tau))) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (\mathbf{x}(k, t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) + \hat{\mathbf{x}}(k, t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)) \right] \\ &= E\left[\mathbf{x}(k, t + \tau) \cdot \mathbf{x}(k, t) \cdot \cos(2\pi f_0(t + \tau)) \cdot \cos(2\pi f_0 t) + \right. \\ &\quad + \hat{\mathbf{x}}(k, t + \tau) \cdot \mathbf{x}(k, t) \cdot \sin(2\pi f_0(t + \tau)) \cdot \cos(2\pi f_0 t) + \\ &\quad + \mathbf{x}(k, t + \tau) \cdot \hat{\mathbf{x}}(k, t) \cdot \cos(2\pi f_0(t + \tau)) \cdot \sin(2\pi f_0 t) + \\ &\quad \left. + \hat{\mathbf{x}}(k, t + \tau) \cdot \hat{\mathbf{x}}(k, t) \cdot \sin(2\pi f_0(t + \tau)) \cdot \sin(2\pi f_0 t) \right] \\ &= H_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) \cdot \cos(2\pi f_0(t + \tau)) \cdot \cos(2\pi f_0 t) + \\ &\quad + H_{\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}}(\tau) \cdot \sin(2\pi f_0(t + \tau)) \cdot \cos(2\pi f_0 t) + \\ &\quad + H_{\mathbf{x}\hat{\mathbf{x}}}(\tau) \cdot \cos(2\pi f_0(t + \tau)) \cdot \sin(2\pi f_0 t) + \\ &\quad + H_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}(\tau) \cdot \sin(2\pi f_0(t + \tau)) \cdot \sin(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

Occorre a questo punto fare delle semplificazioni tenendo conto dei legami esistenti fra le correlazioni.

La densità spettrale di potenza media del processo $\hat{\mathbf{x}}(k, t)$ è così definita:

$$S_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}(f) = S_{\mathbf{xx}}(f) \cdot \underbrace{\|H(f)\|^2}_{\| -j \operatorname{sgn}(f) \|^2 = 1} = S_{\mathbf{xx}}(f) \quad \Rightarrow \quad H_{\mathbf{xx}}(\tau) = H_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}(\tau)$$

Per la a cross correlazione si ha:

$$H_{\mathbf{x}\hat{\mathbf{x}}}(\tau) = H_{\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}}(-\tau)$$

Inoltre:

$$S_{\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}}(f) = S_{\mathbf{xx}}(f) \cdot H(f) = -j \operatorname{sgn}(f) \cdot S_{\mathbf{xx}}(f).$$

Ma essendo $S_{\mathbf{xx}}$ pari e $H(f)$ immaginaria dispari (perché risposta in frequenza di un sistema LTI che applica la trasformata Hilbert), si ha che $S_{\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}}$ è immaginaria dispari, cioè che $H_{\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}}$ è reale dispari (per le proprietà di simmetria della trasformata di Fourier). Quindi:

$$H_{\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}}(-\tau) = -H_{\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}}(\tau)$$

Applicando le semplificazioni ricavate si ottiene che:

$$H_{\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i}(\tau) = H_{\mathbf{xx}}(\tau) \cdot \cos(2\pi f_0\tau) + H_{\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}}(\tau) \cdot \sin(2\pi f_0\tau) \quad (5.10)$$

e quindi $\mathbf{x}_i(k, t)$ è stazionario in senso lato.

Risultato analogo si ottiene con $\mathbf{x}_q(k, t)$:

$$H_{\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i}(\tau) = H_{\mathbf{x}_q\mathbf{x}_q}(\tau) \quad (5.11)$$

$$S_{\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i}(f) = S_{\mathbf{x}_q\mathbf{x}_q}(f) \quad (5.12)$$

Passando alla densità spettrale di potenza media, è facile verificare che:

$$\begin{aligned} H_{\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i}(\tau) \Leftrightarrow S_{\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i}(f) &= \frac{1}{2} \cdot [S_{\mathbf{xx}}(f - f_0) + S_{\mathbf{xx}}(f + f_0)] + \\ &+ \frac{1}{2j} \cdot [S_{\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}}(f - f_0) - S_{\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}}(f + f_0)] \end{aligned}$$

ma $S_{\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}}(f) = S_{\mathbf{xx}}(f) \cdot (-j \operatorname{sgn}(f))$ per cui:

$$S_{\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i}(f) = [S_{\mathbf{xx}}(f - f_0) + S_{\mathbf{xx}}(f + f_0)] \cdot \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right) \quad (5.13)$$

I due processi $\mathbf{x}_i(k, t)$ e $\mathbf{x}_q(k, t)$ hanno la stessa autocorrelazione (e quindi la stessa densità spettrale di potenza media), e la potenza media dei due processi (per la (5.13)) è la stessa del processo a banda stretta $\mathbf{x}(k, t)$.

$$\mathcal{P}_{\mathbf{x}_i} = \mathcal{P}_{\mathbf{x}_q} = \mathcal{P}_{\mathbf{x}} \quad (5.14)$$

Rimane da verificare la mutua stazionarietà fra $\mathbf{x}_i(k, t)$ e $\mathbf{x}_q(k, t)$:

$$\begin{aligned}
H_{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_q}(\tau) &= E[\mathbf{x}_i(k, t + \tau) \mathbf{x}_q(k, t)] \\
&= E \left[\left(\mathbf{x}(k, t + \tau) \cdot \cos(2\pi f_0(t + \tau)) + \hat{\mathbf{x}}(k, t + \tau) \cdot \sin(2\pi f_0(t + \tau)) \right) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(-\mathbf{x}(k, t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) + \hat{\mathbf{x}}(k, t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \right) \right] \\
&= E \left[-\mathbf{x}(k, t + \tau) \cdot \mathbf{x}(k, t) \cdot \cos(2\pi f_0(t + \tau)) \cdot \sin(2\pi f_0 t) + \right. \\
&\quad - \hat{\mathbf{x}}(k, t + \tau) \cdot \mathbf{x}(k, t) \cdot \sin(2\pi f_0(t + \tau)) \cdot \sin(2\pi f_0 t) + \\
&\quad + \mathbf{x}(k, t + \tau) \cdot \hat{\mathbf{x}}(k, t) \cdot \cos(2\pi f_0(t + \tau)) \cdot \cos(2\pi f_0 t) + \\
&\quad \left. + \hat{\mathbf{x}}(k, t + \tau) \cdot \hat{\mathbf{x}}(k, t) \cdot \sin(2\pi f_0(t + \tau)) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \right] \\
&= H_{\mathbf{xx}}(\tau) \cdot \sin(2\pi f_0 \tau) - H_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}(\tau) \cdot \cos(2\pi f_0 \tau)
\end{aligned}$$

Inoltre la densità spettrale di potenza media risulta:

$$S_{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_q} = j \cdot [S_{\mathbf{xx}}(f + f_0) - S_{\mathbf{xx}}(f - f_0)] \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right) \quad (5.15)$$

I processi che rappresentano la componente in fase e quella in quadratura del processo stazionario $\mathbf{x}(k, t)$ sono quindi stazionari in senso lato e congiuntamente stazionari.