Esercizio sulle Antitrasformate di Laplace

Si calcoli l'antitrasformata di Laplace di $Y(s) = \dfrac{s+2}{(s-1)(s^2+1)}$.

Dalla teoria delle funzioni razionali, risulta che $Y(s)$ può essere scomposta nella forma

$$Y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B\,s+C}{s^2+1}$$

Per determinare i coefficienti A, B e C, riducendo le frazioni a *minimo comune denominatore*, si ottiene

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{A(s^2+1) + (B\,s+C)(s-1)}{(s-1)(s^2+1)} \\ &= \frac{(A+B)s^2 + (-B+C)s + (A-C)}{(s-1)(s^2+1)} \\ &\triangleq \frac{s+2}{(s-1)(s^2+1)} \end{aligned}$$

Dall'uguaglianza dei polinomi a numeratore

$$(A+B)s^2 + (-B+C)s + (A-C) = s+2$$

si ricava il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=1 \\ A-C=2 \end{cases}$$

che ha soluzione $A = \frac{3}{2}$, $B = -\frac{3}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$. Dunque

$$Y(s) = \frac{3}{2}\,\frac{1}{s-1} - \frac{3}{2}\,\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{s^2+1}\,,$$

la cui antitrasformata (utilizzando le trasformate di Laplace notevoli) è

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{2}\,e^t - \frac{3}{2}\,\cos(t) - \frac{1}{2}\,\sin(t)\,, \quad t \geq 0}$$

Nota. La funzione $y(t)$ può essere scritta in forma più compatta, determinando M, $\varphi \in \mathbb{R}$ (con $M > 0$ e φ espresso in radianti) tali che

$$\frac{3}{2}\,\cos(t) + \frac{1}{2}\,\sin(t) = M\sin(t+\varphi) = M\sin(\varphi)\cos(t) + M\cos(\varphi)\sin(t)$$

Dall'uguaglianza dei coefficienti si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} M\cos(\varphi) = \dfrac{1}{2} \\ M\sin(\varphi) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

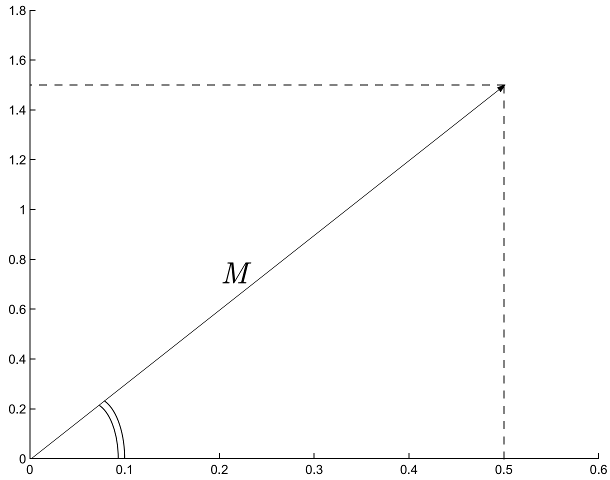

Figura 1

Si osservi che tali equazioni definiscono la rappresentazione in coordinate polari (M, φ) del vettore con coordinate cartesiane $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, appartenente al primo quadrante (Figura 1).
Sommando i quadrati di entrambi i lati delle due equazioni, si ha

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = [M\cos(\varphi)]^2 + [M\sin(\varphi)]^2 = M^2 \underbrace{\left[\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right]}_{1} = M^2$$

da cui risulta

$$M = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Si ha inoltre

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{M\sin(\varphi)}{M\cos(\varphi)} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$$

da cui risulta

$$\varphi = \arctan(3)$$

In conclusione

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{2}\, e^t - \sqrt{\frac{5}{2}}\, \sin(t + \arctan(3))\,, \quad t \geq 0}$$

Esercizio. Calcolare $M, \varphi \in \mathbb{R}$ (con $M > 0$) tali che

$$\frac{3}{2}\, \cos(t) + \frac{1}{2}\, \sin(t) = M\cos(t + \varphi)$$