

# Teoria Evoluzionistica dei Giochi.

*Marco Ernandes*

Tesina per il corso di Economia Cognitiva. Ph.D. Scienze Cognitive.

---

## 1 Motivazioni della teoria evoluzionistica dei giochi.

**Evoluzione come fattore di dinamicità: “Dynamic Game Theory”.** Una prima motivazione a questa interessante estensione del modello iniziale, era già presente in quello che è per molti l’atto fondativo della Teoria dei Giochi, il lavoro che ne fornisce la prima formulazione scientifica: “Theory of Games and Economic Behaviour” [1] di von Neumann e Morgenstern. Al termine del capitolo introduttivo gli autori si mostrano consapevoli del fatto che la rivoluzionaria teoria che si apprestavano a presentare era di fatto completamente statica. Erano convinti che una versione dinamica del loro studio sarebbe stata maggiormente completa e quindi preferibile, data l’alta componente dinamica presente nei contesti economici. Essi avevano però anche la consapevolezza che finché le basi di una teoria statica non fossero state poste, assimilate e rese completamente stabili, il tentativo di realizzare un’estensione dinamica della teoria dei giochi sarebbe stato futile, come già sperimentato da molte altre scienze.

Un tentativo triviale di dare alla teoria dei giochi una connotazione dinamica potrebbe essere quello di fare uso massiccio di giochi in versione estesa (difatti sono anche chiamati giochi “dinamici”), invece della formulazione normale. Ma i problemi che scaturiscono da questo approccio sono due: uno di metodo e uno di merito.

Il primo risiede nel fatto che al crescere della complessità del gioco (numero di scelte e profondità dell’albero delle decisioni) le possibilità di analizzarlo con un modello formale, come il calcolo dei NE (Equilibri di Nash), sono molto scarse. Un esempio molto semplice è quello degli scacchi, in cui l’enorme numero di situazioni diverse in cui i giocatori possono incontrarsi impedisce un’analisi estensiva, sia con i calcolatori moderni, che in futuro<sup>1</sup>.

Il secondo problema è che con questo modello, comunque collocabile nella teoria dei giochi classica, il comportamento degli agenti è prefissato da una scelta fatta a priori sulla strategia da utilizzare: quindi pur essendo dinamico il comportamento dei giocatori (dinamico perché la strategia può determinare comportamenti diversi a seconda degli stati di gioco) questa dinamicità è realizzata sulla base di un modello statico, la strategia stessa.

---

<sup>1</sup> L’uso di sofisticati raffinamenti dell’algoritmo di Zermelo (minimax per von Neumann), complesse funzioni euristiche e librerie di mosse memorizzate, ha permesso solo recentemente ai computer di competere in questo gioco contro i campioni umani.

**Problema dell'Agente iperrazionale.** Ad ogni modo, mantenendo il modello classico della teoria dei giochi, la scelta della strategia richiede l'attribuzione agli agenti di una razionalità di ordine superiore: essi si trovano infatti a dover effettuare una scelta prima che venga definito il contesto di gioco. L'iperrazionalità sta nel fatto che l'agente dovrebbe scegliere la propria strategia in base alle possibili scelte altrui, senza che però queste (con gli effetti che producono) siano state esplicitate e descritte.

Il problema dell'iperrazionalità del modello classico di fronte a contesti dinamici si presenta anche come problema della selezione degli equilibri. Molti giochi hanno molteplici equilibri di Nash, i quali possono essere raggiunti da agenti con razionalità limitata. Però, non tutti questi NE hanno la stessa plausibilità (in molti contesti diversi da quelli del Dilemma del Prigioniero è lecito immaginare una generale tendenza a NE con un alto score paretiano). Un modello normativo e predittivo dovrebbe essere capace di gestire questo tipo di situazione, ma la teoria dei giochi classica richiede che l'agente posseda informazioni che sono solo appannaggio dell'osservatore-analista.

La scelta degli equilibri è stata affrontata affinando in molteplici modi l'idea base dell'equilibrio di Nash. Ma tali e tanti sono stati questi raffinamenti in letteratura che ogni possibile punto di equilibrio trova una sua giustificazione teorica. E' quindi recentemente emerso il problema della scelta, non del punto di equilibrio di Nash, ma del raffinamento della sua formula. Si può supporre che un modello evuzionistico, senza pretese di iperrazionalità, possa fornire soluzioni per uscire da questo stallo.

**Evoluzione sociale-culturale, non strettamente biologica.** La teoria evuzionistica dei giochi ha chiare basi biologiche. Maynard-Smith stesso, uno dei padri di questa branca dell'economia cognitiva, era un genetista e, in un certo senso, aspirava ad aprire un nuovo filone di ricerca in campo biologico, così come era stato per la teoria dei giochi classica che, a suo dire: "è stata maggiormente applicata alla biologia che al campo del comportamento economico, per il quale era stato progettato". Il dubbio che una teoria esplicitamente biologica possa avere un impatto nel mondo delle scienze sociali, piuttosto che nelle scienze naturali, è lecito.

La risposta a questo dubbio è data dal fatto che l'idea stessa di evoluzione può essere modificata per sposare meglio le necessità di uno studio del comportamento economico: nella teoria evuzionistica dei giochi questa prende la forma di un'evoluzione culturale, in cui le generazioni modificano le proprie credenze e regole. L'evoluzione, cosa senza precedenti in letteratura, permette di osservare la validità e la consistenza, nel lungo periodo, delle strategie dei giocatori, direttamente determinabili dalle loro credenze e i loro scopi.

## 2 Descrizione della teoria.

Nel 1972 John Maynard-Smith ha pubblicato un articolo, dal titolo "Game theory and the evolution of fighting" [2], in cui si fanno affondare le radici della teoria evuzionistica moderna. Nel suo lavoro, poi ripreso e perfezionato in collaborazione con George Price si trovavano condensate già molte delle idee dominanti della teoria.

In realtà questa non è la prima trattazione assoluta del problema. Già nel

1930, R.A. Fisher [3] si era occupato di una problematica strettamente affine<sup>2</sup>. Egli ricercava una giustificazione evolutiva al fatto che il rapporto tra il numero di abitanti di sesso maschile e femminile si mantenesse prossimo al 50%/50%, anche in società in cui la maggior parte dei maschi non contribuisce alla riproduzione: un caso, tra i molti, del cosiddetto “divide-the-cake” Nash equilibrium. Fisher notò che un ruolo importante era giocato dalla probabilità con la quale le femmine incontrano i soggetti maschi: quando questa frequenza relativa diventa troppo sbilanciata in favore delle prime, queste hanno difficoltà ad incontrare dei partner per la riproduzione e per un processo naturale il rapporto si riequilibra.

Un altro caso di teoria evolutivistica dei giochi *ante litteram* è quello di David Lewis [4], in cui viene tracciata una linea di collegamento tra la teoria dei giochi classica e dei problemi di linguistica. Egli sostiene che l'arbitrarietà delle parole è corroborata da un accordo stipulato tra i componenti della stessa società. Questa idea, non originale, trova una giustificazione nella teoria dei giochi, secondo cui i parlanti della stessa lingua divengono dei giocatori cooperativi. Il problema soggiacente a questa intuizione, affascinante e promettente al tempo stesso, era la mancanza di una spiegazione del raggiungimento dello stato di equilibrio attraverso un processo evolutivo e senza la possibilità di applicare una metrica sicura come quella paretiana.

**L'approccio di Maynard-Smith e l'ESS.** L'idea forse più influente, sistematizzata da Maynard-Smith e Price nel loro primo lavoro congiunto [5] è quella della strategia evolutivisticamente stabile (ESS: evolutionary stable strategy). Questo diventa, per l'approccio di Maynard-Smith, il concetto cardine.

Nell'articolo viene presentato un esempio molto famoso e anche molto chiaro: quello dei falchi e delle colombe. Questi animali descrivono due fenotipi della popolazione del dominio, i quali sono immersi in un gioco in cui devono accedere ad un'unica risorsa (di valore fisso  $V$ , che coincide con l'incremento della fitness in un'ottica darwiniana). Il comportamento tenuto dagli individui è descrivibile con la seguente tabella, in cui vengono riportate le differenze di fitness,  $\phi(\sigma_x, \sigma_y)$ , risultanti dall'incontro di individui appartenenti alle speci con strategie  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ :

	Falco	Colomba
Falco	$1/2(V - C)$	$V$
Colomba	$0$	$V/2$

Tab. 1: Il gioco Falco vs. Colomba

Il falco ha un comportamento aggressivo che lo porta ad appropriarsi di tutta la risorsa quando incontra una colomba, mentre ne ottiene una quantità inferiore alla metà se incontra un'altro falco, a causa del costo  $C$  richiesto dalla lotta. Le colombe, al contrario, sono speci cooperative e non aggressive: quando incontrano un loro simile si spartiscono equamente la risorsa e perdono tutto quando affrontano i falchi.

Secondo Maynard-Smith:

<sup>2</sup> Fisher era un genetista che ha contribuito, nei primi anni del XX secolo, a stabilizzare la teoria di Darwin sull'evoluzione e ad agganciarla in modo sintetico alla teoria di Mendel della trasmissione genetica, così da porre in correlazione evoluzione fenotipica e genotipica.

**Definition 1 (Definizione di ESS: evolutionary stable strategy).** *Una strategia  $\sigma_1$  si definisce evolutivamente stabile quando, dato un contesto in cui la (quasi) totalità della popolazione è composta da  $\sigma_1$ , nessuna strategia mutante  $\sigma_2$  ha la possibilità di invadere la prima, facendo crescere il proprio numero a discapito di  $\sigma_1$ .*

Secondo il modello presentato da Maynard-Smith, la fitness al tempo  $t$  di  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , è data da:

$$f_t(\sigma_1) = f_{t-1}(\sigma_1) + (1 - p_{t-1})\phi(\sigma_1, \sigma_1) + p_{t-1}\phi(\sigma_1, \sigma_2)$$

$$f_t(\sigma_2) = f_{t-1}(\sigma_2) + (1 - p_{t-1})\phi(\sigma_2, \sigma_1) + p_{t-1}\phi(\sigma_2, \sigma_2)$$

dove  $\phi(\sigma_x, \sigma_y)$  rappresenta la differenza di fitness di  $\sigma_x$  quando incontra  $\sigma_y$  e  $p$  rappresenta la probabilità di incontrare un individuo mutante  $\sigma_2$ . Il modello evolutivistico prevede che, nel contesto di gioco, una specie incrementi di numero in modo proporzionale all'incremento della proprio fitness, e quindi  $p$  cambia in proporzione al rapporto tra gli incrementi di fitness. Ne consegue che, dato un  $p$  iniziale vicino a 0 (secondo le specifiche che vogliono  $\sigma_2$  specie mutante che tenta l'invasione), poniamo per semplicità 0,01, le equazioni sopra riportate possono essere riscritte secondo l'ottica di  $\sigma_1$  nel seguente modo:

$$\phi(\sigma_1) = 0,99\phi(\sigma_1, \sigma_1) + 0,01\phi(\sigma_1, \sigma_2)$$

$$\phi(\sigma_2) = 0,99\phi(\sigma_2, \sigma_1) + 0,01\phi(\sigma_2, \sigma_2)$$

Quindi  $\sigma_1$  impedirà l'invasione di  $\sigma_2$  (cioè:  $\phi(\sigma_1) > \phi(\sigma_2)$ ) se  $\phi(\sigma_1, \sigma_1)$  è strettamente superiore a  $\phi(\sigma_2, \sigma_1)$ . Nel caso in cui si equivalessero deve risultare  $\phi(\sigma_1, \sigma_2)$  strettamente superiore a  $\phi(\sigma_2, \sigma_2)$ .

Questo ragionamento è alla base dell'importante teorema delle strategie evolutivamente stabili proposto da Maynard-Smith.

**Theorem 1 (Condizioni per avere un'ESS).** *Una strategia  $\sigma_1$  è ESS se è verificata una delle seguenti condizioni:*

1. *un individuo  $\sigma_1$  ottiene dall'incontro con un altro  $\sigma_1$  una risorsa maggiore rispetto a quella ottenuta da  $\sigma_2$ .*
2.  *$\sigma_1$  e  $\sigma_2$  ottengono pari risorse da un incontro con un  $\sigma_1$ , ma  $\sigma_1$  ottiene più risorse di  $\sigma_2$  da un incontro con un  $\sigma_2$ .*

L'ESS ricorda molto da vicino il concetto di equilibrio di Nash, traslato in un contesto dinamico, in cui l'idea di stabilità è associata non più al gioco (equilibrio tra le strategie), ma ad ogni singola strategia posta in essere nel gioco<sup>3</sup>. Quindi, ci possiamo chiedere: quale strategia è in equilibrio nel gioco dei falchi e delle colombe? Sicuramente la strategia "colomba" non è stabile, dal momento che può essere invasa da individui falco (il confronto con colombe porta un maggiore incremento di fitness ai falchi ( $\phi(\sigma_2, \sigma_1) = 1$ ) che alle colombe ( $\phi(\sigma_1, \sigma_1) = 1/2$ ). La strategia "falco" può essere stabile, ma questo dipende da  $C$ , che influenza i vari  $\phi$ : nel caso in cui  $C$  sia inferiore a  $V$  la stabilità è garantita (l'incremento di risorse è maggiore di zero, quindi superiore a quella della colomba), mentre se  $C > V$  il falco, incontrando un altro falco, perde fitness e di conseguenza la colomba può invadere.

<sup>3</sup> Si tende ad affermare, difatti, che nella teoria dinamica i giocatori messi a confronto sono le strategie stesse, non i singoli individui

**Replicator Dynamics** L'ultimo caso riportato dall'esempio è probabilmente il più interessante: non si hanno strategie ESS, l'unica possibilità per raggiungere la stabilità è l'uso di strategie non pure (gli individui possono comportarsi in modo non coerente, passando con il tempo da una strategia ad un'altra). Si può quindi immaginare una simulazione evolutiva in cui con il passare delle epoche di simulazione si modifica anche profondamente  $p$ , cioè il rapporto tra il numero di individui di una strategia e delle altre. E' possibile ipotizzare delle condizioni, degli stati di gioco in cui le frequenze delle varie strategie convergono a valori stabili (con il risultato limite dell'estinzione di una strategia, come nel caso dei falchi e delle colombe se  $C < V$ ). Questi sono definiti, per i modelli dinamici, "stati stabili".

Taylor [6] e Zeeman [7] hanno proposto delle equazioni differenziali (alla cui base troviamo i differenziali di riproduzione) che modellano gli stati della teoria evuzionistica del gioco, queste equazioni sono note come *replicator dynamics*.

A partire da questa formulazione della teoria dinamica è stato proposto un modello per il Dilemma del Prigioniero che ne cattura in modo molto efficace la natura. Si considera la possibilità di uno stato di equilibrio in cui il rapporto tra le strategie non cambia e quindi le due differenze di fitness coincidono con una  $\Phi = \phi(\sigma_d) = \phi(\sigma_c)$ <sup>4</sup>. Ad un generico stato  $t$  in cui  $p > 0$  si ha che la  $\phi(\sigma_d) > \Phi > \phi(\sigma_c)$ , poichè i non cooperativi ottengono un incremento di fitness maggiore rispetto ai cooperativi. Si ha che:

$$p_t(\sigma_d) = p_{t-1}(\sigma_d) \times \frac{\phi(d) - \Phi}{\Phi}$$

$$p_t(\sigma_c) = p_{t-1}(\sigma_c) \times \frac{\phi(c) - \Phi}{\Phi}$$

in cui, per le premesse,  $p_t(\sigma_d)$  continua a crescere e  $p_t(\sigma_c)$  a decrescere. Ne consegue che la strategia non collaborativa pura, oltre ad essere ESS secondo Maynard-Smith, conduce ad uno stato stabile con l'estinzione dei cooperativi.

In questo contesto si ottiene un legame stretto tra ESS e replicator dynamics: gli stati stabili sono quelli in cui ogni individuo segue una strategia ESS. In generale, considerando due strategie pure, esistono strategie che le miscelano in modo stabile e sono anche rappresentabili in uno stato del replicator dynamics parimenti stabile. Però questo collegamento diretto tra ESS e replicator dynamics termina quando il numero di strategie pure è maggiore di due.

Ho potuto osservare una simulazione informatica<sup>5</sup> in cui risulta in modo estremamente evidente come al variare dei valori della matrice dei guadagni di fitness le due teorie possono distaccarsi in modo netto.

	Cooperate	Defect		Cooperate	Defect
Cooperate	(1,2, 1,2)	(0, 3,1)		(1,2, 1,2)	(0, 1,3)
Defect	(3,1, 0)	(0,2, 0,2)		(1,3, 0)	(0,2, 0,2)

Tab. 2: Dilemma del Prigioniero, versione 1.

Ad esempio, assegnando ai parametri della matrice i valori della parte sinistra della tabella il modello simulativo porta all'estinzione della strategia di

<sup>4</sup>  $c$  = cooperators, cioè i prigionieri che cooperano tra loro;  $d$  = defectors, cioè i prigionieri che non cooperano.

<sup>5</sup> Il programma è un'applet java che si può trovare all'indirizzo internet: <http://evolve.lse.ac.uk/compass/>.

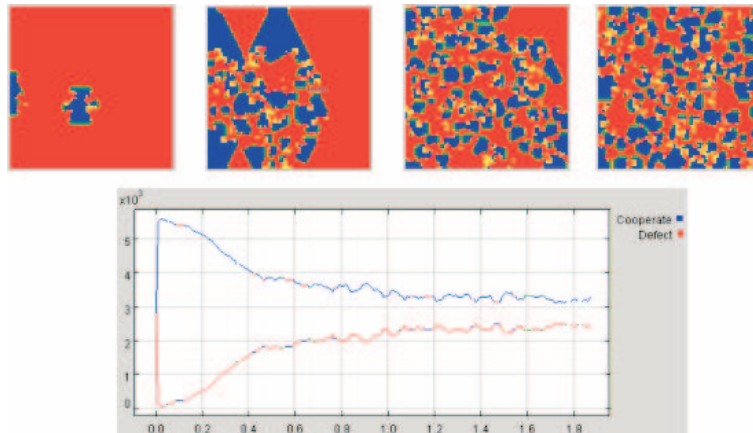


Fig. 1: Ciclo di stati evolutivi. I non cooperativi invadono, ma dopo aver conquistato quasi la metà del dominio ( $p$  quasi uguale a 0,5), l'evoluzione produce cicli di stati non stabili [8].

cooperazione. Nel secondo caso (parte destra, in cui viene ridotto da 3,1 a 1,3 il guadagno in caso di non cooperazione quando l'avversario coopera), invece, la popolazione inizia ad oscillare (con cicli stabili) tra due stati in cui le due strategie sono alternativamente predominanti, ma che non rappresentano stati stabili secondo nessun modello dinamico tra quelli presentati. Cambiando ulteriormente i valori della matrice del dilemma del prigioniero si possono ottenere risultati ancora diversi.

### 3 Conclusioni.

La teoria dei giochi secondo alcuni studiosi di giochi, tra i quali Gintis [9], potrebbe assumere il ruolo di linguaggio universale per l'unificazione delle scienze del comportamento. Con l'aggiunta della teoria evolutivista questo risulta ancora più vero perchè vengono forniti allo studioso due versioni il linguaggio base: una normativa (la teoria classica) che indica ciò che gli individui dovrebbe scegliere agendo in modo razionale ed una descrittiva (le teoria evolutivista) che indica ciò che gli individui fanno realmente [10].

L'interesse per la teoria evolutivista dei giochi è sicuramente alto ed è evidente se si osservano le innumerevoli applicazioni e ripercussioni che essa ha avuto in molteplici discipline.

L'intelligenza artificiale, ad esempio, ha sviluppato algoritmi di learning evolutivi: negli algoritmi genetici le speci sono associate a delle ipotesi nello spazio dell'apprendimento (che può essere di classificazione, regressione, etc.) e la specie predominante al raggiungimento di uno stato stabile, veicola l'ipotesi di learning vincente.

La filosofia e la socio-politica hanno iniziato ad utilizzare modelli evolutivisti simulativi. Skyrms [11], ad esempio, ha tentato di giustificare in senso evolutivo molte problematiche tipiche della filosofia sociale: il comportamento altruistico e il concetto di giustizia, la necessità della proprietà privata, del linguaggio e anche molti casi di politica internazionale.

Questi sono tutti risultati di portata eccezionale, se si pensa che le origini

del modello teorico sono strettamente collegate a studi biologici. Vi è però un problema nella teoria evuzionistica dei giochi: essa permette di prevedere simulativamente quanto accadrà, ma non ha nessuna capacità esplicativa. Essa infatti non permette di enucleare le cause degli eventi (l'eziologia), mentre questa è una importante requisito per ogni teoria scientifica. Su questo fronte vi è ancora grande spazio per ricerca e dibattito: la necessità di una riformulazione strutturale è evidente.

## References

- [1] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1944.
- [2] J. Maynard-Smith, "Game theory and the evolution of fighting," in *On Evolution* (J. Maynard-Smith, ed.), Edinburgh: Edinburgh University Press, 1972.
- [3] R. Fisher, *The Genetic Theory of Natural Selection*. Oxford: Clarendon Press, 1930.
- [4] D. Lewis, *Convention*. Cambridge: Harvard University Press, 1969.
- [5] J. Maynard-Smith and G. Price, "The logic of animal conflict," *Nature*, vol. 146, pp. 15–18, 1973.
- [6] P. D. Taylor and L. B. Yonker, "Evolutionary stable strategies and game dynamics," *Neurobiology*, vol. 88, pp. 4433–4437, 1991.
- [7] E. C. Zeeman, "Population dynamics from game theory," in *Global theory of dynamical systems*, pp. 471–497, London: Springer-Verlag, 1980.
- [8] M. A. Nowak and R. M. May, "The spatial dilemmas of evolution," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 3, no. 1, pp. 35–78, 1993.
- [9] H. Gintis, "Classic versus evolutionary game theory," *Journal of Consciousness Studies*, vol. 7, no. 1-2, pp. 300–304, 2000.
- [10] G. Mar, "Evolutionary game theory, morality and darwinism," *Journal of Consciousness Studies*, vol. 7, no. 1-2, pp. 322–326, 2000.
- [11] B. Skyrms, *Evolution of the social contract*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.