Lucidi del corso di

Controllo digitale

Corso di Laurea triennale in Ingegneria dell'Automazione

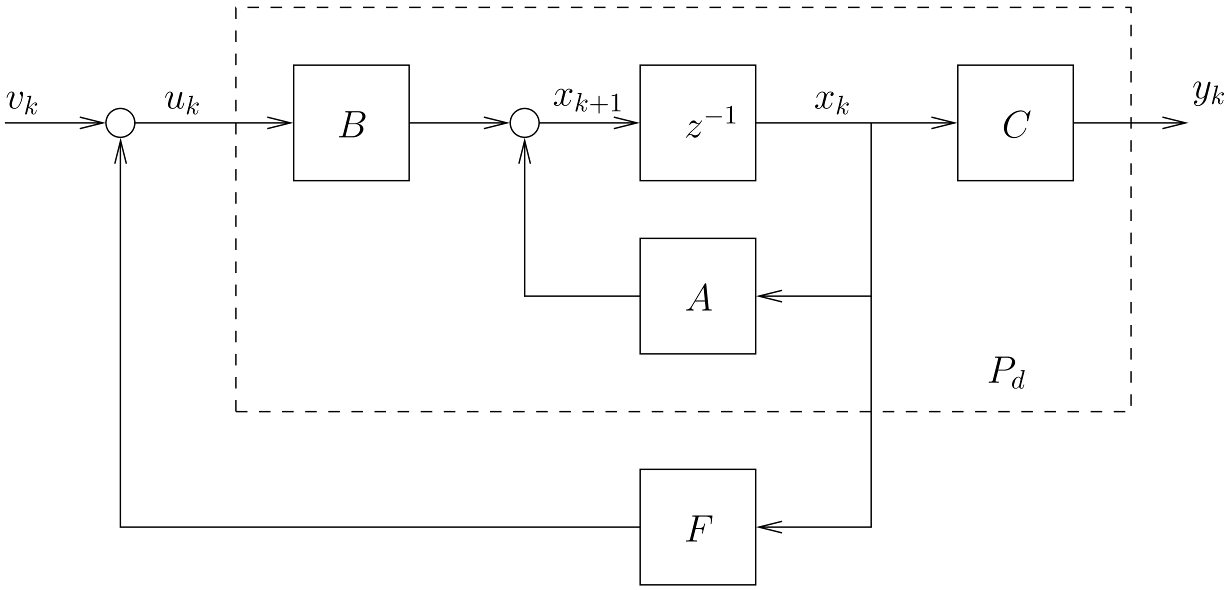
Università di Siena, Facoltà di Ingegneria

Parte VI

Progetto nello spazio degli stati

Gianni Bianchini

METODI NELLO SPAZIO DEGLI STATI



- Sistema lineare tempo invariante tempo discreto in equazioni di stato

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad ; \quad x_k \in \mathbb{R}^n \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

- Il sistema in oggetto è eventualmente il modello a tempo discreto P_d in equazioni di stato (con ZOH) di un impianto P a tempo continuo

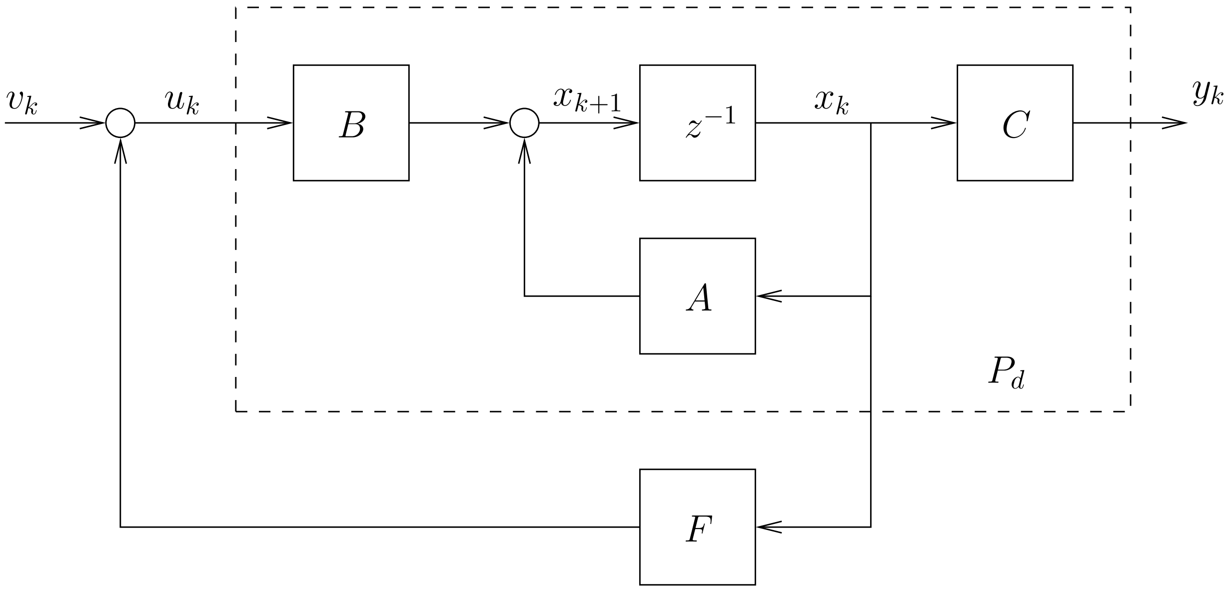
- Ipotesi: lo stato è *accessibile*, ovvero sono disponibili misure (o stime) di x_k ad ogni istante (informazione completa)

- L'obiettivo è progettare una legge di retroazione (lineare) delle variabili di stato

$$u_k = F_k x_k + v_k,$$

eventualmente con $F_k = F$ costante, in modo da soddisfare determinate specifiche.

METODI NELLO SPAZIO DEGLI STATI



- Calcolo della dinamica ad anello chiuso (con guadagno di retroazione F costante)

$$\begin{cases} x_{k+1} = (A+BF)x_k + Bv_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

- L'informazione sullo stato è la massima informazione disponibile sul sistema

- Come selezionare il guadagno di retroazione per garantire
  - stabilità interna?
  - prestazioni?

RAGGIUNGIBILITA'

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad ; \quad x_k \in \mathbb{R}^n \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

- Data una sequenza di ingresso $\{u_k\}$, l'evoluzione dello stato al passo k dalla condizione iniziale x_0 vale

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u_i$$

i.e.

$$x_k = A^k x_0 + R_k U_k$$

dove

$$R_k = [B \ AB \ \ldots \ A^{k-1}B], \quad U_k = [u_{k-1} \ u_{k-2} \ \ldots \ u_0]'$$

Problema. Determinare una sequenza d'ingresso U_k in grado di portare il sistema da uno stato x_0 ad uno stato $\bar{x}$ in k passi, ovvero tale che

$$\bar{x} = A^k x_0 + R_k U_k$$

- Il problema ha soluzione se e solo se

$$\bar{x} - A^k x_0 \in \mathrm{Im}[R_k] \text{ (sottospazio immagine di } R_k)$$

- Il sottospazio

$$\mathcal{R}_k = \mathrm{Im}[R_k] = \mathrm{Im}[B \ AB \ \ldots \ A^{k-1}B]$$

rappresenta l'insieme degli stati x_k *raggiungibili* a partire dallo stato nullo mediante un'opportuna sequenza d'ingresso ed è quindi detto *sottospazio di raggiungibilità* in k passi

RAGGIUNGIBILITA'

- Polinomio caratteristico di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_0$$

Lemma (teorema di Hamilton-Cayley). Ogni matrice quadrata A è radice del suo polinomio caratteristico, i.e.

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} + \ldots - a_0 I$$

Teorema. I sottospazi di raggiungibilità sono tali che

$$\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{R}_k \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{n+1} = \mathcal{R}_{n+2} = \ldots = \mathcal{R}$$

dove

$$\mathcal{R} = \mathrm{Im}[B \ AB \ \ldots \ A^{n-1}B]$$

- La successione $\mathcal{R}_k$ diventa stazionaria per $k \geq n$ per il teorema di H.C.
- La successione può diventare stazionaria anche per $k < n$
- Conseguenza: se uno stato è raggiungibile, allora lo è in al più in n passi
- Il sottospazio

$$\mathcal{R} = \mathrm{Im}[R] = \mathrm{Im}[B \ AB \ \ldots \ A^{n-1}B]$$

  è pertanto detto *sottospazio di raggiungibilità* del sistema e la matrice

$$R = [B \ AB \ \ldots \ A^{n-1}B]$$

  matrice di raggiungibilità

RAGGIUNGIBILITA'

- Per il teorema di H.C., il sottospazio $\mathcal{R}$ è A-invariante, ovvero

$$\bar{x} \in \mathcal{R} \;\Rightarrow\; A\bar{x} \in \mathcal{R}$$

- Il sistema è detto *completamente raggiungibile* se

$$\mathcal{R} = \mathbb{R}^n$$

i.e.

$$\text{rank}[R] = n$$

i.e. per ogni stato iniziale x_0 ed ogni stato obiettivo $\bar{x}$ esiste una sequenza di ingressi U_n che porta lo stato x_0 in $\bar{x}$ in al più n passi, cioè tale che

$$x_n = A^n x_0 + RU_n = \bar{x}$$

(nota: se $\bar{x}$ è arbitrario, lo è anche $\bar{x} - A^n x_0$).

- La proprietà di completa raggiungibilità è invariante rispetto a trasformazioni di coordinate nello spazio degli stati

$$x_k = Tz_k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_{k+1} & = & \tilde{A}z_k & + & \tilde{B}u_k \\ y_k & = & \tilde{C}z_k & & \end{cases}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \;\; ; \;\; \tilde{B} = T^{-1}B \quad ; \quad \tilde{C} = CT$$

Infatti la matrice di raggiungibilità nella nuova base vale

$$\tilde{R} = [T^{-1}B \; T^{-1}ATT^{-1}B \;\; \dots \;\;] = T^{-1}R$$

dunque $\tilde{R}$ ha rango pieno se e solo se lo ha R.

CONTROLLO A ENERGIA MINIMA

- Energia dell'ingresso u_k nell'intervallo $0, \ldots, n-1$

$$E(U_n) = \frac{1}{2}\|U_n\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} u_k^2$$

- **Obiettivo.** Sotto l'ipotesi che il sistema sia raggiungibile, assegnati uno stato iniziale x_0 e uno stato finale $\bar{x}$, determinare la sequenza di ingressi *a minima energia* che porta lo stato da x_0 a $\bar{x}$.

- Problema di ottimizzazione ai minimi quadrati

$$U_n^* = \arg\min \tfrac{1}{2}\left\|U_n\right\|^2$$
$$\bar{x} - A^n x_0 = RU_n$$

- Metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\mathcal{L}(U_n, \lambda) = \frac{1}{2}\left\|U_n\right\|^2 + \lambda'[(\bar{x} - A^n x_0) - RU_n]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_n} = U_n - R'\lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (\bar{x} - A^n x_0) - RU_n = 0$$
$$\Downarrow$$
$$U_n^* = R'(RR')^{-1}(\bar{x} - A^n x_0)$$

(moltiplicare la prima equazione per R).

- La matrice $W_R = RR'$ è detta *gramiano* di raggiungibilità, ed è sempre invertibile quando $\text{rank}[R] = n$.

DECOMPOSIZIONE DI RAGGIUNGIBILITA'

- La dimensione dello spazio raggiungibile, i.e.

$$n_r = \text{rank}[R]$$

è detto *indice di raggiungibilità*

- Obiettivo: determinare un cambiamento di coordinate nello spazio degli stati $x_k = T[z_k^r \ z_k^{\bar{r}}]'$, in modo che nella nuova base i primi elementi siano generatori del sottospazio raggiungibile

- Sia $n_r < n$ e si consideri la matrice di cambiamento di base

$$T = [v_1 \dots v_{n_r} w_{n_r+1} \dots w_n]$$

dove $\{v_1, \dots, v_{n_r}\}$ è una base di $\mathcal{R}$, e $\{w_{n_r+1}, \dots, w_n\}$ è un suo completamento per ottenere una base di $\mathbb{R}^n$.

- Poiché $\mathcal{R}$ è A-invariante, il vettore Av_i non ha componenti lungo i vettori $w_{n_r+1}, \dots, w_n, \forall i$.

- Poiché $\text{Im}[B] \subseteq \mathcal{R}$, le colonne di B non hanno componenti lungo i vettori $w_{n_r+1}, \dots, w_n$

- Se ne ricava la *decomposizione canonica di raggiungibliltà*

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \quad ; \quad \tilde{B} = T^{-1}B \quad ; \quad \tilde{C} = CT$$

dove le matrici del sistema nella nuova base hanno la forma

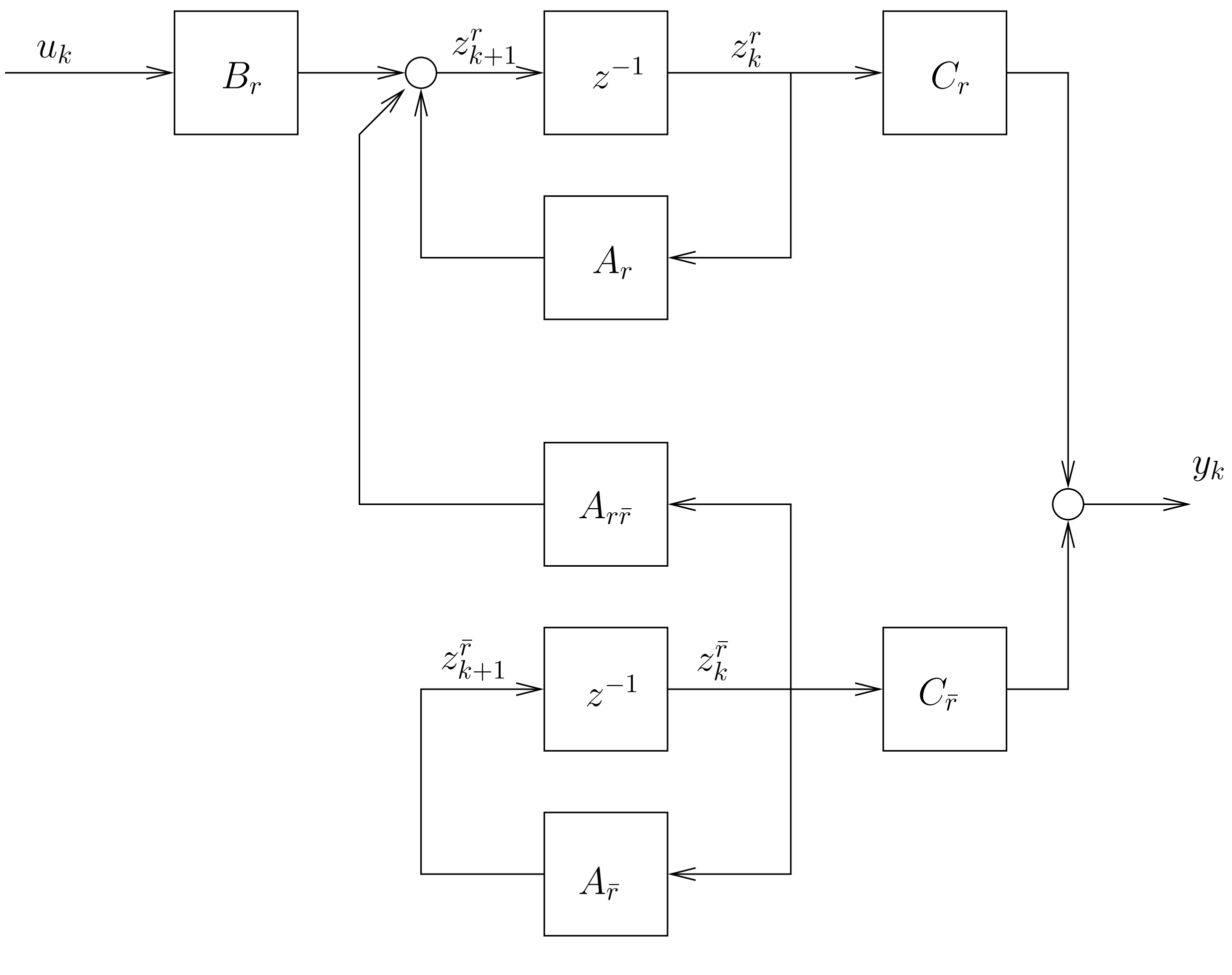
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_r & A_{r\bar{r}} \\ 0 & A_{\bar{r}} \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C_r & C_{\bar{r}} \end{bmatrix}$$

DECOMPOSIZIONE DI RAGGIUNGIBILITA'

- Il sottosistema definito da (A_r, B_r, C_r) è un sistema di ordine n_r ed è completamente raggiungibile (in n_r passi)

- Data la struttura a blocchi della decomposizione canonica, gli autovalori di A sono dati dall'insieme degli autovalori di A_r (detti autovalori raggiungibili) e di quelli di $A_{\bar{r}}$ (detti autovalori non raggiungibili)

- Schema a blocchi



DECOMPOSIZIONE DI RAGGIUNGIBILITA'

Teorema. Gli autovalori non raggiungibili non compaiono tra i poli della funzione di trasferimento di un sistema

- Sia T un cambiamento di base che porta il sistema in decomposizione canonica di raggiungibilità

$$
\begin{aligned}
G(z) &= C(zI - A)^{-1}B = \tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \\
&= \begin{bmatrix} C_r & C_{\bar{r}} \end{bmatrix} \left(zI - \begin{bmatrix} A_r & A_{r\bar{r}} \\ 0 & A_{\bar{r}} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C_r & C_{\bar{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - A_r)^{-1} & \star \\ 0 & (zI - A_{\bar{r}})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= C_r(zI - A_r)^{-1}B_r
\end{aligned}
$$

  $G(z)$ non dipende dagli autovalori di $A_{\bar{r}}$, si ha quindi una cancellazione polo/zero per ogni autovalore non raggiungibile

- Osservando la decomposizione, si nota che gli autovalori non raggiungibili corrispondono a modi non influenzati dall'ingresso, tali modi non possono quindi comparire nella relazione ingresso-uscita, ovvero la funzione di trasferimento.

$\boxed{\textbf{CONTROLLABILITA'}}$

Problema. Determinare una sequenza d'ingresso U_k in grado di controllare a zero in k passi lo stato del sistema a partire da uno stato iniziale x_0, ovvero tale che

$$0 = A^k x_0 + R_k U_k$$

- Il problema ha soluzione se e solo se

  $$-A^k x_0 \in \mathcal{R}_k$$

  ovvero se $A^k x_0$ è uno stato raggiungibile in k passi

- Il problema ammette soluzione per ogni x_0, i.e., il sistema è *completamente controllabile* in k passi se e solo se al variare di x_0, lo stato $-A_k x_0$ è raggiungibile in k passi, i.e.,

  $$\mathrm{Im}[A^k] \subseteq \mathcal{R}_k$$

- Se un sistema è completamente controllabile, lo è in al più n passi, sempre per il teorema di H.C.

- Un sistema si dice quindi *completamente controllabile* se lo è in n passi, ovvero se

  $$\mathrm{Im}[A^n] \subseteq \mathcal{R}$$

- Se un sistema è completamente raggiungibile, allora è anche completamente controllabile, infatti banalmente

  $$\mathrm{Im}[A^n] \subseteq \mathcal{R} = \mathbb{R}^n$$

CONTROLLABILITA'

Teorema. Un sistema (non completamente raggiungibile) è completamente controllabile se e solo se gli autovalori del sottosistema non raggiungibile sono tutti nulli

- Poiché i modi non raggiungibili non sono influenzabili dall'ingresso, se lo stato deve andare a zero in n passi allora l'evoluzione libera della parte non raggiungibile deve andare a zero in tempo finito, ovvero $A_{\bar{r}}$ deve avere autovalori tutti nulli

- In decomposizione canonica di raggiungibilità la condizione di controllabilità a zero di uno stato iniziale z_0 si scrive

$$-\begin{bmatrix} A_r^n & \star \\ 0 & A_{\bar{r}}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_r^0 \\ z_{\bar{r}}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_r & A_r B_r & \dots & A_r^{n-1} B_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} U_n$$

  che ammette soluzione per ogni stato iniziale z_0 (ovvero il sistema è completamente controllabile) se e solo se $A_{\bar{r}}^n = 0$, ossia se e solo se $A_{\bar{r}}$ ha autovalori tutti nulli (matrice nilpotente).

RETROAZIONE DALLO STATO

$$\begin{cases} x_{k+1} & = & Ax_k & + & Bu_k & ; & x_k \in \mathbb{R}^n, & u_k \in \mathbb{R} \\ y_k & = & Cx_k \end{cases}$$

- Legge di retroazione dallo stato

$$u_k = Fx_k + v_k$$

- Dinamica ad anello chiuso

$$\begin{cases} x_{k+1} & = & (A+BF)x_k & + & Bv_k \\ y_k & = & Cx_k \end{cases}$$

- In decomposizione canonica di raggiungibilità

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} = \begin{bmatrix} A_r & A_{r\bar{r}} \\ 0 & A_{\bar{r}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_r & F_{\bar{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_r + B_rF_r & A_{r\bar{r}} + B_rF_{\bar{r}} \\ 0 & A_{\bar{r}} \end{bmatrix}$$

- Un controllo in retroazione dallo stato influenza il solo sottosistema raggiungibile (e quindi i soli autovalori raggiungibili)

Problema. Determinare una legge di retroazione dallo stato in modo che il sistema ad anello chiuso soddisfi opportune specifiche

- Sono note le relazioni tra le prestazioni ed i poli/autovalori ad anello chiuso

$$\Downarrow$$

Progettare la legge di controllo in modo da allocare gli autovalori (della parte raggiungibile) del sistema in modo conforme alle specifiche

ALLOCAZIONE DEGLI AUTOVALORI

Problema. Dato un sistema *completamente raggiungibile*, ad un solo ingresso, determinare una legge di retroazione dallo stato in modo che gli autovalori del sistema ad anello chiuso siano pari a valori desiderati $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Teorema. Un sistema è completamente raggiungibile se e solo se esiste una trasformazione di coordinate T che porta il sistema nella cosiddetta *forma canonica di raggiungibilità*

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e vale

$$T = R \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \ldots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = RH$$

dove $a_{n-1}, \ldots a_0$ sono i coefficienti del polinomio caratteristico di A

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = \det(\lambda I - A)$$

ALLOCAZIONE DEGLI AUTOVALORI

- Si consideri la matrice di retroazione nella base relativa alla forma canonica di raggiungibilità

$$\tilde{F} = [f_0\ f_1\ \ldots\ f_{n-1}] \quad ; \quad \tilde{F} = FT$$

- Sistema ad anello chiuso corrispondente

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ -a_0 + f_0 & -a_1 + f_1 & \ldots & -a_{n-1} + f_{n-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Polinomio caratteristico ad anello chiuso

$$p_{A+BF}(\lambda) = \lambda^n + (a_{n-1} - f_{n-1})\lambda^{n-1} + \ldots + (a_0 - f_0)$$

- È possibile fissare arbitrariamente i coefficienti del polinomio caratteristico (e quindi gli autovalori) del sistema ad anello chiuso scegliendo

$$\tilde{F} = [a_0 - d_0\ \ldots\ a_{n-1} - d_{n-1}]$$

dove

$$p_d(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_0$$

è il polinomio caratteristico desiderato

ALLOCAZIONE DEGLI AUTOVALORI

- Calcolo della matrice di retroazione nella base originaria

$$F = \tilde{F}T^{-1} = \tilde{F}(RH)^{-1} = [a_0 - d_0 \ \ldots \ a_{n-1} - d_{n-1}](RH)^{-1}$$

- Metodo alternativo: formula di Ackermann

$$F = -[0 \ 0 \ \ldots \ 1]R^{-1}p_d(A)$$

dove

$$p_d(A) = A^n + d_{n-1}A^{n-1} + \ldots + d_0 I$$

- Matlab

1. `F=-place(A,B,P)`   Allocazione autovalori
2. `F=-acker(A,B,P)`   Formula di Ackermann

dove `P`$= [\lambda_1 \ \ldots \ \lambda_n]$ è il vettore degli autovalori ad anello chiuso desiderati

- Per problemi di piccole dimensioni, si può impostare direttamente l'equazione

$$p_{A+BF}(\lambda) = p_d(\lambda)$$

e risolvere nelle incognite $f_0, \ldots, f_{n-1}$ uguagliando coefficiente a coefficiente

- **Importante.** Se il sistema non è completamente raggiungibile, i metodi visti possono essere impiegati per l'allocazione degli autovalori del solo sottosistema raggiungibile. Gli autovalori del sottosistema non raggiungibile non possono essere cambiati!

STABILIZZABILITA'

Problema. Dato un sistema in rappresentazione di stato, determinare, se esiste, una legge di controllo che renda il sistema ad anello chiuso asintoticamente stabile

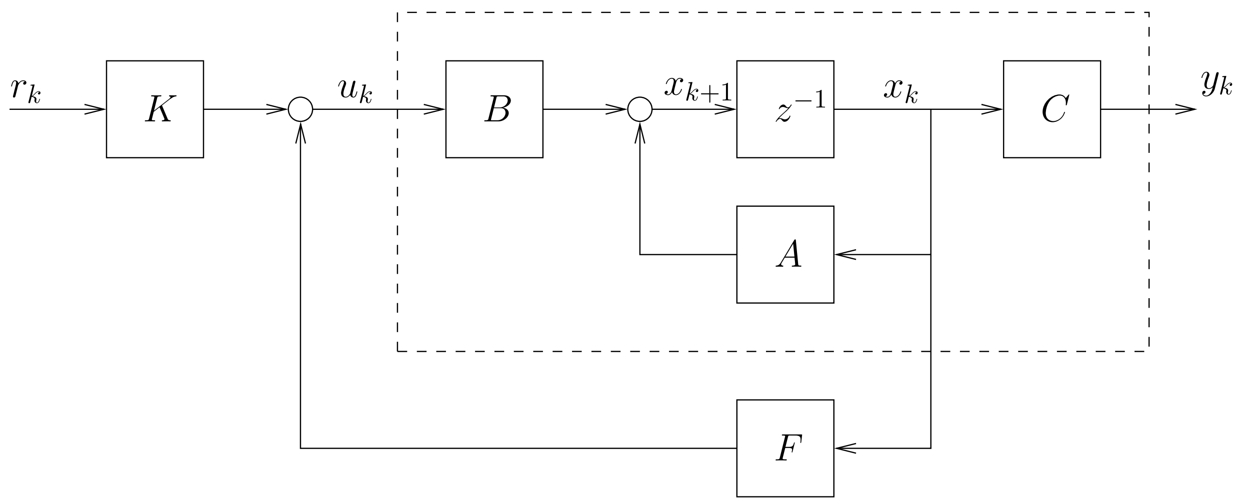
- La soluzione è un caso particolare del problema di allocazione degli autovalori
  - Se il sistema è completamente raggiungibile, il problema ha soluzione sotto forma di retroazione statica dello stato, poiché in questo modo è possibile allocare arbitrariamente gli autovalori ed in particolare renderli asintoticamente stabili
  - Se il sistema non è completamente raggiungibile, il problema ha soluzione purché gli autovalori del sottosistema non raggiungibile siano già asintoticamente stabili

- Un sistema è detto *stabilizzabile* se i suoi autovalori non raggiungibili sono asintoticamente stabili

- Una matrice di retroazione che stabilizza un sistema definito dalle matrici A e B si dice che stabilizza la coppia (A, B)

ALLOCAZIONE AUTOVALORI: SPECIFICHE

- Si possono seguire i criteri usati nella sintesi diretta
- Sistema ad anello chiuso con poli dominanti complessi coniugati con smorzamento e pulsazione naturale corrispondenti alle specifiche di transitorio
- I poli rimanenti possono essere allocati per soddisfare ulteriori specifiche
  - Possono essere posti in zero, in modo che la loro dinamica si esaurisca in un tempo finito, o comunque in posizione stabile non dominante (per requisiti sull'ampiezza dell'ingresso)
- Inseguimento di un riferimento r_k a gradino
  - L'allocazione degli autovalori non tiene conto di eventuali requisiti di inseguimento di segnali a regime!
  - Si effettua una scalatura del riferimento che renda pari a uno il guadagno in continua ad anello chiuso



INSEGUIMENTO DEL RIFERIMENTO

- Legge di retroazione dallo stato modificata

$$u_k = Fx_k + Kr_k$$

- Sistema ad anello chiuso

$$\begin{cases} x_{k+1} &= (A+BF)x_k + BKr_k \\ y_k &= Cx_k \end{cases}$$

- Per un riferimento a gradino unitario, a regime (il sistema ad anello chiuso deve essere asintoticamente stabile!) si ha

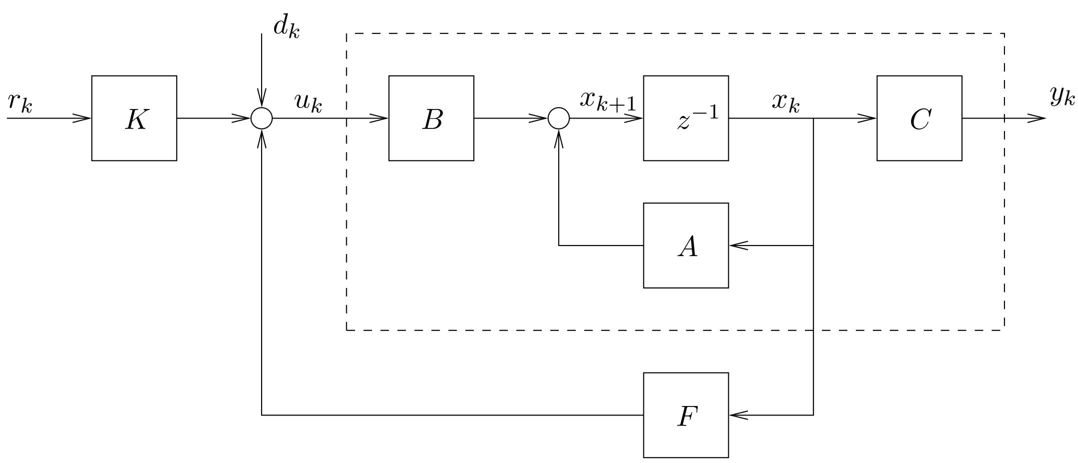
$$\begin{cases} x_\infty &= (A+BF)x_\infty + BK \\ y_\infty &= Cx_\infty \end{cases}$$

- Imponendo $y_\infty = 1$ ed eliminando x_∞ si ottiene

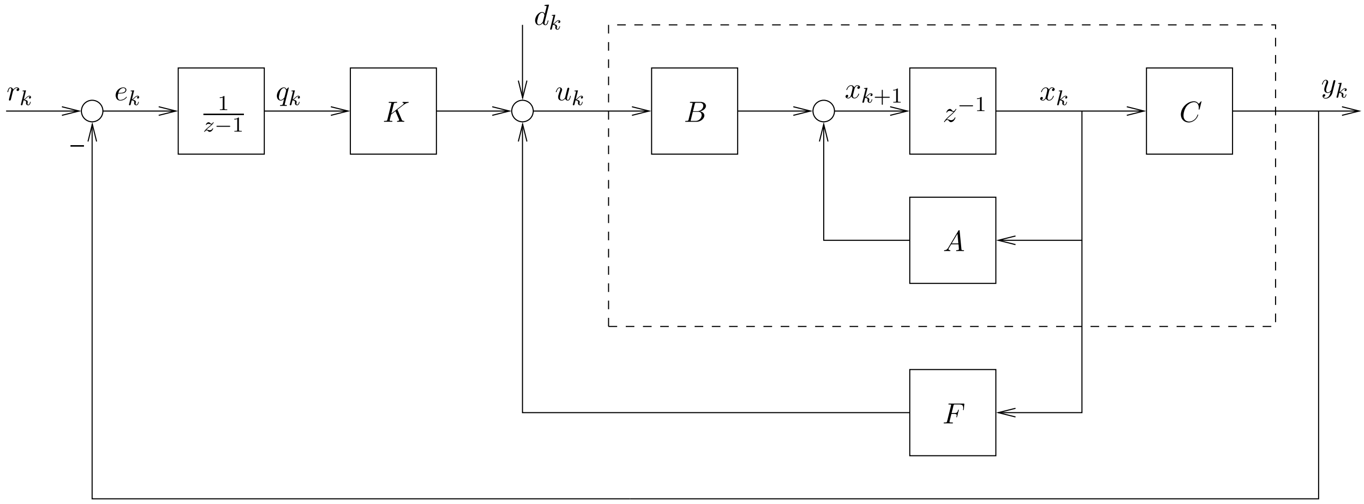
$$K = \frac{1}{C(I-(A+BF))^{-1}B}$$

Nota. $I-(A+BF)$ è invertibile se, come dev'essere, non ci sono autovalori ad anello chiuso in $z=1$

- È un approccio in catena diretta, e pertanto poco robusto nei confronti dell'azione di eventuali disturbi



AZIONE INTEGRALE PER DISTURBO COSTANTE



$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= Ax_k + B(Fx_k + Kq_k + d_k) \\
q_{k+1} &= q_k + e_k \;=\; q_k - y_k + r_k \;=\; q_k - Cx_k + r_k \qquad (*)
\end{aligned}
$$

- Equazioni di stato estese (q_k è una nuova variabile di stato)

$$
\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ q_{k+1} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & K \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_k \\ q_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_k \\ d_k \end{bmatrix}
$$

- Si supponga $d_k = d$ (disturbo costante) e $r_k = r$ (riferimento a gradino). Se si scelgono F e K in modo che la retroazione

$$
\begin{bmatrix} F & K \end{bmatrix} \quad \text{stabilizzi asintoticamente la coppia} \quad \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \right)
$$

allora per $k \to \infty$ tutte le variabili tendono a valori costanti, risulta quindi da $(*)$

$$
q_\infty = q_\infty - y_\infty + r \quad \Rightarrow \quad y_\infty = r
$$

e dunque l'uscita insegue il riferimento rigettando il disturbo