

Lucidi del corso di

# **Controllo digitale**

Corso di Laurea triennale in Ingegneria dell'Automazione

Università di Siena, Facoltà di Ingegneria

Parte VIII

Stima dello stato

Gianni Bianchini

© 2003-2004 - Tutti i diritti riservati. Il presente documento è rilasciato

nei termini di licenze Creative Commons come indicato su

<http://control.dii.unisi.it/giannibi/teaching>

# STIMA DELLO STATO: MOTIVAZIONI

- Abbiamo analizzato il controllo in retroazione dallo stato

$$u_k = Fx_k + v_k$$

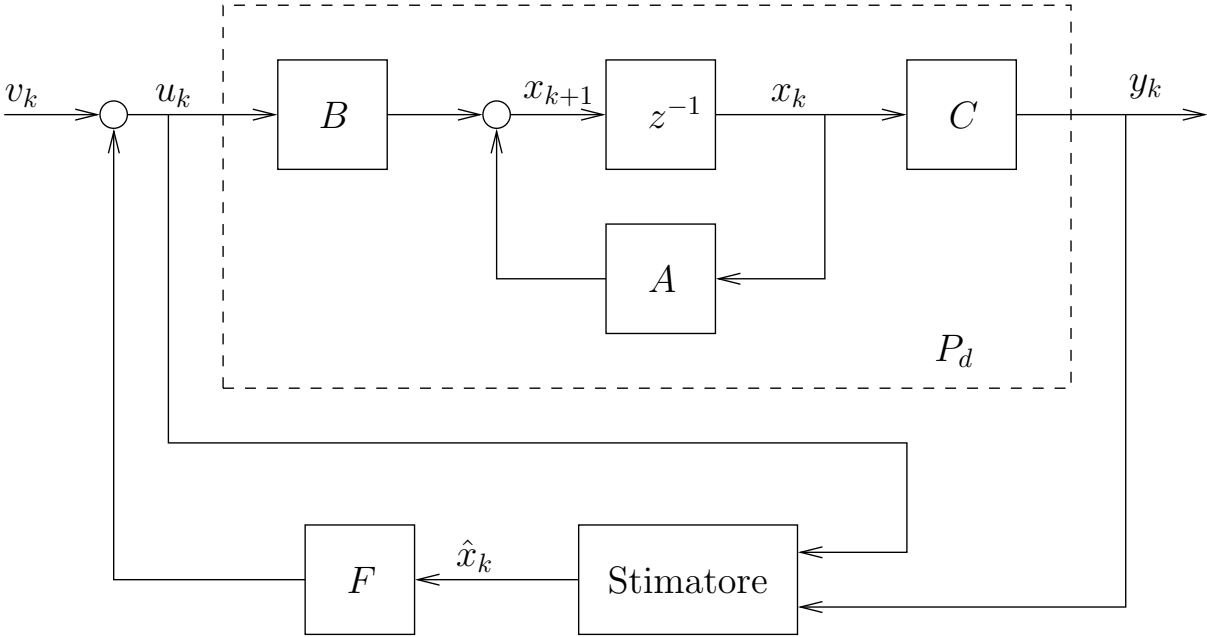
progettato secondo diversi criteri

- Allocazione degli autovalori
- Controllo ottimo LQ

- In generale non sono disponibili misure dell'intero stato, ma solo di opportune variabili dette *accessibili*

**Problema.** Calcolare una stima  $\hat{x}_k$  del valore delle variabili di stato  $x_k$  a partire da misurazioni delle variabili accessibili (ingresso  $u_k$  ed uscita  $y_k$ )

- In questo modo è possibile utilizzare i metodi nello spazio degli stati anche disponendo di informazione limitata!



## OSSERVABILITA'

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k & x_k \in \mathbb{R}^n \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

- Quale informazione sullo stato possiamo ottenere osservando una sequenza di uscite? Esaminiamo l'uscita di un sistema in evoluzione libera

$$y_k = CA^k x_0 \quad k = 0, 1, \dots$$

- Se due stati iniziali  $x_0^1$  e  $x_0^2$  producono la stessa sequenza  $y_k$  per  $k = 0, 1, \dots, K - 1$ , allora non si è in grado di decidere, osservando  $K$  campioni dell'uscita, quale dei due ha generato l'evoluzione del sistema. Questi stati si dicono *indistinguibili nel futuro* in  $K$  passi.
- In particolare, se uno stato  $x_0$  è tale che  $y_0 = y_1 = \dots = y_{K-1} = 0$ , esso è indistinguibile dallo stato nullo e si dice *inosservabile* in  $K$  passi.
- Il vettore dei primi  $K$  campioni di uscita si può esprimere come

$$Y_K = O_K x_0$$

dove

$$Y_K = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{K-1} \end{bmatrix} ; \quad O_K = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{K-1} \end{bmatrix}$$

- Se si riesce a risolvere univocamente questo sistema lineare rispetto a  $x_0$ , allora si è in grado di ricostruire lo stato iniziale a partire dall'osservazione di  $K$  campioni dell'uscita!

## OSSERVABILITA'

$$Y_K = O_K x_0$$

- L'insieme degli stati  $x_0$  inosservabili in  $K$  passi, che producono cioè uscita nulla per  $K$  passi ( $Y_K = [0 \dots 0]'$ ), è quindi dato da

$$\mathcal{O}_K = \ker O_K$$

- Il sottospazio  $\mathcal{O}_K$  è detto *sottospazio inosservabile* in  $K$  passi
- Per il teorema di Hamilton-Cayley

$$\ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^{K-1} \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \forall K > n$$

dunque se uno stato è inosservabile in  $n$  passi lo è anche in qualunque numero di passi  $K > n$ , perciò il sottospazio

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_n = \ker O_n = \ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

rappresenta l'insieme degli stati inosservabili in qualunque numero di passi ed è detto *sottospazio inosservabile*. La matrice  $O = O_n$  è detta *matrice di osservabilità* del sistema

- Il sistema (la coppia  $(A, C)$ ) è detto *completamente osservabile* se

$$\mathcal{O} = \{0\} \Leftrightarrow \text{rank } O = n$$

## OSSERVABILITA'

- Torniamo alla determinazione dello stato iniziale  $x_0$  da osservazioni dell'uscita (uscita scalare)

$$Y_K = O_K x_0$$

- Il problema ha  $n$  incognite, per cui per avere soluzione univoca è necessario che  $K \geq n$ . D'altra parte la matrice  $O_K$  non aumenta di rango per  $K > n$  per cui il problema diviene

$$Y_n = O x_0$$

che ha soluzione univoca se e solo se  $\text{rank } O = n$ , ovvero se e solo se il sistema è completamente osservabile

- Se il sistema non è completamente osservabile, allora ogni stato iniziale  $x_0$  è indistinguibile da un qualunque altro stato della forma  $\hat{x} = x_0 + \bar{x}$  con  $\bar{x} \in \mathcal{O}$ , infatti la sequenza di uscita in  $n$  passi corrispondente a  $\hat{x}$  vale

$$O\hat{x} = O x_0 + O\bar{x} = O x_0$$

e dunque lo stato iniziale è noto a meno di un opportuno stato inosservabile, ovvero se  $\hat{x}$  è una qualunque soluzione di

$$Y_n = O\hat{x}$$

allora lo stato iniziale  $x_0$  è dato da  $\hat{x} - \bar{x}$  dove  $\bar{x}$  è uno stato inosservabile. Quanto valga  $\bar{x}$  non è possibile saperlo da osservazioni dell'uscita, perché ogni stato inosservabile genera tutte uscite nulle.

## RICOSTRUIBILITA'

- Nel problema del controllo, per effettuare la retroazione, si è interessati a stimare istante per istante lo stato *attuale*  $x_n$  del sistema, sulla base dell'osservazione delle uscite, piuttosto che lo stato iniziale  $x_0$ . Per un sistema in evoluzione libera

$$x_n = A^n x_0$$

- Se il sistema è completamente osservabile risulta

$$x_0 = O^{-1} Y_n$$

e dunque

$$x_n = A^n O^{-1} Y_n$$

- Se il sistema non è osservabile, sia  $\hat{x}$  è una soluzione di  $Y_n = O\hat{x}$ . Risulta  $x_0 = \hat{x} - \bar{x}$  dove  $\bar{x}$  è uno stato inosservabile non noto. Dunque

$$x_n = A^n x_0 = A^n \hat{x} - A^n \bar{x}$$

Se però per ogni  $\bar{x} \in \mathcal{O}$  risulta  $A^n \bar{x} = 0$ , i.e.,

$$\mathcal{O} \subseteq \ker A^n$$

allora si ha

$$x_n = A^n \hat{x}$$

e dunque lo stato attuale  $x_n$  è ricostruibile conoscendo solo  $\hat{x}$ , seppure non sia noto  $x_0$ . Se vale la condizione  $\mathcal{O} \subseteq \ker A^n$ , il sistema è detto pertanto *completamente ricostruibile*.

## DUALITA'

- Sia dato il sistema  $\Sigma$  definito dalle matrici  $(A, B, C)$

$$\Sigma = (A, B, C)$$

- Si definisce il sistema *duale*

$$\Sigma^* = (A', C', B')$$

che ha tanti ingressi quante sono le uscite di  $\Sigma$  e tante uscite quanti sono gli ingressi di  $\Sigma$

- Nota. Il duale di  $\Sigma^*$  è  $\Sigma$
- Relazione tra la matrice di osservabilità  $O$  di  $\Sigma$  e la matrice di raggiungibilità  $R^*$  di  $\Sigma^*$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C' & A'C' & \dots & (A')^{n-1}C' \end{bmatrix}' = (R^*)'$$

– Analogamente per  $R$  ed  $O^*$

$$R = (O^*)'$$

– Segue

$\Sigma$  è compl. osservabile  $\Leftrightarrow \Sigma^*$  è compl. raggiungibile

$\Sigma$  è compl. raggiungibile  $\Leftrightarrow \Sigma^*$  è compl. osservabile

## DECOMPOSIZIONE DI OSSERVABILITA'

- Dato  $\Sigma = (A, B, C)$ , si consideri una trasformazione di coordinate nello spazio degli stati definita da una matrice  $T$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \quad ; \quad \tilde{B} = T^{-1}B \quad ; \quad \tilde{C} = CT$$

trasponendo queste matrici si ha

$$\tilde{A}' = T'A'(T')^{-1} \quad ; \quad \tilde{C}' = T'C' \quad ; \quad \tilde{B}' = B'(T')^{-1}$$

e dunque la trasformazione di coordinate in  $\Sigma$  definita da  $T$  induce nel duale  $\Sigma^*$  una trasformazione di coordinate definita da  $T^* = (T')^{-1}$

- Sia  $\Sigma = (A, B, C)$  non completamente osservabile, allora il suo duale  $\Sigma^* = (A', C', B')$  è non completamente raggiungibile ed ammette una trasformazione di coordinate  $T^*$  che lo porta in decomposizione di raggiungibilità

$$\tilde{A}' = \begin{bmatrix} A'_o & A'_{o\bar{o}} \\ 0 & A'_{\bar{o}} \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{C}' = \begin{bmatrix} C'_o \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{B}' = \begin{bmatrix} B'_o & B'_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

- Quindi, mediante la trasformazione di coordinate definita da  $T = (T^*)^{-1}$

$$x_k = T \begin{bmatrix} z_k^o & z_k^{\bar{o}} \end{bmatrix}'$$

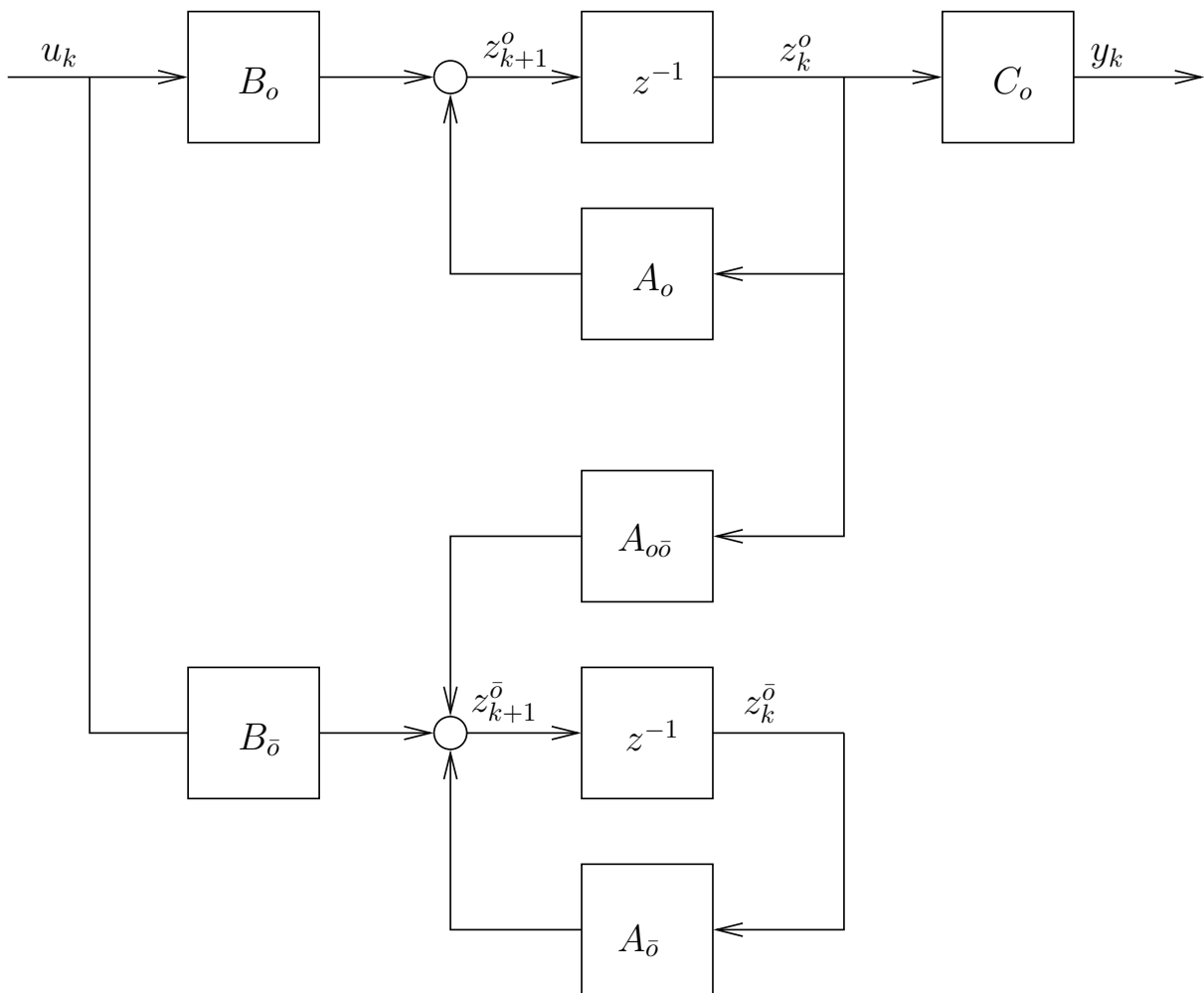
il sistema primale  $\Sigma$  viene portato nella forma

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C_o & 0 \end{bmatrix}$$

Questa forma è detta *decomposizione canonica di osservabilità*

## DECOMPOSIZIONE DI OSSERVABILITA'

- Il sottosistema definito da  $(A_o, B_o, C_o)$  è completamente osservabile e viene detto sottosistema osservabile
- Il sottosistema definito da  $(A_{\bar{o}}, B_{\bar{o}}, 0)$  ha un'evoluzione cui corrispondono uscite tutte nulle e viene pertanto detto sottosistema inosservabile
- Gli autovalori di  $A$  sono dati dall'insieme degli autovalori di  $A_o$  (autovalori osservabili) e di  $A_{\bar{o}}$  (autovalori inosservabili)



- L'ingresso non influisce sulla proprietà di osservabilità, poiché il sottosistema inosservabile ha uscite sempre nulle indipendentemente dall'ingresso

## DECOMPOSIZIONE DI OSSERVABILITA'

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{bmatrix} ; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} ; \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C_o & 0 \end{bmatrix}$$

- La matrice di trasformazione che porta il sistema nella decomposizione di osservabilità è della forma

$$T = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_{n_o} & v_{n_o+1} & \dots & v_n \end{bmatrix}$$

dove  $v_{n_o+1}, \dots, v_n$  è una base del sottospazio inosservabile  $\mathcal{O}$  e  $w_1, \dots, w_{n_o}$  è un suo completamento per ottenere una base di  $\mathbb{R}^n$

- Gli autovalori del sottosistema non osservabile non compaiono tra i poli della funzione di trasferimento  $G(z)$ . Si prova infatti in modo analogo al caso della raggiungibilità che

$$G(z) = C_o(zI - A_o)^{-1}B_o$$

Ricordando anche il risultato sulla decomposizione di raggiungibilità si ricava il seguente

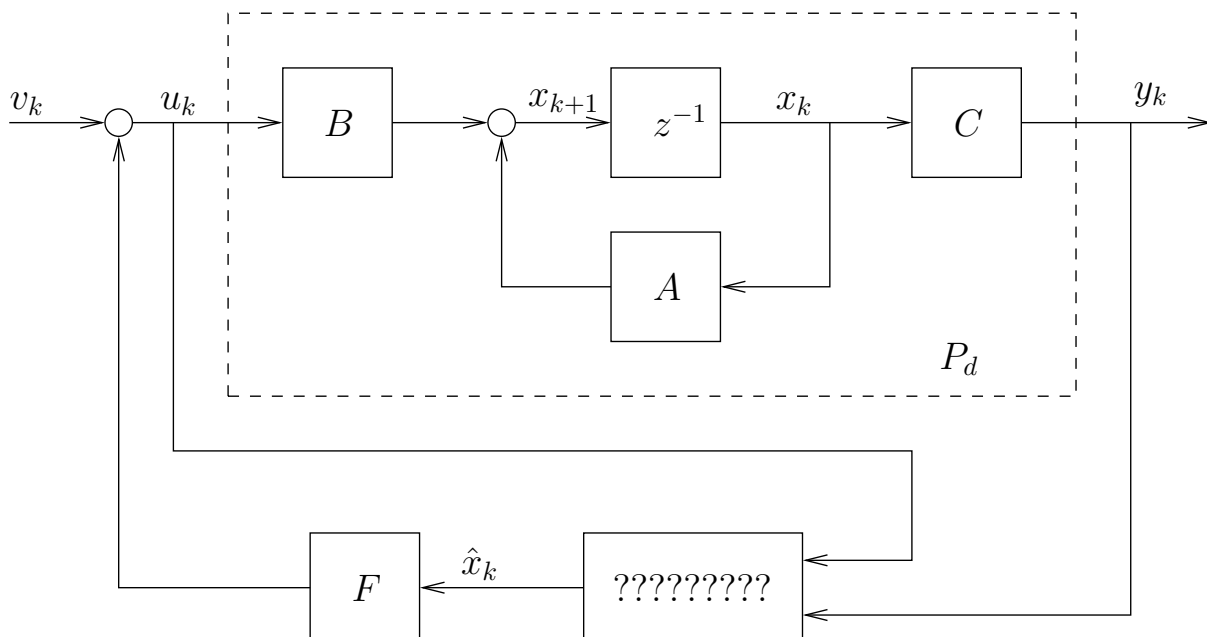
**Teorema.** La funzione di trasferimento  $G(z)$  contiene come poli solo gli autovalori della parte *raggiungibile E osservabile* del sistema

- Il sistema è completamente ricostruibile se e solo se gli autovalori della sua parte non osservabile sono tutti nulli. Questa condizione infatti fa sì che la risposta libera della componente inosservabile dello stato vada a zero dopo  $n$  passi per qualunque condizione iniziale, rendendo quindi noto l'intero stato al passo  $n$  dalla sola conoscenza della parte osservabile.

## RIVELABILITA'

- Un sistema si dice *rivelabile* se la sua parte non osservabile ha tutti autovalori asintoticamente stabili
- La rivelabilità equivale alla possibilità di determinare asintoticamente (non in tempo finito) il valore dello stato attuale da osservazioni dell'uscita. Infatti in tal caso la risposta libera della parte inosservabile dello stato si esaurisce, anche se questo succede solo asintoticamente e non dopo un numero finito di passi
- Un sistema è rivelabile se e solo se il suo duale è stabilizzabile (vedi decomposizione canonica)

**Problema.** Dato un sistema osservabile o almeno rivelabile, determinare un meccanismo per stimare *in linea* il valore dello stato, in modo da poter utilizzare una sua retroazione per controllare il sistema.



## STIMA DELLO STATO

**Idea.** Affiancare al sistema un secondo sistema artificiale, cioè simulato, identico al primo, di cui è ovviamente possibile misurare lo stato

- Sistema reale

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$y_k = Cx_k$$

- Sistema artificiale

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k$$

$$\hat{y}_k = C\hat{x}_k$$

- L'errore di stima è dato da

$$\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k = A^k x_0 - A^k \hat{x}_0 = A^k \tilde{x}_0$$

N.B. L'evoluzione forzata dei due sistemi è identica

- La dinamica dell'errore di stima è determinata dagli autovalori di  $A$

– Se  $A$  è asintoticamente stabile, allora  $\tilde{x}_k$  tende a zero e quindi lo stato stimato  $\hat{x}_k$  tende asintoticamente allo stato  $x_k$

- Se  $A$  non è asintoticamente stabile, questo stimatore non funziona perché l'errore di stima diverge!

- Questo metodo lavora in catena aperta e non tiene conto di alcuna informazione che il sistema può fornire, ovvero della misura dell'uscita  $y_k$

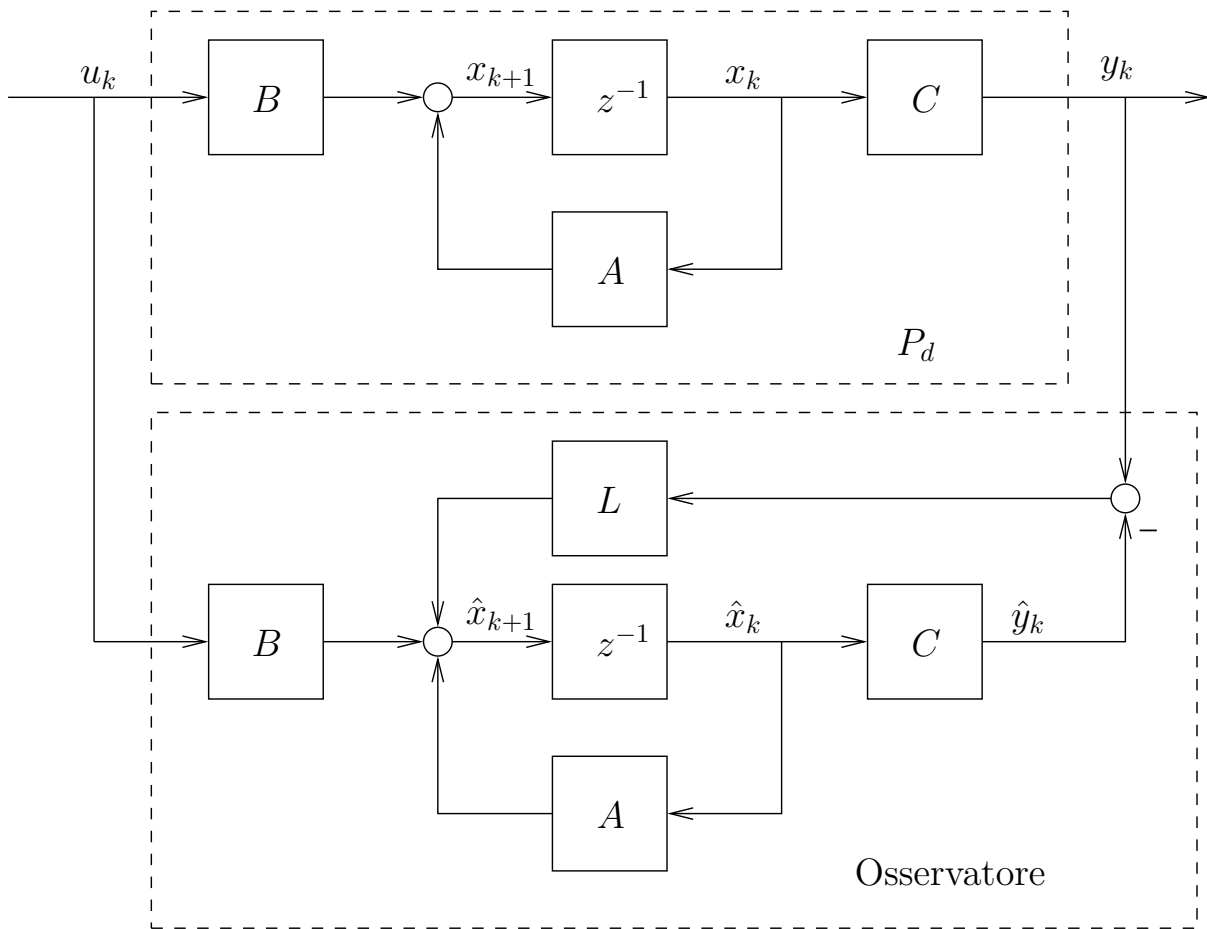
- L'approccio non è robusto, poiché il modello del sistema deve essere conosciuto con estrema precisione, altrimenti la stima non è accurata.

## OSSERVATORE ASINTOTICO

**Idea migliore.** Introdurre nel sistema fittizio un termine di retroazione che sia proporzionale all'errore che lo stimatore sta commettendo rispetto al sistema vero. L'errore può essere valutato solo in termini di uscita, che è l'unica informazione di cui si dispone sul sistema vero

- Stimatore migliorato

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x} + Bu_k + L(y_k - \hat{y}_k)$$



Osservatore di Luenberger

## OSSERVATORE ASINTOTICO

- Dinamica ad anello chiuso

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x} + Bu_k - LC(\hat{x}_k - x_k)$$

- Dinamica dell'errore di stima  $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$

$$\tilde{x}_{k+1} = (A - LC)\tilde{x}_k$$

La dinamica dell'errore di stima non dipende solo da  $A$  ma anche dalla matrice  $L$  che può essere scelta arbitrariamente

- La dinamica duale dell'errore di stima

$$\pi_{k+1} = (A' - C'L')\pi_k$$

ci ricorda molto (troppo) da vicino il problema di allocazione degli autovalori

$$\pi_{k+1} = (A^* - B^*F^*)\pi_k \quad ; \quad A^* = A', \quad B^* = C', \quad F^* = L'$$

- Se la coppia  $(A^*, B^*)$  è raggiungibile, allora è possibile determinare  $F^*$  in modo da posizionare arbitrariamente gli autovalori di  $(A^* - B^*F^*)$
- Per dualità, se la coppia  $(A, C)$  è osservabile, è possibile determinare  $L$  in modo da allocare arbitrariamente gli autovalori di  $(A - LC)$ , ovvero se il sistema è osservabile, l'osservatore fornisce una stima  $\hat{x}_k$  dello stato del sistema  $x_k$  il cui errore  $\tilde{x}_k$  rispetto allo stato reale può essere mandato a zero con dinamica arbitraria scegliendo opportunamente  $L$ !

## OSSERVATORE ASINTOTICO

- Se il sistema non è osservabile ma rivelabile, il suo duale è stabilizzabile, dunque è possibile determinare  $L$  che, pur allocando i soli autovalori osservabili, rende la dinamica dell'osservatore asintoticamente stabile e dunque rende lo stato stimato  $\hat{x}_k$  asintoticamente convergente allo stato vero  $x_k$
- Se il sistema è osservabile, in particolare è possibile allocare tutti gli autovalori dell'osservatore in zero, e quindi lo stato stimato converge in al più  $n$  passi (osservatore *deadbeat*)
- L'osservatore *deadbeat* può essere ottenuto anche nel caso in cui eventuali autovalori inosservabili siano tutti nulli, ovvero nel caso in cui il sistema sia ricostruibile
- Matlab: per sintetizzare  $L$  si usano le stesse funzioni impiegate per l'allocazione degli autovalori (si effettua una allocazione degli autovalori sul sistema duale)

$$- \quad L = \text{place}(A', C', P)'$$

$$- \quad L = \text{acker}(A', C', P)'$$

dove  $P$  è il vettore degli autovalori desiderati dell'osservatore

## PROPRIETA' STRUTTURALI E STABILITA'

- Definizione di *stabilità interna*: tutte le variabili (ovvero lo stato) del sistema hanno evoluzione asintoticamente stabile (la risposta libera nello stato è convergente e la risposta forzata nello stato a qualunque segnale limitato è limitata)
  - Il sistema è internamente stabile se e solo se tutti gli autovalori hanno modulo minore di 1
- Definizione di *stabilità esterna (o ILUL)*: l'evoluzione dell'uscita in corrispondenza ad ingressi limitati è limitata
  - Il sistema è ILUL stabile se e solo se la funzione di trasferimento ha tutti poli con modulo minore di 1
- Abbiamo osservato che la funzione di trasferimento ha come poli tutti e soli gli autovalori raggiungibili e osservabili del sistema
  - Se il sistema è raggiungibile e osservabile allora 1) non ci sono cancellazioni polo-zero nella funzione di trasferimento e 2) la stabilità interna è equivalente alla stabilità ILUL
- Se il sistema è ILUL stabile ma non è raggiungibile e osservabile, vi sono alcune dinamiche dello stato che non compaiono nella funzione di trasferimento. In questo caso il sistema è internamente stabile se e solo se gli autovalori irraggiungibili e quelli inosservabili sono asintoticamente stabili (modulo minore di 1). Se questo non accade, ci sono cancellazioni polo-zero instabili nella funzione di trasferimento.