Lucidi del corso di

Controllo digitale

Corso di Laurea triennale in Ingegneria dell'Automazione

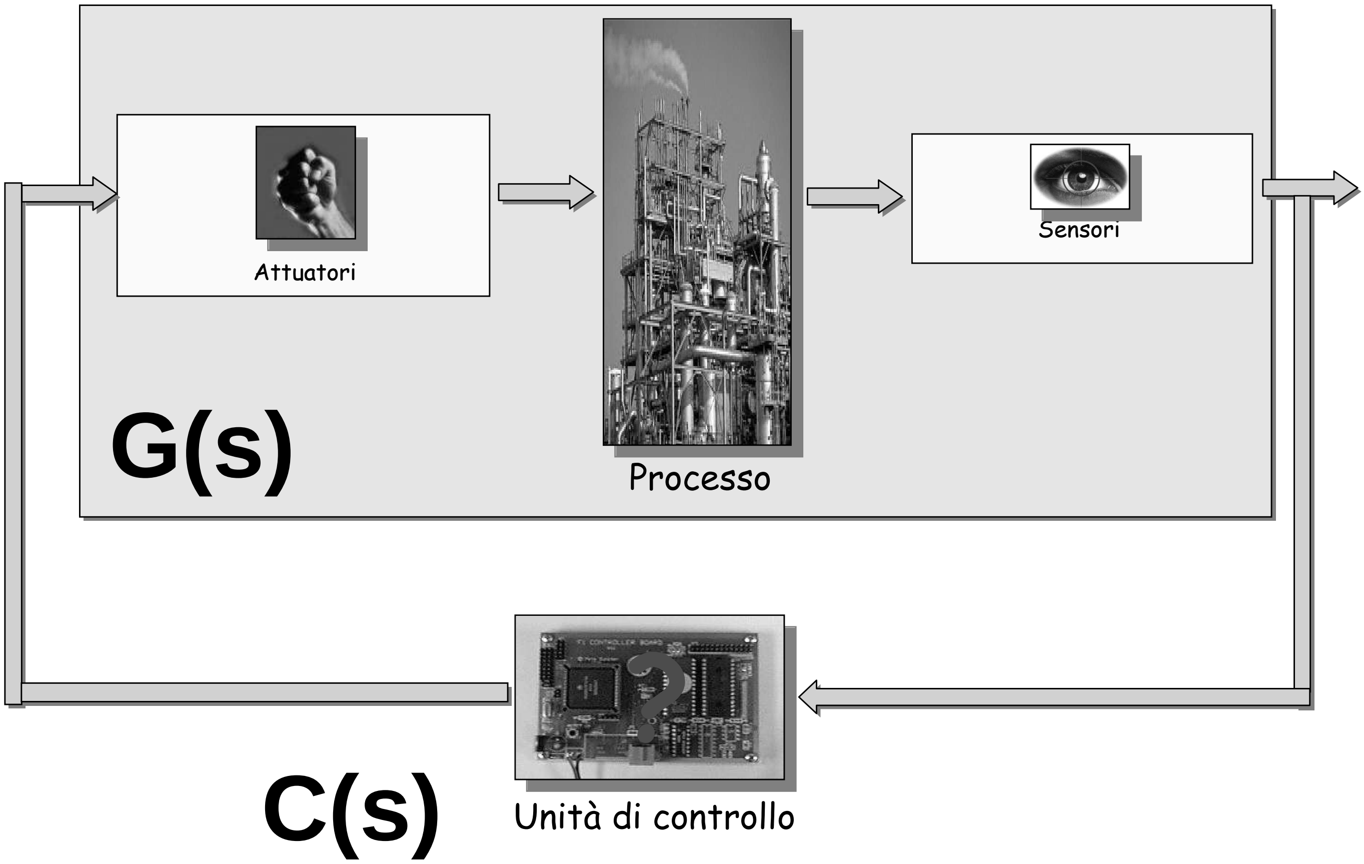
Università di Siena, Facoltà di Ingegneria

Parte I

Introduzione

Gianni Bianchini

SISTEMA DI CONTROLLO ANALOGICO

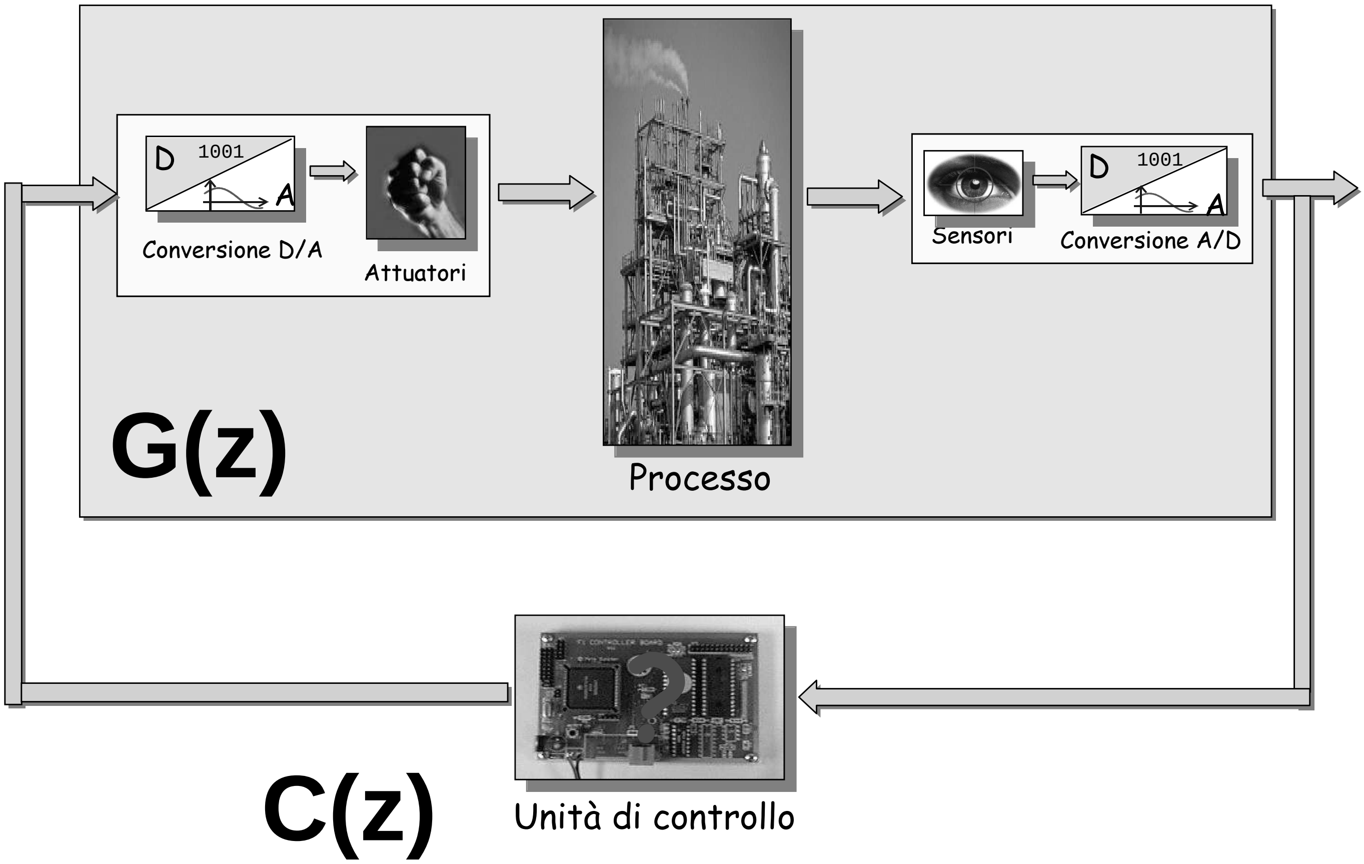


- Il regolatore, i sensori e gli attuatori possono essere costituiti da
  - reti elettriche
  - sistemi meccanici
  - sistemi fluidodinamici
  - ...

  o loro combinazioni. Esistono ad esempio sistemi di controllo realizzati completamente con componenti meccanici.

- I sistemi dinamici in gioco operano a tempo continuo.

SISTEMA DI CONTROLLO DIGITALE



- Il regolatore è costituito da un apparato elettronico numerico
- Il regolatore opera a tempo discreto
- I sensori e gli attuatori sono costituiti da
  - sistemi elettro-meccanici
  - sistemi elettro-fluidodinamici
  - ...

PROGRAMMA DEL CORSO

1. Introduzione
2. Richiami sui sistemi a tempo discreto
3. Campionamento e ricostruzione di segnali
4. Modelli di sistemi a dati campionati
5. Metodi di sintesi ingresso-uscita: per approssimazione e diretti
6. Metodi di sintesi nello spazio degli stati: allocazione degli autovalori, controllo ottimo lineare quadratico (LQ)
7. Stima deterministica dello stato e regolazione output feedback

8. Esercitazioni di simulazione con l'uso di Matlab$^{(TM)}$ e Simulink$^{(TM)}$
9. Esercitazioni su processi fisici

MATERIALE DI RIFERIMENTO

1. **Appunti delle lezioni**

2. M.L. Corradini, G. Orlando: *Controllo digitale di sistemi dinamici*, Franco Angeli, 2005.

3. G.F. Franklin, J.D. Powell, M. Workman: *Digital Control of Dynamic Systems*, 3rd edition, Addison-Wesley Longman

4. K.J. Astrom, B. Wittenmark: *Computer-controlled Systems, Theory and Design*, Prentice-Hall

5. E. Fornasini, G. Marchesini: *Appunti di Teoria dei Sistemi*, Edizioni Libreria Progetto, Padova

6. C. Bonivento, C. Melchiorri, R. Zanasi: *Sistemi di Controllo Digitale*, Progetto Leonardo - Esculapio, Bologna, 1995.

7. P. Bolzern, R. Scattolini, N. Schiavoni: *Fondamenti di Controlli Automatici*, McGraw-Hill Italia, Milano, 1998.

8. G. Guardabassi: *Elementi di Controllo Digitale*, Clup CittaStudi, Milano, 1990.

9. Control Tutorials for Matlab:
`http://www.dii.unisi.it/~control/ctm/index.html`

CONTROLLO DIGITALE VS. CONTROLLO ANALOGICO

Pro

- Realizzazione di algoritmi di controllo sofisticati
- Possibilità di effettuare simulazioni
- Flessibilità ed adattabilità, indipendenza dalla natura dell'impianto
- Possibilità di realizzare molteplici obiettivi di controllo
- Affidabilità, unità di controllo meno soggetta a degrado/usura
- Facilità di trasmissione dell'informazione
- Minori errori di elaborazione e trasmissione

Contro

- Necessità di disporre di modelli a tempo discreto di sistemi intrinsecamente continui
- Progettazione complessa
- Disponibilità di minore informazione, ritardi e stabilizzabilità più difficile
- Architettura complessa
- Uso obbligatorio di apparati elettrici/elettronici

PROBLEMI

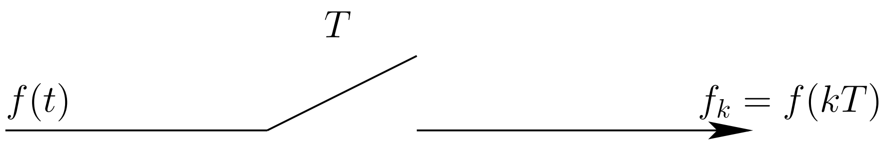
- Interfacciamento del calcolatore digitale al mondo fisico
  - Conversione analogico/digitale e digitale/analogico
  - Accuratezza e temporizzazione
- Determinazione di modelli che rendano ragione del funzionamento di sistemi intrinsecamente continui inseriti in un "ambiente" discreto
- Progetto del software di controllo
  - Progetto del controllore come sistema dinamico a tempo discreto (filtro digitale)
  - Simulazione
- Aspetti realizzativi
  - Scelta dell'hardware di interfacciamento
  - Scelta dell'hardware di controllo e dell'ambiente operativo
    - Sistemi operativi real-time per calcolatori elettronici

CONVERSIONE ANALOGICO/DIGITALE (A/D)

- Interfaccia ambiente fisico → calcolatore digitale
  - Mondo continuo → mondo discreto

- *Campionamento.* Estrazione da un segnale continuo (ad es. elettrico) $f(t)$ di una sequenza $\{f_k\}$ di numeri, elaborabile dal calcolatore, ad intervalli regolari di durata T

$$f(t) \quad \rightarrow \quad f_k = f(kT), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

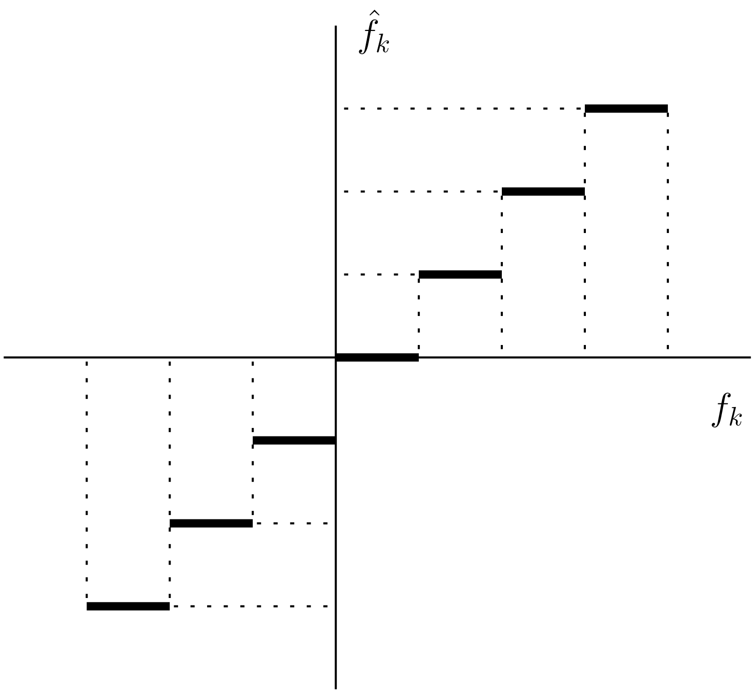


  - La scelta del *periodo di campionamento* T è un fattore critico poiché determina la quantità di informazione presente nella sequenza di campioni
  - Si definiscono la *frequenza* f_s e la *pulsazione* ω_s di campionamento

$$f_s = \frac{1}{T} \quad ; \quad \omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T}$$

CONVERSIONE ANALOGICO/DIGITALE (A/D)

- *Quantizzazione.* Il calcolatore lavora in precisione finita: ogni campione f_k di una data grandezza deve essere convertito in un numero $\hat{f}_k$ rappresentabile in macchina



  - Un intervallo di valori di una grandezza è mappato su un unico valore

- Fattori critici: *formato* (virgola fissa, virgola mobile, intero) e *numero di bit* della rappresentazione dei dati

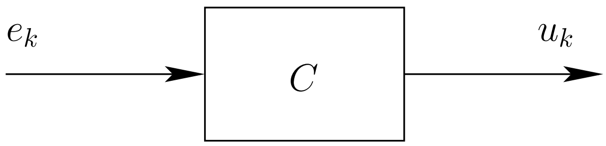
- La quantizzazione non è un'operazione lineare!

- Ogni sistema di controllo digitale, in linea di principio, è un sistema non lineare

- Approccio possibile: ignorare la quantizzazione valutandone gli effetti a posteriori

FILTRI DIGITALI

- Sono costituiti da sistemi dinamici a tempo discreto
- Agiscono su una successione di numeri in ingresso $\{e_k\}$ (corrispondente ad un segnale campionato) elaborando una successione di uscita $\{u_k\}$, eventualmente in modo ricorsivo



$$u_k = \Phi_k(u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots, e_k, e_{k-1}, e_{k-2}, \ldots)$$

dove $\Phi_k(\cdot)$ è una data funzione

- Filtri lineari SISO tempo invarianti: sono descritti da equazioni alle differenze (regressioni) lineari ingresso-uscita a coefficienti costanti

$$u_{k+n} + a_{n-1}u_{k+n-1} + \cdots + a_0 u_k = b_m e_{k+m} + b_{m-1}e_{k+m-1} + \cdots + b_0 e_k$$

- Trasformata zeta di una sequenza f_k

$$\mathcal{Z}[f_k] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$$

  – Applicazione della proprietà del ritardo / anticipo

$$\mathcal{Z}[f_{k-1}] = z^{-1}F(z) \quad ; \quad \mathcal{Z}[f_{k+1}] = z[F(z) - f_0]$$

$$\Downarrow$$

- Rappresentazione del sistema in funzione di trasferimento (relazione ingresso/uscita per condizioni iniziali nulle)

$$C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0}$$

METODI DI PROGETTO

- Con l'uso di rappresentazioni ingresso-uscita (i.e., funzioni di trasferimento)
  - Approssimazione discreta di filtri analogici comunque progettati
  - Progetto in frequenza nel discreto
  - Luogo delle radici nel discreto
  - Sintesi diretta nel discreto
  - ...

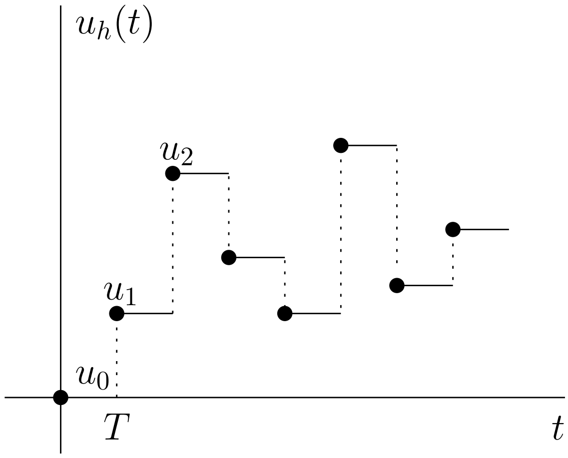
- Con l'uso di rappresentazioni di stato
  - Allocazione degli autovalori
  - Criteri ottimi
  - Controllo predittivo
  - ...

- Nei metodi nello spazio degli stati, se la misura dell'intero stato del sistema non è disponibile, si pone il problema della stima dello stato dalle variabili che si possono misurare

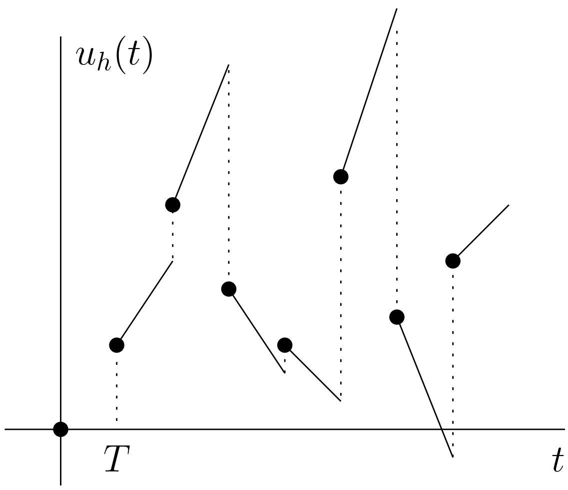
CONVERSIONE DIGITALE/ANALOGICO (D/A)

- Interfaccia calcolatore digitale → ambiente fisico
  - Mondo discreto → mondo continuo
- Generare un segnale a tempo continuo $u_h(t)$ a partire da campioni $\{u_k\}$
  - L'operazione non è univoca
  - L'operazione deve essere causale
- Idea: ricostruttore di ordine zero (*Zero Order Hold*, ZOH)

$$u_h(t) = u_k \quad \forall t \in [kT, (k+1)T)$$



- Ricostruttore di ordine uno (FOH)



UN PRIMO APPROCCIO AL PROGETTO

Idea. Approssimare il comportamento di un controllore analogico, progettato con metodi noti, con un filtro digitale

- Il controllore analogico è un'equazione differenziale ingresso-uscita: l'idea è quella di approssimare il valore dei campioni delle derivate di una certa funzione $f(t)$ utilizzando i campioni f_k (*metodi alle differenze finite*)

- Metodo di Eulero (in avanti)

$$\text{Siano} \quad f_k = f(t)|_{t=kT}\,, \quad \dot{f}_k = \dot{f}(t)\Big|_{t=kT}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{f}_k \approx \frac{f((k+1)T) - f(kT)}{T} = \frac{f_{k+1} - f_k}{T}$$

  (dalla definizione di derivata)

- Trasformando la relazione precedente si ottiene la trasformata zeta della successione dei valori approssimati della derivata

$$\mathcal{Z}[\dot{f}_k] \approx \frac{z-1}{T} F(z)$$

- Esempio: equivalente alle differenze finite di un sistema lineare stazionario a tempo continuo del primo ordine

$$\dot{u}(t) + au(t) = be(t) \quad \leftrightarrow \quad C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{b}{s+a}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{T} + au_k = be_k \quad \leftrightarrow \quad \bar{C}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{bT}{z - 1 + aT}$$

UN PRIMO APPROCCIO AL PROGETTO

- In generale l'operatore s (derivata) nel dominio della trasformata di Laplace, che agisce su un segnale a tempo continuo, è approssimabile con l'operatore
$$\frac{z-1}{T}$$
nel dominio della trasformata zeta che agisce sul corrispondente segnale campionato. In formule,
$$\mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left[sF(s)\right]\big|_{t=kT}\right] \approx \frac{z-1}{T}F(z)$$

- Consideriamo un sistema lineare stazionario a tempo continuo in rappresentazione ingresso-uscita
$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$
  - Equazione differenziale ingresso-uscita equivalente
$$u^{(n)}(t) + a_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 = b_m e^{(m)}(t) + b_{m-1}e^{(m-1)}(t) + \cdots + b_0$$

- Da un sistema a tempo continuo con f.d.t. $C(s)$, si ottiene una sua approssimazione discretizzata $\bar{C}(z)$ mediante la semplice sostituzione
$$s \quad \leftrightarrow \quad \frac{z-1}{T}$$
La f.d.t. discreta $\bar{C}(z)$ agisce sui corrispondenti campionati dei segnali in gioco

- Idea per il progetto: dato il controllore analogico $C(s)$ inserire il suo approssimato discreto $\bar{C}(z)$ nel sistema di controllo digitale

UN PRIMO APPROCCIO AL PROGETTO

Script Matlab `naif.m`

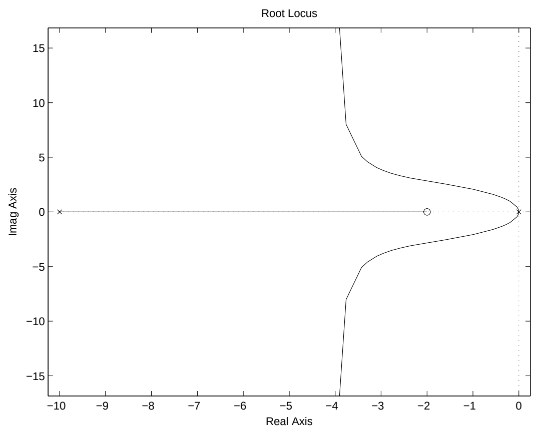
- Impianto

$$P(s) = \frac{1}{s^2}$$

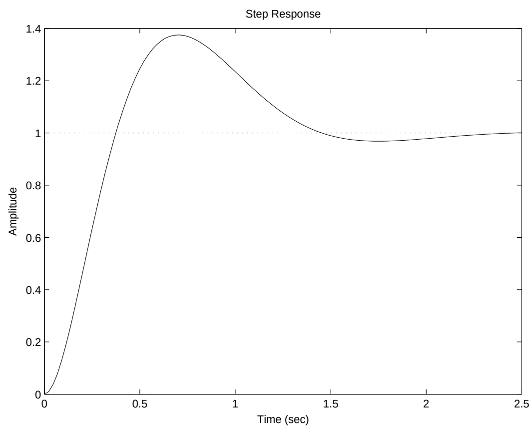
- Controllore stabilizzante: rete anticipatrice

$$C(s) = \frac{K(s+b)}{s+a}, \quad K = 40,\ a = 10,\ b = 2$$

- Luogo delle radici



- Risposta al gradino del sistema di controllo (analogico)

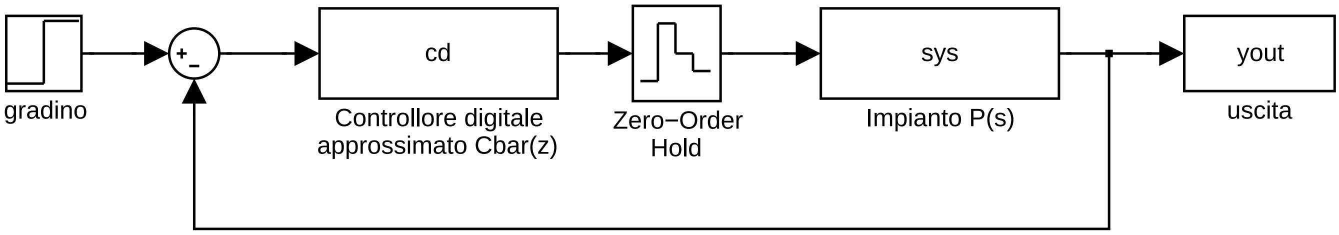


- Parametri caratteristici della risposta

$$t_s = 0.37 \text{ s}, \quad \hat{s} = 0.38, \quad B_3 = 7 \text{ rad/s}, \quad M_r = 3.73 \text{ dB}$$

UN PRIMO APPROCCIO AL PROGETTO

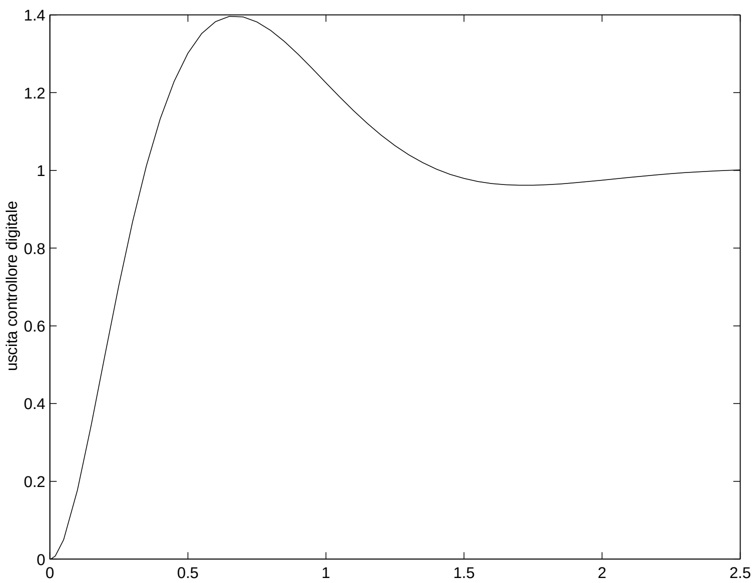
- Sistema di controllo digitale



- Equivalente approssimato del controllore $C(s)$ con il metodo di Eulero in avanti con tempo di campionamento T

$$\bar{C}(z) = \frac{K(z-1+bT)}{z-1+aT}, \quad K = 40,\ a = 10,\ b = 2$$

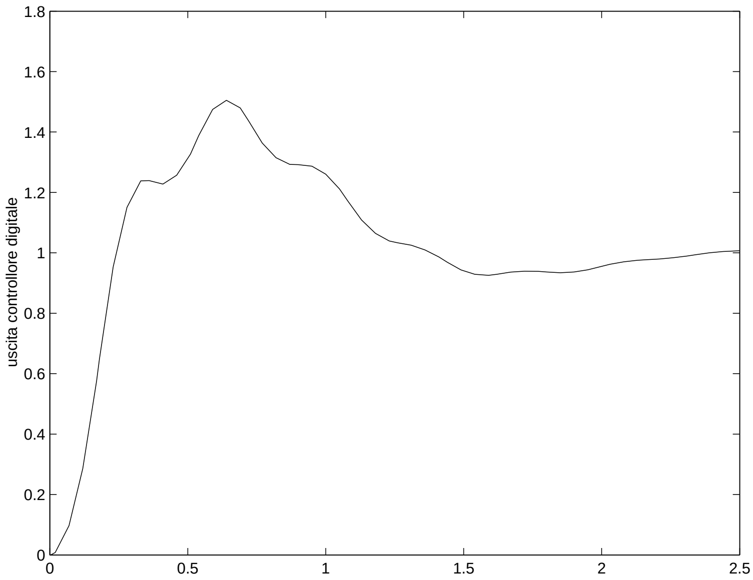
- Risposta al gradino per $T = 0.05$



  - Fedele alla risposta del sistema analogico

UN PRIMO APPROCCIO AL PROGETTO

- Risposta al gradino per $T = 0.18$



  – Compaiono oscillazioni smorzate sovrapposte

- Per $T > 0.2$ il sistema di controllo diviene instabile!

  – La scelta del periodo di campionamento è fondamentale poiché può pregiudicare anche la stabilità del sistema

  – Periodo di campionamento vs. banda del sistema: intuitivamente, più il sistema è rapido nella risposta, più velocemente è necessario campionare i segnali per non perdere fedeltà

  – Il mantenitore di ordine zero (ZOH) introduce un ritardo $\approx T/2$ ed i ritardi influenzano la stabilità in retroazione

ULTERIORI OBIETTIVI

Il controllo digitale presenta, anche dal punto di vista strettamente sistemistico, caratteristiche peculiari non riscontrabili nei sistemi di controllo analogici

- Esempio

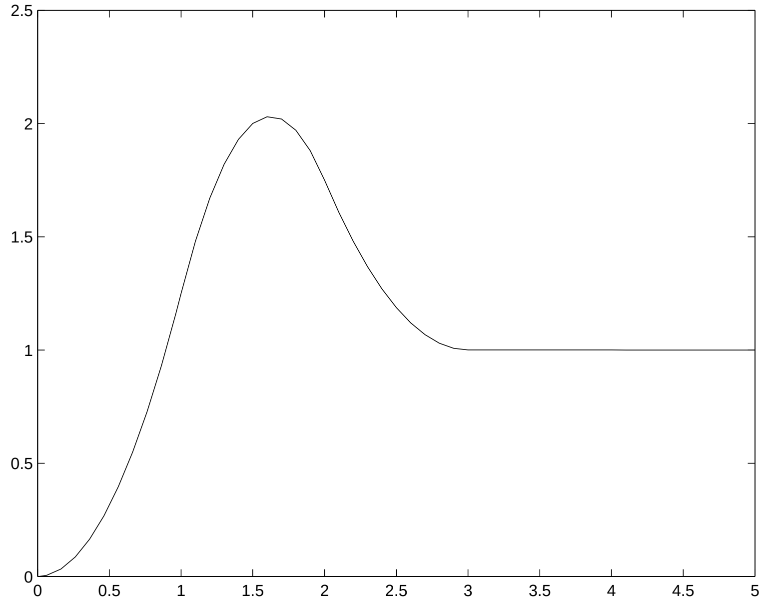
$$\boxed{\text{Modello Simulink } \texttt{magia.mdl}}$$

$$P(s) = \frac{1}{s^2}$$

- Consideriamo il controllore digitale (con periodo di campionamento T)

$$C(z) = \frac{2}{T^2}\,\frac{5z-3}{4z+3}$$

- Risposta al gradino per $T = 1$



- Il sistema è stabile internamente e la sua risposta va a regime in tempo finito: 3 passi di campionamento per qualunque T. Non esistono sistemi lineari a tempo continuo stazionari la cui risposta abbia un transitorio di durata finita!