Lucidi del corso di

Controllo digitale

Corso di Laurea triennale in Ingegneria dell'Automazione

Università di Siena, Facoltà di Ingegneria

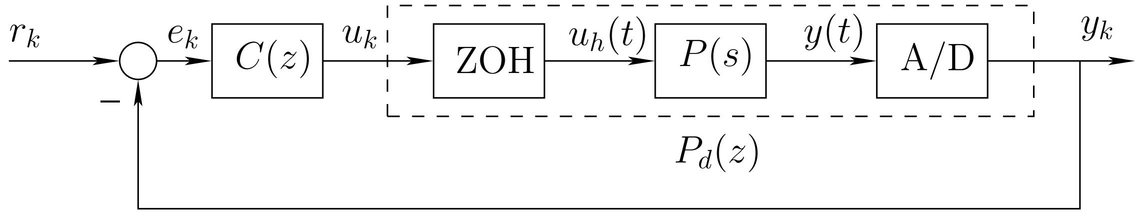
Parte V

Sintesi nel dominio tempo discreto

Gianni Bianchini

SINTESI DIRETTA NEL DISCRETO

Nelle tecniche dirette a tempo discreto, l'obiettivo è imporre un andamento desiderato alla risposta campionata y_k di un sistema di controllo digitale. Si considera pertanto l'equivalente campionato con ZOH dell'impianto



$$P_d(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}\right]$$

Problema della sintesi diretta. Progettare il compensatore digitale $C(z)$ in modo tale che la funzione di trasferimento ad anello chiuso tra il riferimento e l'uscita campionata

$$W(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$$

sia pari ad una data $W_0(z)$ che soddisfa opportune specifiche.

Soluzione. Niente di più semplice...

$$W(z) = \frac{C(z)P_d(z)}{1 + C(z)P_d(z)} = W_0(z)$$

$$\Downarrow$$

$$C(z) = \frac{1}{P_d(z)}\frac{W_0(z)}{1 - W_0(z)}$$

Nota. In questo modo viene impostata la funzione di trasferimento tra il segnale di riferimento r_k e l'uscita campionata y_k. Tuttavia ciò che si ha interesse a controllare è l'uscita analogica fisica $y(t)$, per cui sarà necessario verificare che questa non presenti comportamenti indesiderati in corrispondenza del progetto effettuato.

SINTESI DIRETTA NEL DISCRETO

- Esempio.

$$P(s) = \frac{a}{s+a}$$

  - Equivalente campionato con ZOH

$$P_d(z) = \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$$

  - F.d.T. ad anello chiuso desiderata (ILUL stabile e con guadagno in continua unitario per assicurare l'inseguimento del gradino)

$$W_0(z) = \frac{1-\alpha}{z-\alpha} \quad ; \quad |\alpha| < 1$$

  - Controllore corrispondente

$$C(z) = \frac{1}{P_d(z)} \frac{W_0(z)}{1-W_0(z)} = \frac{(1-\alpha)(z-e^{-aT})}{(1-e^{-aT})(z-1)}$$

  - Guadagno d'anello corrispondente

$$L(z) = \frac{1-\alpha}{z-1}$$

- Si hanno cancellazioni polo-zero tra $C(z)$ e $P_d(z)$. Il controllore cancella del tutto la dinamica dell'impianto e ve ne sostituisce una propria

- Altro esempio. Stesso impianto e F.d.T. ad anello chiuso desiderata

$$W_0(z) = \frac{(1-\alpha)z}{z-\alpha} \quad ; \quad |\alpha| < 1$$

  - Controllore

$$C(z) = \frac{(1-\alpha)z(z-e^{-aT})}{\alpha(1-e^{-aT})(z-1)}$$

  Non causale!

SINTESI DIRETTA: VINCOLI DI PROGETTO

- **Causalità.** Il controllore deve essere causale, i.e., $C(z)$ deve avere il grado del denominatore maggiore o uguale a quello del numeratore
  - Affinché il controllore sia causale, l'eccesso poli-zeri della $W_0(z)$ desiderata deve essere maggiore o uguale a quello di $P_d(z)$, ovvero, la funzione di trasferimento ad anello chiuso desiderata non può presentare un ritardo (discreto) ingresso-uscita inferiore a quello dell'impianto discretizzato. Infatti l'eccesso poli-zeri di $C(z)$ vale

$$n_c - m_c = \partial\text{num}(P_d) + \partial\text{den}(W_0) - (\partial\text{den}(P_d) + \partial\text{num}(W_0))$$

- **Stabilità interna** del sistema di controllo: non devono esistere cancellazioni tra poli e zeri con modulo maggiore o uguale a 1 nel prodotto $C(z)P_d(z)$. Essendo

$$C(z)P_d(z) = \frac{W_0(z)}{1 - W_0(z)}$$

  - ogni zero di $P_d(z)$ con modulo ≥ 1 deve comparire tra gli zeri di $W_0(z)$ in modo che permanga come zero del prodotto $C(z)P_d(z)$
  - ogni polo di $P_d(z)$ con modulo ≥ 1 deve comparire tra gli zeri di $1 - W_0(z)$ in modo che permanga come polo di $C(z)P_d(z)$

- In generale, la sintesi diretta effettua la cancellazione della dinamica dell'impianto per sostituirvene una nuova corrispondente alle specifiche, salvo le cancellazioni esplicitamente impedite, ad esempio per garantire la stabilità interna.

SCELTA DI $W_0(z)$: SPECIFICHE STATICHE

- Specifiche tipiche di **precisione a regime**

  – Errore e^0 di inseguimento al gradino ($r_k = 1_k$) nullo

$$E(z) = (1 - W_0(z))R(z)$$

$$\Downarrow$$

$$e^0 = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{z-1}(1 - W_0(z)) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$W_0(1) = 1$$

  – Errore e^1 di inseguimento alla rampa ($r_k = k\ 1_k$) finito e pari a e_0^1

$$e^1 = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{Tz}{(z-1)^2}(1 - W_0(z)) = e_0^1$$

$$\Downarrow \quad \text{[Applicare Hopital e ricordare che } W_0(1) = 1]$$

$$-T\frac{dW_0(z)}{dz}\bigg|_{z=1} = -T\frac{1}{W_0(z)}\frac{dW_0(z)}{dz}\bigg|_{z=1} = -T\frac{d}{dz}\log W_0(z)\bigg|_{z=1} = e_0^1$$

  Se $W_0(z)$ è espressa nella forma poli-zeri

$$W_0(z) = K\frac{\Pi_{i=1}^m (z - z_i)}{\Pi_{i=1}^n (z - p_i)}$$

  dalla precedente relazione risulta

$$T\left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{1-p_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{1-z_i}\right] = e_0^1$$

  che mette in relazione l'errore di inseguimento alla rampa unitaria con i poli della f.d.t. $W_0(z)$ ad anello chiuso (regola di Truxal).

SCELTA DI $W_0(z)$: TRANSITORIO: PROGETTO DEADBEAT

- Obiettivo. Progettare $W_0(z)$ in modo da soddisfare le specifiche:
  - Errore a regime al gradino nullo
  - L'uscita y_k deve raggiungere il valore di regime in un numero N finito di passi, possibilmente minimo
- Soluzione. Se $P_d(z)$ ha poli e zeri tutti interni al cerchio unitario, si pone

$$W_0(z) = z^{-N}$$

  con N uguale o superiore all'eccesso poli-zeri di $P_d(z)$ (per rispettare la condizione di causalità). In questo modo l'uscita insegue esattamente il riferimento con un ritardo di N passi.
- Controllore corrispondente

$$C(z) = \frac{1}{P_d(z)} \frac{z^{-N}}{1 - z^{-N}}$$

  - N.B. Anche se $P_d(z)$ ha un polo semplice in $z = 1$, $C(z)$ non lo cancella poiché $z = 1$ è uno zero di $1 - W_0(z)$ per qualunque N. In generale $P_d(z)$ può avere poli sul cerchio unitario se questi sono zeri di $1 - z^{-N}$. Si noti che $P_d(z)$ ha tanti poli in $z = 1$ quanti sono i poli in zero di $P(s)$.

SCELTA DI $W_0(z)$: PROGETTO DEADBEAT

- Esempio (file Matlab `dead1.m`)
  - Impianto a tempo continuo

$$P(s) = \frac{e^{-0.2s}}{1+s}$$

  - Equivalente a dati campionati con ZOH, $T = 0.2$ s

$$P_d(z) = \frac{0.1823}{z(z-0.8187)}$$

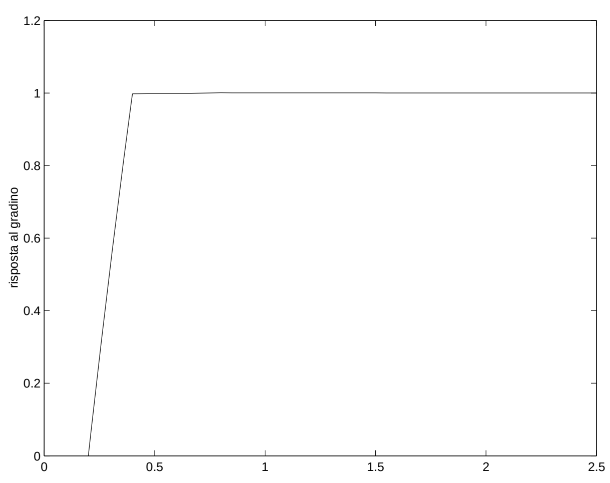
  - Scelta della $W_0(z)$ per deadbeat ($N \geq 2$ per causalità)

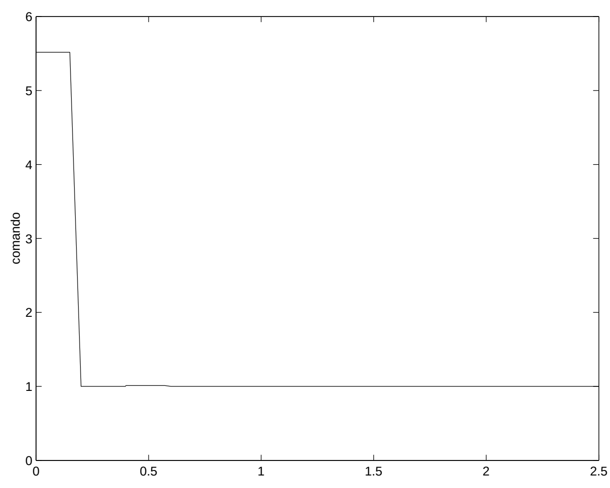
$$W_0(z) = z^{-2}$$

  - Controllore

$$C(z) = \frac{1-0.8187z^{-1}}{0.1813(1-z^{-2})}$$

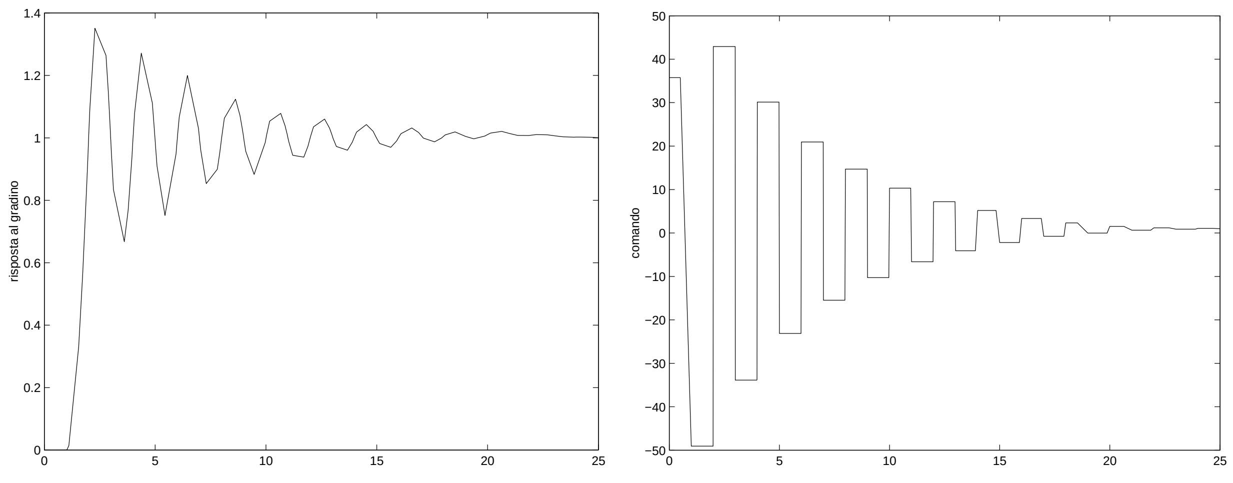
  - Risposta al gradino (uscita e comando)





SCELTA DI $W_0(z)$: PROGETTO DEADBEAT

- Esempio (file Matlab `interper.m`, prima parte)
  - Impianto
$$P(s) = \frac{e^{-s}}{1 + 8s + 15s^2}$$
  - Equivalente campionato con ZOH, $T = 1$ s
$$P_d(z) = \frac{0.028z + 0.0234}{z^3 - 1.5353z^2 + 0.5866z}$$
  - Controllore deadbeat ($N = 2$). [N.B. Lo zero di $P_d(z)$ è stabile]
$$C(z) = \frac{z(z^2 - 1.5353z + 0.5866)}{(z+1)(z-1)(0.028z + 0.0234)}$$
  - Risposta al gradino (uscita e comando)



- Presenza di forti oscillazioni interperiodo nell'uscita analogica
  - Causa: esistono poli del controllore prossimi al punto $z = -1$ che cancellano altrettanti zeri dell'impianto discretizzato ($z_r = -0.8357$). Tali poli compaiono nella f.d.t. tra riferimento e comando e producono un andamento fortemente oscillatorio ("ringing") di questo, indesiderabile anche per la salute degli attuatori

SCELTA DI $W_0(z)$: TRANSITORIO: METODO DI DAHLIN

- Realizza una variante della specifica deadbeat tesa a mitigare i requisiti di ampiezza sul comando. Impone infatti che il sistema vada a regime non in un numero finito di passi ma con una costante di tempo assegnata τ. Si pone

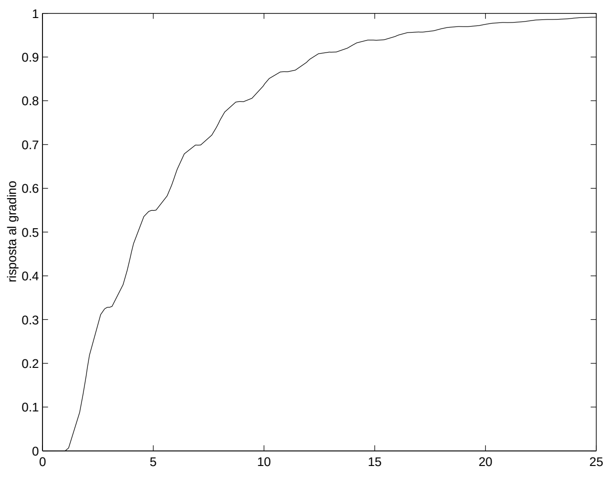
$$W_0(z) = \frac{(1 - e^{-T/\tau})z^{-N}}{1 - e^{-T/\tau}z^{-1}}$$

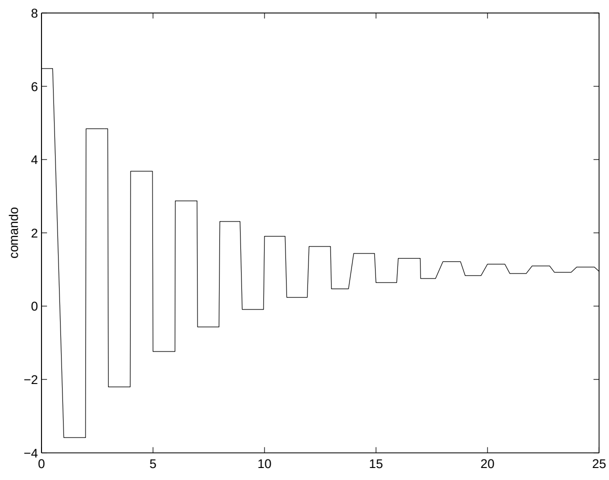
con N uguale o maggiore dell'eccesso poli-zeri di $P_d(z)$.

- Regolatore

$$C(z) = \frac{1}{P_d(z)} \frac{(1 - e^{-T/\tau})z^{-N}}{1 - e^{-T/\tau}z^{-1} - (1 - e^{-T/\tau})z^{-N}}$$

- Esempio precedente (file Matlab `dahlin.m`), $\tau = 5$ s, $T = 1$ s





- In generale, più τ è basso, più il sistema è veloce e gli ingressi ampi.

PROGETTO DEADBEAT, CONTINUAZIONE

- Scelta più generale della $W_0(z)$

$$W_0(z) = w_N z^{-N} + w_{N+1} z^{-N-1} + w_{N+2} z^{-N-2} + \ldots + w_{N+M} z^{-N-M}$$

dove N, che rappresenta l'eccesso poli-zeri di $W_0(z)$, deve essere scelto $\geq$ dell'eccesso poli-zeri di $P_d(z)$. I coefficienti w_i possono essere progettati per soddisfare determinati vincoli, ad esempio la prevenzione di cancellazioni nel caso che $P_d(z)$ abbia poli o zeri instabili o zeri risonanti. Il numero $M+1$ di questi coefficienti deve essere scelto in base al numero di vincoli. La risposta al gradino va a regime dopo $N+M$ passi.

- Esempio (modello Simulink `magia.mdl`)

$$P(s) = \frac{1}{s^2} \qquad \Rightarrow \qquad P_d(z) = \frac{T^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2}$$

- $P_d(z)$ ha uno zero in $z = -1$ e due poli in $z = 1$, per cui si impone

$$W_0(-1) = 0 \; [1] \;\; ; \quad 1 - W_0(1) = 0 \; [2] \;\; ; \quad \frac{d(1-W_0)}{dz}(1) = 0 \; [3]$$

N.B. L'imposizione delle condizioni [2] e [3] "preserva" i poli in $z = 1$ già presenti in $P_d(z)$ che altrimenti il controllore cancellerebbe, compromettendo la specifica di regime e la stabilità interna.

- Scelta di $W_0(z)$: $N = 1$, $M = 2$ (tre vincoli, tre parametri)

$$W_0(z) = w_1 z^{-1} + w_2 z^{-2} + w_3 z^{-3}$$

- Imponendo le tre condizioni si ricava

$$w_1 = \frac{5}{4} \quad ; \quad w_2 = \frac{1}{2} \quad ; \quad w_3 = -\frac{3}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$C(z) = \frac{1}{P_d(z)} \frac{W_0(z)}{1 - W_0(z)} = \frac{2}{T^2} \frac{5z-3}{4z+3}$$

PROGETTO DEADBEAT: CONTINUAZIONE

- Esempio (file Matlab `interper.m`, seconda parte)
- Impianto

$$P(s) = \frac{e^{-s}}{1 + 8s + 15s^2}$$

- Equivalente campionato con ZOH, $T = 1$ s

$$P_d(z) = \frac{0.028z + 0.0234}{z^3 - 1.5353z^2 + 0.5866z}$$

- Inclusione dello zero risonante $z_r = -0.8371$ dell'impianto in $W_0(z)$: scelta di $W_0(z)$

$$W_0(z) = w_2 z^{-2} + w_3 z^{-3}$$

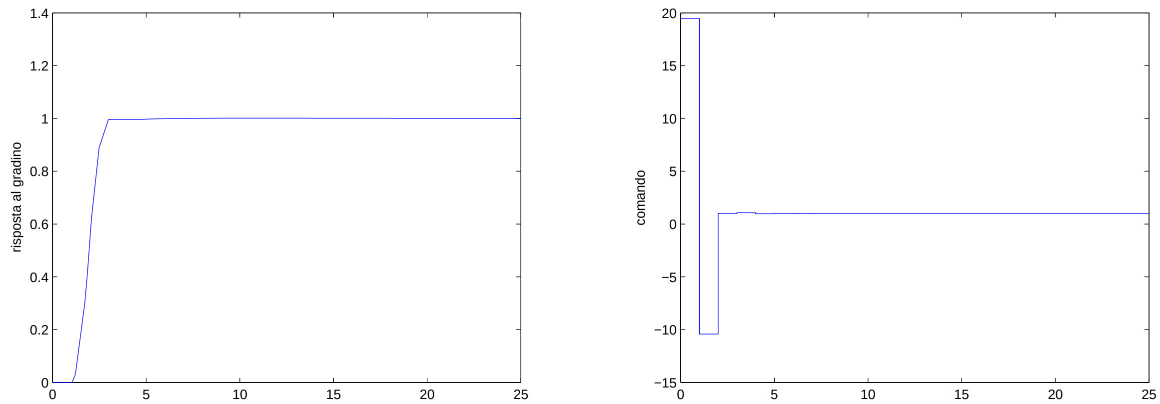
- Vincoli

$$W_0(z_r) = 0, \quad W_0(1) = 1$$

- $W_0(z)$ risultante

$$W_0(z) = \frac{0.5443(z + 0.8371)}{z^3}$$

- Risposta al gradino (uscita e comando)



SCELTA DI $W_0(z)$: TRANSITORIO: SINTESI NEL PIANO Z

Obiettivo: scegliere $W_0(z)$ in modo da imporre le specifiche tipiche sulla risposta al gradino del sistema ad anello chiuso (sovraelongazione, tempo di salita, tempo di assestamento,...)

Idea 1. Imporre che la risposta y_k al gradino del sistema ad anello chiuso sia la versione campionata di una risposta continua che soddisfa le specifiche, ad esempio quella di un sistema $W(s)$ del secondo ordine

$$Y(z) = W_0(z)\ \frac{z}{z-1} = \mathcal{Z}\left[W(s)\ \frac{1}{s}\right] \quad ; \quad W(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta/\omega_n\ s + s^2/\omega_n^2}$$

da cui si ricava che $W_0(z)$ si calcola come l'equivalente con ZOH di $W(s)$. Non sempre è praticabile per i vincoli di causalità, presenza di poli o zeri instabili nell'impianto, specifiche statiche (es. errore alla rampa).

Idea 2. Imporre che le dinamiche dominanti della risposta al gradino siano la versione campionata di quelle della risposta continua desiderata. Ciò equivale a richiedere che i poli dominanti di $W_0(z)$ siano il corrispondente secondo $z = e^{sT}$ di una coppia di poli che nel continuo danno una risposta con le caratteristiche transitorie desiderate.

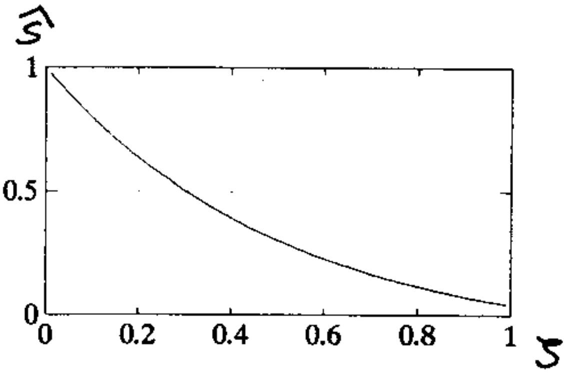
1. Determinare il valore (ad es. ζ e ω_n) dei poli dominanti a tempo continuo corrispondenti alle specifiche richieste

2. Selezionare una $W_0(z)$ che abbia come poli dominanti i corrispondenti secondo la mappa $z = e^{sT}$ ed ulteriori poli o zeri scelti in modo da rispettare altri vincoli come la causalità, la stabilità interna o la precisione a regime, ad es. utilizzando la regola di Truxal

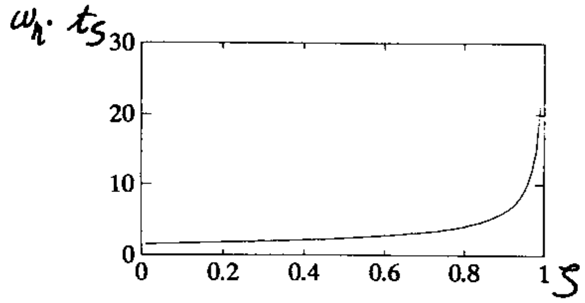
SINTESI NEL PIANO Z

- Specifiche di transitorio vs. posizione dei poli dominanti (file Matlab `smorzamento.m`)

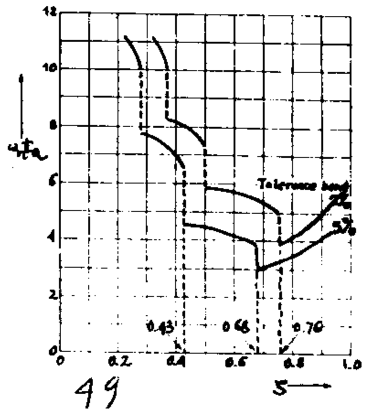
  - Massima sovraelongazione $\hat{s} = \exp(-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})$



  - Tempo di salita $t_s = \omega_n^{-1}[1-\zeta^2]^{-1/2}[\pi - \arctan \zeta^{-1}\sqrt{1-\zeta^2}]$

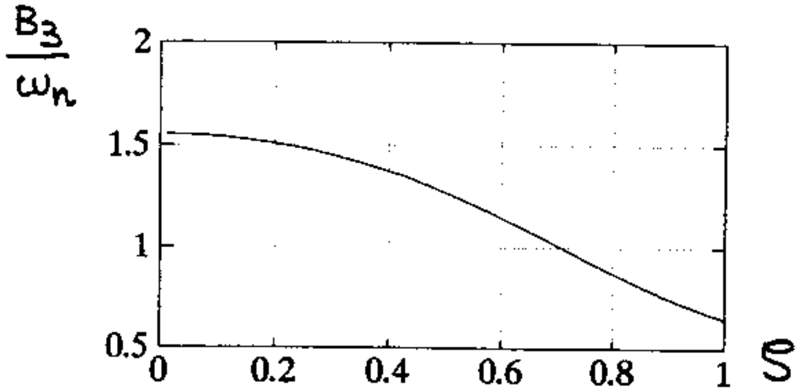


  - Tempo di assestamento

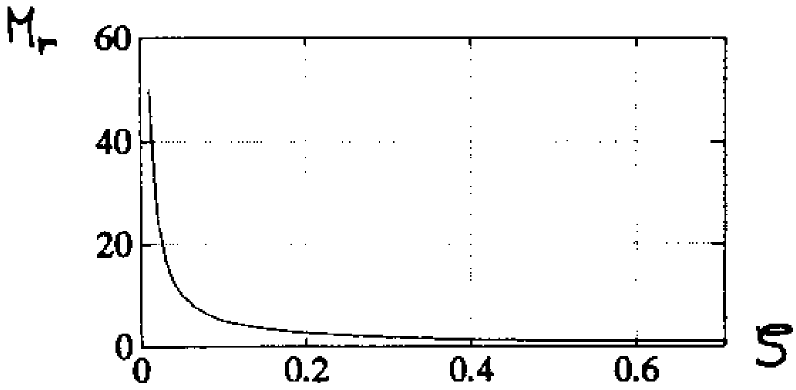


SINTESI NEL PIANO Z

- Specifiche in frequenza vs. posizione dei poli dominanti
  - Banda passante



  - Picco di risonanza



SINTESI NEL PIANO Z: ESEMPI DI SPECIFICHE

- Specifica sullo smorzamento (sovraelongazione $\hat{s} < \hat{s}_1$)

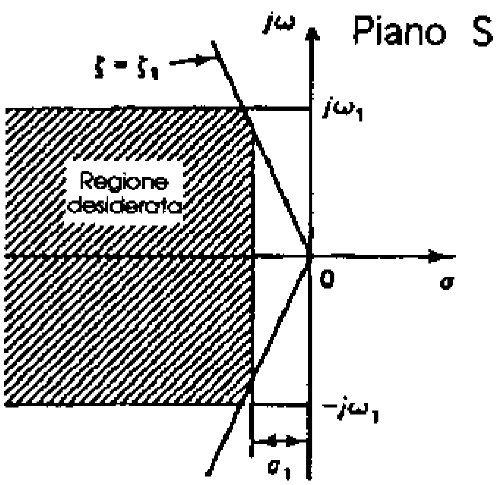
$$\zeta > \zeta_1$$

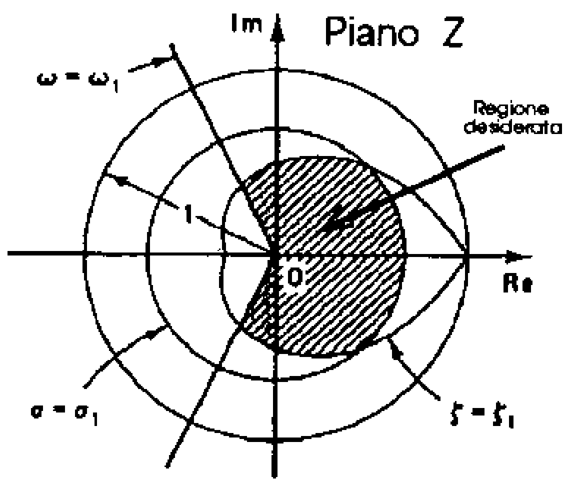
- Specifica sulla parte immaginaria dei poli dominanti (sensibilità ai disturbi ad alta frequenza)

$$\omega < \omega_1$$

- Specifica sulla parte reale dei poli dominanti
(tempo di assestamento $t_a \approx 5/\sigma$)

$$-\sigma < -\sigma_1$$





SINTESI NEL PIANO Z

- Esempio (file Matlab `diretta.m`)

$$P(s) = \frac{0.1}{s(s+0.1)}$$

- Specifiche
  - Errore di inseguimento al gradino nullo
  - Errore di inseguimento alla rampa unitaria $e^1 \leq e_0^1 = 1$
  - Tempo di salita $t_s \leq 1.5$ s
  - Massima sovraelongazione $\hat{s} \leq 0.4$.
- Equivalente campionato con ZOH e $T = 1$ s

$$P_d(z) = \frac{0.04837(z+0.9672)}{(z-1)(z-0.9048)}$$

  - Occhio allo zero di $P_d(z)$, molto vicino al punto $z = -1$
- Dalle specifiche dinamiche si può assumere $\zeta = 0.5$, $\omega_n = 1$
  - Polinomio caratteristico an. chiuso continuo: $s^2 + s + 1$
  - Polinomio caratteristico an. chiuso discreto: $z^2 - 0.7859z + 0.3679$
- Scelta di $W_0(z)$ (eccesso poli-zeri $\geq$ di quello di $P_d(z)$)

$$W_0(z) = K\frac{z - z_1}{z^2 - 0.7859z + 0.3679}$$

  - z_1 si calcola imponendo l'errore alla rampa con la regola di Truxal: $z_1 = 0.0793$
  - K si calcola imponendo guadagno in continua unitario: $K = 0.6321$

SINTESI NEL PIANO Z

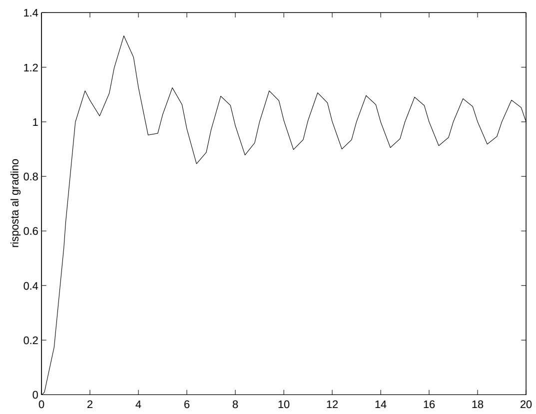
- Funzione di trasferimento ad anello chiuso desiderata

$$W_0(z) = 0.6321 \frac{z - 0.0793}{z^2 - 0.7859z + 0.3679}$$

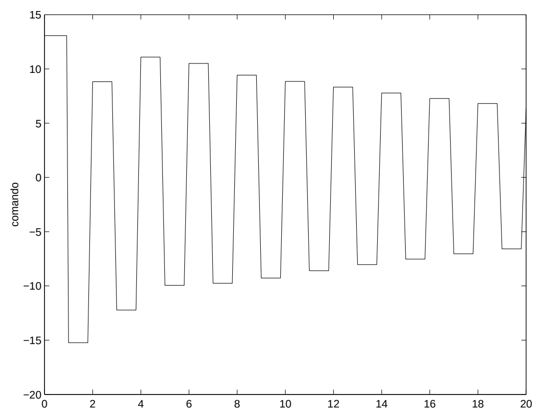
- Controllore

$$C(z) = \frac{1}{P_d(z)} \frac{W_0(z)}{1 - W_0(z)} = 13.068 \frac{(z - 0.9048)(z - 0.0793)}{(z + 0.9672)(z - 0.4180)}$$

- Risposta al gradino nell'uscita



- Risposta al gradino nel comando



- Forti oscillazioni dovute al polo risonante di $C(z)$ che cancella lo zero dell'impianto

SINTESI NEL PIANO Z

- Per eliminare le oscillazioni, si può includere il polo risonante tra gli zeri di $W_0(z)$, in modo che non compaia più in $C(z)$

$$W_0(z) = K \frac{(z + 0.9672z)(z - z_1)}{z(z^2 - 0.7859z + 0.3679)}$$

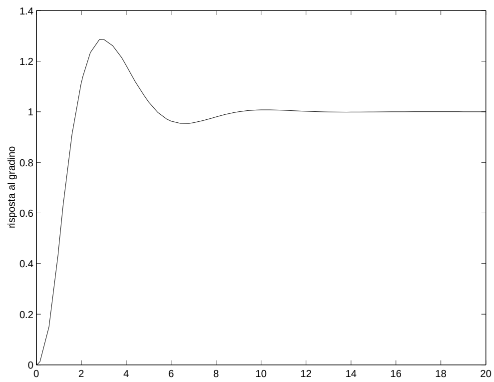
  - È necessaria l'inclusione di un polo in $z = 0$, che introduce una dinamica rapida (un passo di ritardo), per preservare la causalità
  - Nuovo calcolo di z_1 e K sulla base delle specifiche statiche

$$W_0(z) = 0.4668 \frac{(z + 0.9672z)(z - 0.3662)}{z(z^2 - 0.7859z + 0.3679)}$$

- Controllore

$$C(z) = 9.6495 \frac{(z - 0.9048)(z - 0.3662)}{(z - 0.5521)(z - 0.2994)}$$

- Risposta al gradino nell'uscita



- Risposta al gradino nel comando