

Lucidi del corso di

Controllo digitale

Corso di Laurea triennale in Ingegneria dell'Automazione

Università di Siena, Facoltà di Ingegneria

Parte VIII

Elementi di controllo ottimo

Gianni Bianchini

© 2003-2005 - Il presente documento è rilasciato nei termini di licenze

Creative Commons come indicato su

<http://control.dii.unisi.it/giannibi/teaching>

UN APPROCCIO ALTERNATIVO

- Metodi classici di sintesi
 - Criteri empirici
 - Scelta di poli dominanti/autovalori sulla base di proprietà temporali o frequenziali (allocazione degli autovalori, sintesi diretta)
 - Impostazione della risposta in frequenza sulla base di (presunte) relazioni con la risposta nel tempo (sintesi per tentativi)
- Metodi moderni
 - Caratterizzazione delle specifiche in termini di norme di segnali
- Controllo ottimo
 - Il controllo da applicare è quello che rende minimo (o massimo) un opportuno funzionale detto *indice di costo* (o *di prestazione*)
 - L'indice usualmente tiene conto della necessità di soddisfare obiettivi contrastanti tra loro, ciascuno dei quali *pesa* in maniera opportuna nel funzionale
 - Il calcolo del controllo presuppone la risoluzione di un problema di ottimizzazione
 - In molti casi, la soluzione ottima si presenta sotto forma di retroazione dello stato

CONTROLLO OTTIMO: OBIETTIVI

- Valutazioni di tipo energetico: raggiungere un obiettivo assegnato impiegando in modo ottimale la risorsa disponibile
 - Strategia ottimale di guida per spostare un veicolo da A a B lungo un percorso con caratteristiche assegnate, minimizzando il consumo di carburante
- Valutazioni di tipo economico (costi/benefici), biologico, ecologico, sociale
 - Gestione di una risorsa naturale (pesca, boschi): profitto economico dovuto allo sfruttamento vs. sopravvivenza della specie
- Indici temporali: raggiungere un dato obiettivo in tempo minimo
- Che cosa c'è di diverso rispetto a quanto visto a ricerca operativa?
 - La dinamica!
 - Le equazioni del sistema funzionano da vincoli per il problema di ottimizzazione
 - L'incognita è di solito rappresentata dalla sequenza di ingressi da applicare in un dato intervallo di tempo, eventualmente infinito

CONTROLLO OTTIMO: FORMULAZIONE

- Sistema dinamico lineare tempo invariante tempo discreto

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k & ; \quad x \in \mathbb{R}^n \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

(il sistema è eventualmente un modello discretizzato)

- **Problema.** Assegnati il sistema, una condizione iniziale x_0 ed un orizzonte temporale $0, 1, \dots, K$, determinare la sequenza d'ingresso

$$U_K = [u_{K-1} \ u_{K-2} \ \dots \ u_0]'$$

che applicata al sistema genera un'evoluzione tale da rendere minimo un opportuno indice di costo

$$J(U_K, x_0)$$

Nota. Il valore dell'indice, fissato K , dipende solo dalla condizione iniziale e dalla sequenza d'ingresso, poiché l'evoluzione del sistema è deterministica

- Il controllo a energia minima è un problema di controllo ottimo

$$\min_{U_K} J(U_K, x_0)$$

$$\bar{x} - A^K x_0 = R_K U_K$$

dove

$$J(U_K, x_0) = \sum_{k=0}^{K-1} u_k^2$$

CONTROLLO OTTIMO LINEARE QUADRATICO (LQ)

- Ricordiamo che una matrice quadrata M è detta definita positiva ($M > 0$) [o, rispettivamente, semidefinita positiva ($M \geq 0$)] se

$$x'Mx > 0 \quad [x'Mx \geq 0] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

- Formulazione del problema di controllo ottimo LQ: dato un sistema lineare tempo invariante tempo discreto, la condizione iniziale x_0 ed un orizzonte temporale $0, 1, \dots, K$, determinare la sequenza di ingressi U_K che minimizza il costo

$$J(U_K, x_0) = \sum_{k=0}^{K-1} [\tilde{x}'_k Q \tilde{x}_k + u'_k R u_k] + \tilde{x}'_K Q_K \tilde{x}_K$$

dove

- $\tilde{x}_k = x_k - \bar{x}$ rappresenta al passo k la deviazione dello stato da un dato stato obiettivo \bar{x}
- $Q \geq 0$, $R > 0$, $Q_K \geq 0$ sono matrici simmetriche che fungono da pesi e codificano le specifiche di progetto
- il termine $\tilde{x}'_k Q \tilde{x}_k$ pesa istante per istante la deviazione dall'obiettivo
- il termine $u'_k R u_k$ pesa l'intensità (potenza) dell'azione di controllo al generico istante
- il termine $\tilde{x}'_K Q_K \tilde{x}_K$ pesa in modo separato l'errore all'istante finale (che determina l'esito dell'azione di controllo) ed è quindi detto costo terminale

PROGRAMMAZIONE DINAMICA

Problema. Arrivando in una città in tarda serata, cercare il posto più economico dove mangiare prima che si faccia troppo tardi e si venga chiusi fuori da qualunque locale.

- Si sa che il prezzo medio di una cena in un ristorante della città varia da 10 a 40 euro
- Il tempo a disposizione ci dà la possibilità di visitare al più K locali
- Arrivati al locale k ($k = 1, 2, \dots, K$) si guarda il prezzo V_k e si deve decidere se entrare o continuare a cercare
- Qual è la strategia ottimale di scelta?

Soluzione. Osserviamo che

- Al passo 1 è molto difficile decidere, poiché si sa poco su che cosa potremmo trovare successivamente se rifiutiamo
- Al passo K dobbiamo per forza accettare, altrimenti si resta senza cena



L'idea è quella di approcciare il problema a ritroso, esaminando gli effetti delle possibili decisioni al passo K (se supponiamo di arrivarci) e successivamente al passo $K - 1$, $K - 2$, e così via

La formalizzazione matematica di questo procedimento è la cosiddetta *programmazione dinamica* (R. Bellman)

PROGRAMMAZIONE DINAMICA

Problema del ristorante

- Se si arriva a visitare il locale K dobbiamo entrare e pagare V_K
- Se visitiamo il locale $K - 1$, conosciamo la spesa V_{K-1} e una stima di quanto ci si aspetta di spendere se si attende ancora. La migliore stima possibile del prezzo V_K è il prezzo medio, cioè 25 euro. Dunque
 - Se $V_{K-1} \leq 25$, entra nel locale $K - 1$, altrimenti tenta con K
- Visitando il locale $K - 2$, dobbiamo scegliere tra V_{K-2} ed una stima di V_{K-1} che, alla luce della strategia che eventualmente seguiremo al passo $K - 1$, sarà necessariamente tra 10 e 25, in media 17.5. Quindi
 - Se $V_{K-2} \leq 17.5$, entra in $K - 2$, altrimenti tenta con $K - 1$
- Procedendo in questo modo, i valori critici per la scelta sono

...	$K - 4$	$K - 3$	$K - 2$	$K - 1$	K
...	10.9375	11.875	13.75	17.5	25

- Nella programmazione dinamica, la soluzione di problemi di dimensione più piccola è contenuta in quella di problemi di dimensione più grande
- Se conosco la soluzione in K passi del problema e considero la soluzione in $M > K$ passi, gli ultimi K passi della strategia ottima in M passi sono esattamente i K passi ottimi della soluzione in K passi

$K = 4$	1	2	3	4											
	11.875	13.75	17.5	25											
$K = 5$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">3</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">4</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">5</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">10.9375</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">11.875</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">13.75</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">17.5</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">25</td> </tr> </table>					1	2	3	4	5	10.9375	11.875	13.75	17.5	25
1	2	3	4	5											
10.9375	11.875	13.75	17.5	25											

SOLUZIONE LQ VIA PROGRAMMAZIONE DINAMICA

- Per semplicità, si supponga di voler regolare a zero ($\bar{x} = 0$) lo stato in K passi con costo ottimo

$$V_0(x_0) = \min_{U_K} J(U_K, x_0) = \min_{U_K} \sum_{k=0}^{K-1} [x'_k Q x_k + u'_k R u_k] + x'_K Q_K x_K$$

- Si supponga di voler risolvere il problema su un orizzonte di zero passi partendo dallo stato iniziale x_K . Non si ha possibilità di scelta sull'ingresso e l'ottimo vale banalmente

$$V_K(x_K) = x'_K P_K x_K \quad ; \quad P_K = Q_K$$

- Si supponga di voler risolvere il problema in un passo dall'istante $K - 1$ all'istante K partendo dallo stato x_{K-1}

$$\begin{aligned} V_{K-1}(x_{K-1}) &= \min_{u_{K-1}} [x'_{K-1} Q x_{K-1} + u'_{K-1} R u_{K-1} + x_K P_K x_K] \\ &= \min_{u_{K-1}} [x'_{K-1} Q x_{K-1} + u'_{K-1} R u_{K-1} \\ &\quad + (Ax_{K-1} + Bu_{K-1})' P_K (Ax_{K-1} + Bu_{K-1})] \end{aligned}$$

- Minimizzando rispetto a u_{K-1} si ottiene il valore ottimo dell'ingresso

$$u_{K-1}^* = -(R + B' P_K B)^{-1} B' P_K A x_{K-1}$$

- e sostituendo si ottiene il costo ottimo

$$V_{K-1}(x_{K-1}) = x'_{K-1} P_{K-1} x_{K-1}$$

dove

$$P_{K-1} = Q - A' P_K B (R + B' P_K B)^{-1} B' P_K A + A' P_K A$$

SOLUZIONE LQ VIA PROGRAMMAZIONE DINAMICA

- Si supponga di voler risolvere il problema in due passi dall'istante $K - 2$ all'istante K partendo dallo stato x_{K-2} . Per il principio della programmazione dinamica, il costo ottimo in due passi è pari al minimo rispetto a u_{K-2} di un funzionale costituito dal costo ottimo in un passo $V_{K-1}(x_{K-1})$ più il costo relativo al passo $K - 2$

$$\begin{aligned} V_{K-2}(x_{K-2}) &= \min_{u_{K-2}} [x'_{K-2} Q x_{K-2} + u'_{K-2} R u_{K-2} + V_{K-1}(x_{K-1})] \\ &= \min_{u_{K-2}} [x'_{K-2} Q x_{K-2} + u'_{K-2} R u_{K-2} + x_{K-1} P_{K-1} x_{K-1}] \end{aligned}$$

che ha esattamente la stessa struttura di $V_{K-1}(x_{K-1})$ e quindi la soluzione è identica, solo traslata indietro di un passo!

- Iterando il ragionamento per un orizzonte temporale di j passi, al generico passo $k = K - j$ l'ingresso ottimo vale quindi

$$u_k^* = -(R + B' P_{k+1} B)^{-1} B' P_{k+1} A x_k$$

dove la successione P_k soddisfa

$$P_k = Q - A' P_{k+1} B (R + B' P_{k+1} B)^{-1} B' P_{k+1} A + A' P_{k+1} A$$

(ricorsione di Riccati)

SOLUZIONE LQ VIA PROGRAMMAZIONE DINAMICA

- Problema di controllo ottimo LQ

$$\min_{U_K} J(U_K, x_0) = \min_{U_K} \sum_{k=0}^{K-1} [x'_k Q x_k + u'_k R u_k] + x'_K Q_K x_K$$

- Algoritmo

1. Inizializza

$$P_K = Q_K$$

2. Per $j = K - 1, K - 2, \dots, 0$ calcola

$$P_j = Q - A' P_{j+1} B (R + B' P_{j+1} B)^{-1} B' P_{j+1} A + A' P_{j+1} A$$

$$F_j = -(R + B' P_{j+1} B)^{-1} B' P_{j+1} A$$

3. L'ingresso ottimo al passo k è dato da

$$u_k^* = F_k x_k$$

- La legge di controllo ottimo è una retroazione tempo variante dallo stato!

CONTROLLO LQ SU ORIZZONTE INFINITO

- Nei casi pratici, il problema del controllo consiste nel far raggiungere al sistema una situazione di regime dopo un transitorio rispondente a determinate caratteristiche
 - La soluzione su orizzonte finito è riduttiva, è necessaria una legge di controllo che minimizzi il costo necessario a raggiungere la condizione di regime
 - Il costo non deve divergere quando il sistema è a regime
 - Il controllo su orizzonte finito va precalcolato ed è in ogni caso complicato
 - La legge di controllo, oltre a minimizzare il costo, deve stabilizzare asintoticamente il sistema
- Formulazione problema LQ su orizzonte temporale infinito

$$V_{\infty}(x_0) = \min_U J(U, x_0) = \min_U \sum_{k=0}^{\infty} [x_k' Q x_k + u_k' R u_k]$$

dove U è la sequenza infinita di ingressi

$$U = [\dots, u_1, u_0]'$$

- Sarebbe auspicabile riuscire a trovare una legge di controllo in forma di retroazione, preferibilmente costante

CONTROLLO LQ SU ORIZZONTE INFINITO

Idea della soluzione

- Si supponga di voler risolvere il problema su un orizzonte temporale $0, \dots, K$ con K arbitrariamente grande. La ricorsione di Riccati va inizializzata a $P_K = 0$ (costo terminale nullo).
- Se si suppone che la ricorsione di Riccati converga a una matrice P_∞ per $k \rightarrow -\infty$, allora si ha $P_k \approx P_\infty$ se $k \ll K$. Quando K tende ad essere infinito, si tende allora ad avere $P_k = P_\infty$ per ogni k .

Lemma 1. Sia la coppia (A, B) stabilizzabile. Allora la ricorsione di Riccati

$$P_K = 0$$

$$P_k = Q - A'P_{k+1}B(R + B'P_{k+1}B)^{-1}B'P_{k+1}A + A'P_{k+1}A$$

converge a una matrice P_∞ simmetrica e semidefinita positiva, che soddisfa l'equazione algebrica di Riccati (ARE)

$$P_\infty = Q - A'P_\infty B(R + B'P_\infty B)^{-1}B'P_\infty A + A'P_\infty A$$

Lemma 2. Sia la coppia (A, B) stabilizzabile. Allora la ARE ammette almeno una soluzione simmetrica e semidefinita positiva.

CONTROLLO LQ SU ORIZZONTE INFINITO

Teorema. Sia (A, B) stabilizzabile e sia P_∞ la soluzione simmetrica e semidefinita positiva di ARE che rappresenta il limite della ricorsione di Riccati. Allora la legge di controllo in retroazione dallo stato

$$u_k^* = F_\infty x_k$$

dove

$$F_\infty = -(R + B'P_\infty B)^{-1} B'P_\infty A$$

rende minimo il costo su orizzonte infinito $J(U, x_0)$.

Problemi

- Come risolvere la ARE?
 - Esistono efficienti metodi numerici
- Qualunque soluzione simmetrica e semidefinita positiva della ARE è ottima, cioè minimizza il costo?
- Il sistema ad anello chiuso che si ottiene è asintoticamente stabile?

CONTROLLO LQ: ESEMPI

Esempio 1.

- Sistema

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

Il sistema è raggiungibile, quindi stabilizzabile

- Minimizzare il funzionale di costo

$$J(U, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} [x'_k Q x_k + u'_k R u_k] \quad ; \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

- Soluzione di ARE. Osservazione: ogni elemento P_k della ricorsione di Riccati ha solo l'elemento in posizione (1,1) non nullo. Quindi, poiché ci interessa P_{∞} si può porre $P_{\infty} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e ricavare la soluzione semidefinita positiva

$$P_{\infty} = \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Guadagno di retroazione

$$F_{\infty} = \begin{bmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

- Sistema ad anello chiuso

$$A + BF_{\infty} = \begin{bmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

Instabile!!! :(

CONTROLLO LQ: ESEMPI

- La ARE ammette anche un'altra soluzione simmetrica e semidefinita positiva (che non è ottima perché non è la P_∞)

$$P_s = \begin{bmatrix} 113.901 & -177.442 \\ -177.442 & 287.108 \end{bmatrix}$$

- Guadagno di retroazione

$$F_s = \begin{bmatrix} 2.696 & -6.981 \end{bmatrix}$$

- Sistema ad anello chiuso

$$A + BF_s = \begin{bmatrix} 4.696 & -6.981 \\ 2.696 & -3.981 \end{bmatrix}$$

Asintoticamente stabile, ma non ottimo.

Esempio 2.

- Sistema

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

con il costo dell'Esempio 1.

- Calcolare la P_∞ per esercizio e verificare che non stabilizza. In questo caso si dimostra che la ARE non ha alcuna soluzione stabilizzante!

CONTROLLO LQ: ESEMPI

- Sistema

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

- Minimizzare il funzionale di costo

$$J(U, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} [x_k' Q x_k + u_k' R u_k] \quad ; \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

- Soluzione numerica ottenuta come limite della ricorsione di Riccati (quindi ottima)

$$P_{\infty} = \begin{bmatrix} 126.245 & -196.030 \\ -196.030 & 316.114 \end{bmatrix}$$

- Guadagno di retroazione

$$F_{\infty} = \begin{bmatrix} 2.720 & -7.022 \end{bmatrix}$$

- Sistema ad anello chiuso

$$A + BF_{\infty} = \begin{bmatrix} 4.720 & -7.022 \\ 2.720 & -4.022 \end{bmatrix}$$

Asintoticamente stabile, ed anche ottimo.

E allora?

CONTROLLO LQ E STABILIZZAZIONE

- Si fattorizzi la matrice peso (simmetrica) Q come

$$Q = C'C$$

questo equivale a considerare il costo

$$J(U, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} [y_k^2 + u_k' R u_k]$$

definendo l'uscita del sistema come $y_k = Cx_k$.

- I seguenti risultati, almeno per ora, sono pura magia nera

Teorema 1. Sia (A, B) stabilizzabile e $Q = C'C$. Sia P_{∞} la soluzione di ARE associata alla legge di controllo ottimo (limite della ricorsione). Tale legge di controllo è stabilizzante se e solo se la coppia (A, C) è rivelabile.

Teorema 2. Sia (A, B) stabilizzabile e $Q = C'C$.

1. La ARE ammette al più una soluzione simmetrica semidefinita positiva P_s a cui corrisponde una legge di controllo stabilizzante
2. Tale soluzione esiste se e solo se la matrice $\begin{bmatrix} zI - A \\ C \end{bmatrix}$ ha rango pieno per ogni z complesso di modulo unitario
3. Se esiste la soluzione P_s , essa può essere ottenuta come limite per $k \rightarrow -\infty$ della ricorsione di Riccati, ed è quindi coincidente con la soluzione ottima P_{∞} .

CONTROLLO LQ PER VIA NUMERICA

Funzioni Matlab d'interesse

- DARE

DARE Solve discrete-time algebraic Riccati equations.

$[X,L,G,RR] = \text{DARE}(A,B,Q,R,S,E)$ computes the unique symmetric stabilizing solution X of the discrete-time algebraic Riccati equation

$$E'XE = A'XA - (A'XB + S)(B'XB + R)^{-1} (A'XB + S)' + Q$$

or, equivalently (if R is nonsingular)

$$E'XE = F'XF - F'XB(B'XB + R)^{-1} B'XF + Q - SR^{-1}S' \quad \text{with } F := A - BR^{-1}S'.$$

When omitted, R, S and E are set to the default values $R=I$, $S=0$, and $E=I$. Additional optional outputs include the gain matrix

$$G = (B'XB + R)^{-1} (B'XA + S'),$$

the vector L of closed-loop eigenvalues (i.e., $\text{EIG}(A-B*G,E)$), and the Frobenius norm RR of the relative residual matrix.

CONTROLLO LQ PER VIA NUMERICA

- DLQR

DLQR Linear-quadratic regulator design for discrete-time systems.

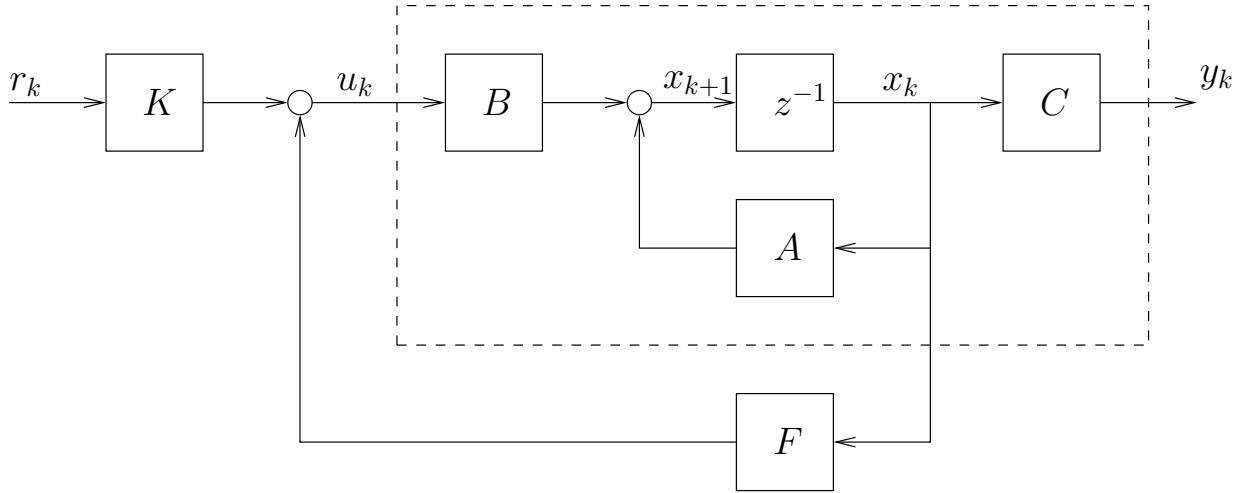
`[K,S,E] = DLQR(A,B,Q,R,N)` calculates the optimal gain matrix K such that the state-feedback law $u[n] = -Kx[n]$ minimizes the cost function

$$J = \text{Sum} \{x'Qx + u'Ru + 2*x'Nu\}$$

subject to the state dynamics $x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$.

The matrix N is set to zero when omitted. Also returned are the Riccati equation solution S and the closed-loop eigenvalues E :

INSEGUIMENTO OTTIMO IN SENSO LQ



- Obiettivo. Determinare F e K per inseguire a regime un riferimento costante $r_k = r$ minimizzando

$$J(U, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} [\tilde{y}_k^2 + \rho \tilde{u}_k^2]$$

dove $\tilde{y}_k = y_k - r$ è l'errore di inseguimento e $\tilde{u}_k = u_k - u_\infty$ è lo scostamento del comando dal suo valore di regime. u_∞ è nullo se l'impianto contiene un'azione integrale (i.e., A ha autovalori in $z = 1$)

- L'evoluzione delle variazioni di x_k e y_k dai valori di regime è data da

$$\tilde{x}_{k+1} = A\tilde{x}_k + B\tilde{u}_k$$

$$\tilde{y}_k = C\tilde{x}_k$$

Dunque il problema è un problema LQ standard per il sistema alle variazioni con i pesi $Q = C'C$, $R = \rho$

- La soluzione vale

$$\tilde{u}_k^* = F_\infty \tilde{x}_k$$

$$u_k - u_\infty = F_\infty (x_k - x_\infty)$$

INSEGUIMENTO OTTIMO IN SENSO LQ

- Dallo schema di controllo risulta

$$u_k = Fx_k + Kr$$

da cui

$$\tilde{u}_k = F\tilde{x}_k$$

e dunque la soluzione di inseguimento ottimo si ottiene con lo schema visto ponendo $F = F_\infty$ dove F_∞ risolve il problema LQ per (A, B) con i pesi dati. Il valore di K è scelto al solito per rendere unitario il guadagno in continua.

- Ingresso ottimo

$$u_k^* = F_\infty x_k + Kr \quad ; \quad K = \frac{1}{C(I - (A + BF_\infty))^{-1}B}$$

Se il sistema ha un'azione integrale, allora $u_k = \tilde{u}_k$, per cui il costo pesa effettivamente l'energia del comando. Se non è presente l'azione integrale, si ha u_∞ non nullo, dunque il costo non pesa l'effettiva energia dell'ingresso, ma l'energia dello scostamento dal valore di regime. L'energia in questo caso è infinita.