

Lucidi del corso di

## **Controllo digitale**

Corso di Laurea triennale in Ingegneria dell'Automazione

Università di Siena, Facoltà di Ingegneria

Parte IV

Realizzazione digitale di controllori analogici

Scelta del tempo di campionamento

Gianni Bianchini

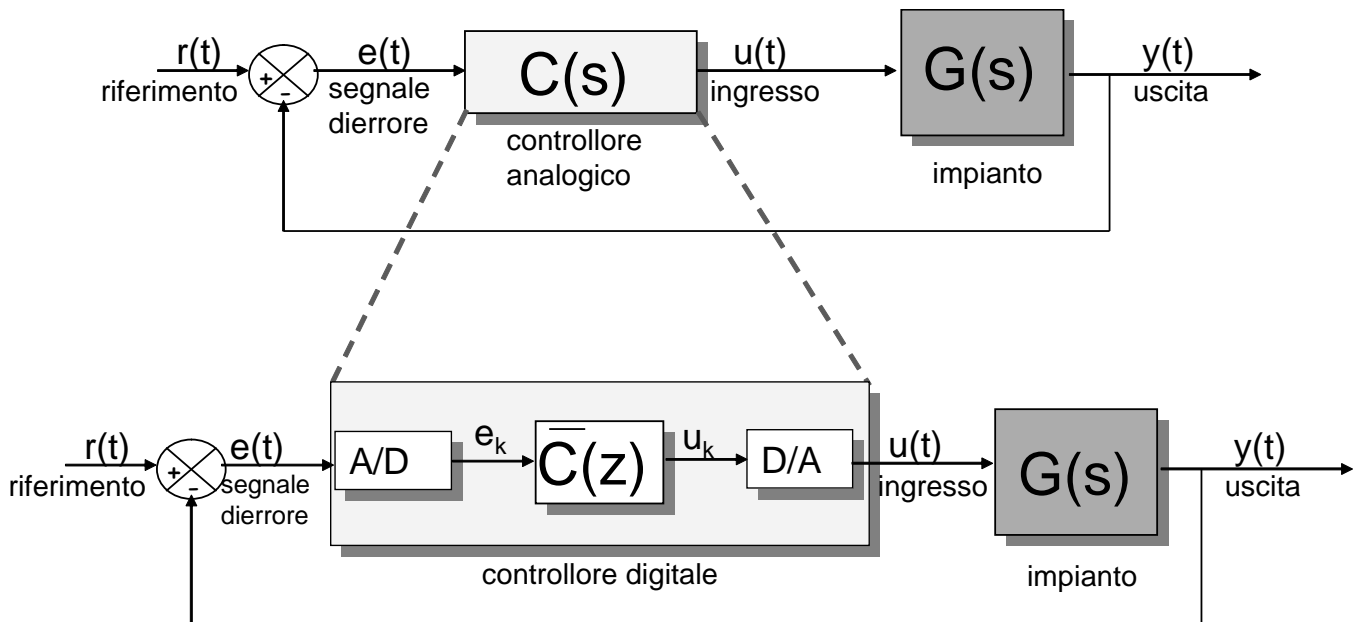
© 2003-2006 - Il presente documento è rilasciato nei termini di licenze

Creative Commons come indicato su

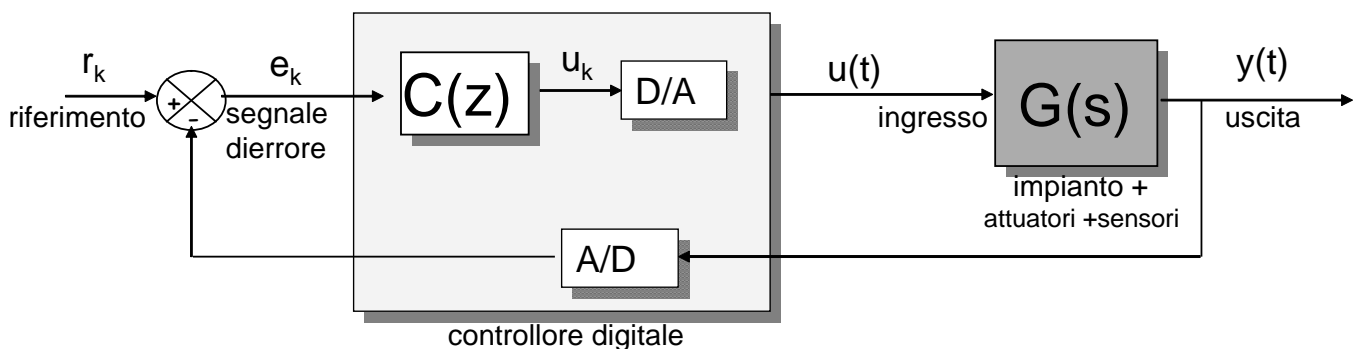
<http://control.dii.unisi.it/giannibi/teaching>

## PROGETTO PER DISCRETIZZAZIONE

**Obiettivo.** Avendo progettato un controllore  $C(s)$  analogico a fronte di opportune specifiche (es. mediante sintesi per tentativi), determinare una realizzazione a tempo discreto  $\bar{C}(z)$  da inserire in un sistema di controllo digitale in modo che le prestazioni del sistema ad anello chiuso siano quelle desiderate



- Realizzazione alternativa (con segnali di riferimento generati dal calcolatore)



## PROGETTO PER DISCRETIZZAZIONE

- Controllore lineare a tempo continuo

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

- Equazione differenziale ingresso-uscita equivalente

$$u^{(n)}(t) + a_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 u(t) = b_m e^{(m)}(t) + b_{m-1} e^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 e(t)$$

- Per discretizzazione del controllore  $C(s)$  si intende l'approssimazione numerica discreta, con integrazione a passo costante, della soluzione della relativa equazione differenziale ingresso/uscita. Tale approssimazione dovrà fornire una funzione di trasferimento a tempo discreto

$$\bar{C}(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$$

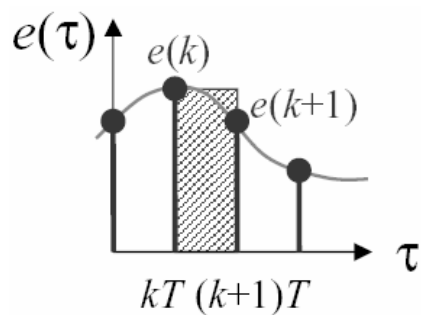
che legghi i campioni del segnale di comando  $u_k = u(kT)$  ai campioni  $e_k = e(kT)$  del segnale errore. Il risultato, inserito in un sistema di controllo digitale, dovrà presentare un comportamento il più possibile prossimo a quello del sistema di controllo analogico.

- Esistono molti metodi per integrare un'equazione differenziale per via numerica, a passo costante o variabile [vedi ad es. i metodi di integrazione usati da Simulink/Scicos]

## METODI DI DISCRETIZZAZIONE

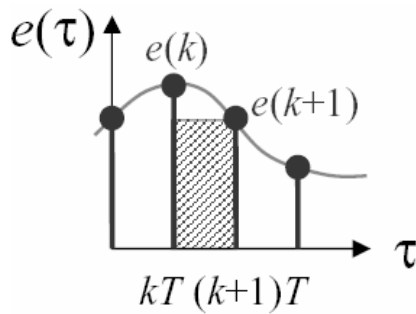
- Sono metodi per il calcolo del controllore approssimato  $\bar{C}(z)$  che derivano da altrettanti metodi per il calcolo approssimato degli integrali

- Metodo di Eulero in avanti



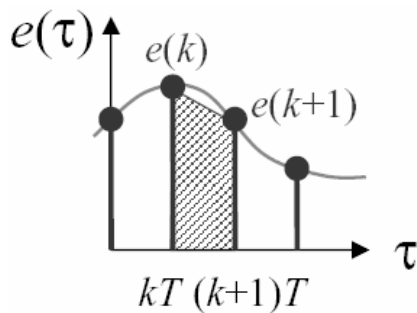
$$\int_{kT}^{(k+1)T} e(\tau) d\tau \approx T e(kT)$$

- Metodo di Eulero all'indietro



$$\int_{kT}^{(k+1)T} e(\tau) d\tau \approx T e((k+1)T)$$

- Metodo dei trapezi (di Tustin)



$$\int_{kT}^{(k+1)T} e(\tau) d\tau \approx \frac{T[e((k+1)T) + e(kT)]}{2}$$

## METODI DI DISCRETIZZAZIONE

Si consideri la funzione integrale

$$i(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau \quad \xrightarrow{\text{Laplace}} \quad I(s) = \frac{1}{s} E(s) \quad \Leftrightarrow \quad E(s) = sI(s)$$

e siano  $i_k = i(kT)$ ,  $e_k = e(kT)$ .

- Metodo di Eulero in avanti: dal calcolo approssimato dell'integrale risulta

$$i_{k+1} - i_k \approx T e_k \quad \xrightarrow{\text{Zeta}} \quad (z - 1)I(z) \approx T E(z)$$

e dunque la relazione integrale/differenziale tra  $e(t)$  e  $i(t)$  implica una relazione approssimata tra i relativi campioni

$$E(s) = sI(s) \quad \Rightarrow \quad E(z) \approx \frac{z - 1}{T} I(z)$$

- Metodo di Eulero all'indietro:

$$i_{k+1} - i_k \approx T e_{k+1} \quad \xrightarrow{\text{Zeta}} \quad (z - 1)I(z) \approx T z E(z)$$

e dunque

$$E(s) = sI(s) \quad \Rightarrow \quad E(z) \approx \frac{z - 1}{T z} I(z)$$

- Metodo di Tustin

$$i_{k+1} - i_k \approx \frac{T(e_{k+1} + e_k)}{2} \quad \xrightarrow{\text{Zeta}} \quad (z - 1)I(z) \approx \frac{T(z + 1)}{2} E(z)$$

e dunque

$$E(s) = sI(s) \quad \Rightarrow \quad E(z) \approx \frac{2(z - 1)}{T(z + 1)} I(z)$$

## METODI DI DISCRETIZZAZIONE

- Le regole di integrazione forniscono altrettanti operatori tra quantità discrete (campionamento delle corrispondenti quantità continue) che approssimano l'operatore di integrale ( $1/s$ ) o di derivata ( $s$ )

– Eulero in avanti

$$s \leftrightarrow \frac{z-1}{T}$$

– Eulero all'indietro

$$s \leftrightarrow \frac{z-1}{Tz}$$

– Tustin

$$s \leftrightarrow \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$$

La trasformazione di Tustin è bilineare in  $s$  e  $z$

- Dato il controllore lineare a tempo continuo descritto dalla f.d.t.

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

che equivale alla relazione ingresso-uscita

$$s^n U(s) + a_{n-1} s^{n-1} U(s) + \dots + a_0 U(s) = b_m s^m E(s) + b_{m-1} s^{m-1} E(s) + \dots + b_0 E(s)$$

sostituendo l'operatore  $s$  con il suo approssimato discreto secondo uno dei tre metodi e le quantità continue con le corrispondenti discrete, si ottiene una relazione approssimata tra le quantità discrete stesse, che può essere espressa nella forma di una funzione di trasferimento  $\bar{C}(z)$ .

## METODI DI DISCRETIZZAZIONE

- Discretizzazione del controllore analogico basata sui metodi di integrazione approssimata

- Metodo di Eulero in avanti

$$\bar{C}(z) = C(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

- Metodo di Eulero all'indietro

$$\bar{C}(z) = C(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}}$$

- Metodo di Tustin (bilineare)

$$\bar{C}(z) = C(s) \Big|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$$

- Esempio

- Rete anticipatrice più polo nell'origine

$$C(s) = \frac{K_c}{s} \frac{1 + \tau s}{1 + \tau/m s}$$

- Equivalente discreto approssimato (Tustin)

$$\bar{C}(z) = K_c \frac{T(z+1)}{2(z-1)} \frac{1 + \tau \frac{2(z-1)}{T(z+1)}}{1 + \tau/m \frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$$

## MAPPATURA DEI POLI

- Legame fra i poli  $s = s_i$  di  $C(s)$  ed i poli  $z_i$  del controllore discreto approssimato  $\bar{C}(z)$

– Eulero in avanti:

$$\frac{z_i - 1}{T} = s_i \quad \Rightarrow \quad z_i = 1 + Ts_i$$

– Eulero all'indietro:

$$\frac{z_i - 1}{Tz_i} = s_i \quad \Rightarrow \quad z_i = \frac{1}{1 - s_iT}$$

– Tustin:

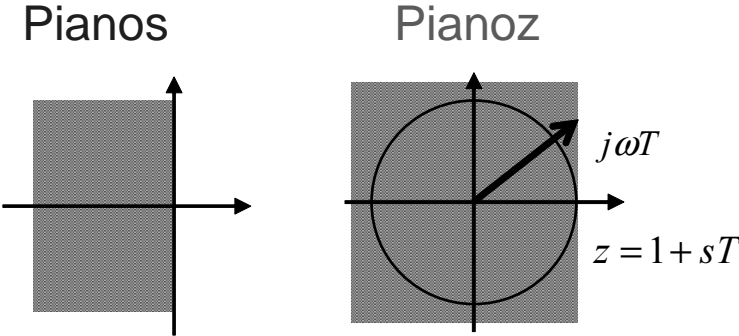
$$\frac{2(z_i - 1)}{T(z_i + 1)} = s_i \quad \Rightarrow \quad z_i = \frac{1 + s_iT/2}{1 - s_iT/2}$$

- Ricordiamo che il campionamento di un segnale mappa i poli della trasformata di Laplace su quelli della corrispondente trasformata zeta secondo la legge  $z_i = e^{s_iT}$
- I tre metodi sono in effetti delle approssimazioni della funzione  $z = e^{sT}$  con funzioni razionali, anche se il campionamento di segnali e la discretizzazione per approssimazione sono operazioni diverse da non confondere
- Ognuno dei tre metodi preserva il tipo del controllore ed il guadagno di Bode, quindi le specifiche statiche. Infatti per ogni polo di  $C(s)$  in  $s = 0$  il  $\bar{C}(z)$  ha un polo in  $z = 1$  e

$$C(0) = \bar{C}(1)$$

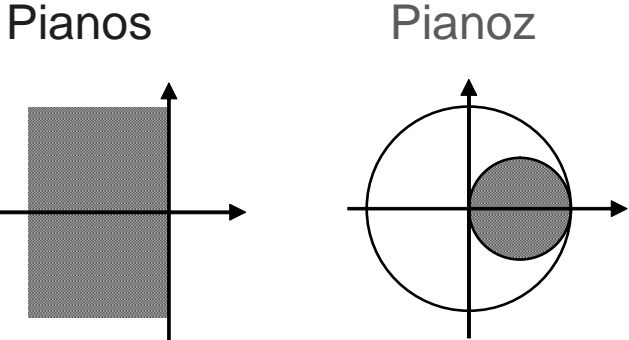
# MAPPATURA DEI POLI

- Eulero in avanti

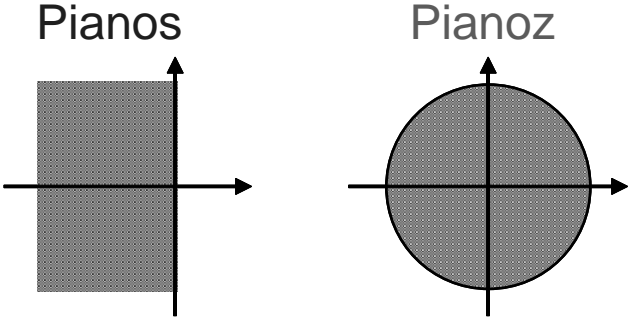


Poli stabili possono venir mappati in poli instabili!

- Eulero all'indietro



- Tustin



Le regioni di stabilità continua e discreta vengono mappate esattamente l'una sull'altra (come succede per la trasformazione  $z = e^{sT}$ )

## PREDISTORSIONE IN FREQUENZA (PREWARPING)

- I metodi di sintesi in frequenza a tempo continuo si basano sulle relazioni tra le proprietà frequenziali del sistema di controllo e le prestazioni nel dominio del tempo



Si fa l'assunzione che il processo di discretizzazione fornisca un controllore fedele a quello analogico se preserva il più possibile le caratteristiche della risposta in frequenza del guadagno d'anello (in particolare la pulsazione di attraversamento  $\omega_a$  e il margine di fase  $m_\phi$ )

- Confronto della risposta in frequenza del controllore analogico  $C(s)|_{s=j\omega}$  con quella del controllore digitale approssimato con la regola di Tustin  $\bar{C}(z)|_{z=e^{j\omega T}}$

$$\begin{aligned}\bar{C}(e^{j\omega T}) &= C\left(\frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1}\right) = C\left(\frac{2}{T} \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{e^{j\omega \frac{T}{2}} + e^{-j\omega \frac{T}{2}}}\right) = C\left(\frac{2}{T} \frac{2j \sin(\frac{\omega T}{2})}{2 \cos(\frac{\omega T}{2})}\right) \\ &= C\left(j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right) \neq C(j\omega)\end{aligned}$$

- La risposta in frequenza viene distorta secondo la trasformazione

$$\omega \rightarrow \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

- Per  $\omega \rightarrow \omega_N = \frac{\pi}{T}$  si ha che  $\frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \rightarrow \infty$ , cioè il comportamento ad alta frequenza del controllore nel continuo viene "compresso" verso la pulsazione  $\omega_N = \frac{\pi}{T}$  nel discreto
- Ricordiamo che  $\omega_N$  è la massima pulsazione di un segnale correttamente riproducibile sotto campionamento

## PREDISTORSIONE IN FREQUENZA (PREWARPING)

- Per preservare le caratteristiche dinamiche del sistema, si introduce una modifica nella trasformazione di Tustin in modo che la risposta in frequenza (modulo e fase) del controllore sia mantenuta in un intorno della pulsazione di attraversamento  $\omega_a$ , in modo cioè che risulti

$$\bar{C}(e^{j\omega_a T}) = C(j\omega_a)$$

- Trasformazione di Tustin modificata (prewarping)

$$\bar{C}_{pw}(z) = C\left(\frac{\omega_a}{\omega_{pw}} \frac{2z-1}{Tz+1}\right)$$

dove

$$\omega_{pw} = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_a T}{2}\right)$$

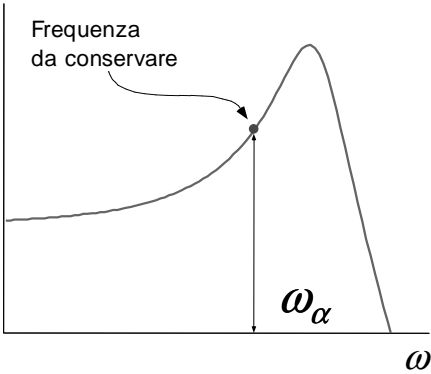
- Si ha

$$\bar{C}_{pw}(e^{j\omega_a T}) = C\left(\frac{\omega_a}{\frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_a T}{2}\right)} j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_a T}{2}\right)\right) = C(j\omega_a)$$

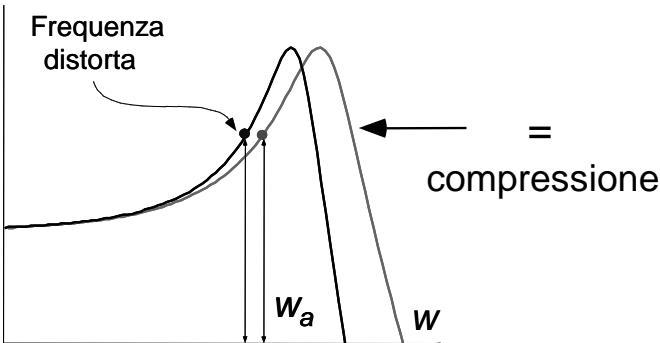
e dunque  $\bar{C}_{pw}(z)$  conserva la risposta in frequenza del controllore analogico  $C(s)$  in un intorno della pulsazione  $\omega_a$ . Questo permette di conservare la pulsazione di attraversamento ed il margine di fase del guadagno di anello e dunque, auspicabilmente, anche le caratteristiche del transitorio del sistema ad anello chiuso.

# PREDISTORSIONE IN FREQUENZA (PREWARPING)

- Sistema di partenza

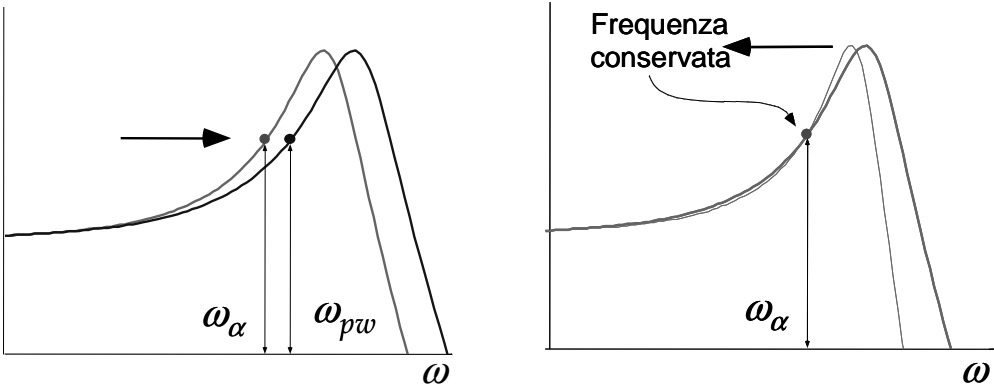


- Senza prewarping



- Con prewarping

– Predistorsione e compressione



## MATCHING POLI ZERI (MPZ)

- Si tratta di una tecnica di discretizzazione approssimata basata sull'osservazione che le tecniche di integrazione analizzate (es. Tustin) trasformano *sia i poli che gli zeri* del controllore da continuo a discreto secondo leggi che approssimano la nota relazione  $z = e^{sT}$ . La tecnica MPZ si basa appunto sul calcolo di un  $\bar{C}(z)$  che ha come zeri e poli rispettivamente gli zeri e i poli di  $C(s)$  trasformati esattamente secondo  $z = e^{sT}$ .

- Procedura per il progetto di  $\bar{C}(z)$ . Assegnato

$$C(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{s^h \prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

$\bar{C}(z)$  si calcola come

$$\bar{C}(z) = K_d \frac{(z + 1)^{n+h-m} \prod_{i=1}^m (z - e^{z_i T})}{(z - 1)^h \prod_{i=1}^n (z - e^{p_i T})}$$

dove  $K_d$  è selezionato in modo che  $\bar{C}(z)$  preservi l'errore a regime a segnali canonici, ovvero

$$K_d = T^h K \frac{\prod_{i=1}^m (-r_i)}{\prod_{i=1}^n (-p_i)} \frac{1}{2^{n+h-m}} \frac{\prod_{i=1}^n (1 - e^{p_i T})}{\prod_{i=1}^m (1 - e^{r_i T})}$$

- N.B. Gli zeri all'infinito di  $C(s)$  (i.e. l'eccesso poli-zeri  $n + h - m$ ) vengono mappati in altrettanti zeri in  $z = -1$ . Motivazione: se  $n+h > m$ , la risposta in frequenza  $C(j\omega)$  tende a zero per  $\omega \rightarrow \infty$  (la "massima pulsazione" nel continuo). È quindi ragionevole porre che  $\bar{C}(e^{j\omega T})$  tenda a zero per la massima pulsazione processabile dal filtro digitale (i.e.,  $\omega_N = \pi/T$ ), per cui si impone  $\bar{C}(e^{j\omega_N T}) = \bar{C}(-1) = 0$  introducendo  $n + h - m$  zeri in  $z = -1$ , in modo da conservare anche la velocità di convergenza a zero.

## MATCHING POLI ZERI (MPZ)

- Esempio: Funzione di trasferimento del controllore a tempo continuo

$$C(s) = \frac{a}{s + a}$$

- Il polo in  $s = -a$  viene mappato in  $z = e^{-aT}$ . Non ci sono zeri al finito. C'è solo uno zero all'infinito (eccesso poli-zeri pari a 1), quindi si ha un termine  $(z + 1)$  al numeratore

$$\bar{C}(z) = K_d \frac{z + 1}{z - e^{-aT}}$$

- Aggiustamento del guadagno in continua

$$\bar{C}(1) = C(0) = 1 \Rightarrow K_d = \frac{1 - e^{-aT}}{2}$$

- Controllore approssimato a tempo discreto

$$\bar{C}(z) = \frac{1 - e^{-aT}}{2} \frac{z + 1}{z - e^{-aT}}$$

- Tecnica MPZ modificata (MMPZ): non si aggiungono gli zeri in  $z = -1$ .

– Esempio precedente

$$\bar{C}(z) = (1 - e^{-aT}) \frac{1}{z - e^{-aT}}$$

## FUNZIONI SCILAB

- Approssimazione con Tustin

```
// Input: c = controllore analogico  
z=poly(0,'z');  
cz=tstn(T,c);
```

- Approssimazione di Tustin con prewarping

```
wa=1.5; // Pulsazione di prewarping  
cz=tstnpw(T,c,wa);
```

- Metodo MPZ

```
// Input: c = controllore analogico  
z=poly(0,'z');  
cz=mpz(T,c)  
  
// Le funzioni tstn, tstnpw, mpz si trovano in cd.sci
```

## SCELTA DEL TEMPO DI CAMPIONAMENTO

Scelta di compromesso prestazioni-costo

- Campionamento più rapido = prestazioni migliori
  - Maggiore fedeltà delle formule di approssimazione
  - Banda dei segnali elaborabili dal sistema più estesa
  - Minore sforzo di progetto
- Campionamento più lento
  - Più tempo per il calcolo dell'azione di controllo
  - Algoritmi più raffinati a parità di hardware
  - Più processi per CPU
  - Richiesta di minore velocità di conversione A/D e D/A, convertitori meno costosi
  - Minore sensibilità agli errori numerici
- Due regole pressoché ovvie: scegliere il tempo di campionamento più breve compatibilmente con le restrizioni tecnologiche e di costo, oppure il tempo di campionamento più lungo che permetta di conservare le specifiche

## SCELTA DEL TEMPO DI CAMPIONAMENTO

- Limitazione fondamentale data dal teorema di Shannon. Se il sistema di controllo deve garantire una banda passante  $B_3$  (legata alla specifica sul tempo di salita  $t_s$ ), deve risultare almeno

$$\omega_s > 2B_3 \quad \Leftrightarrow \quad T < \frac{\pi}{B_3} \quad (T \lesssim t_s)$$

altrimenti si ha aliasing sui segnali che caratterizzano il regolare funzionamento del sistema

- Requisiti addizionali, dipendenti dal tipo di applicazione
  - Necessità di regolarità e bassa distorsione della risposta nell'uscita (rispetto ad es. alla risposta del corrispondente sistema analogico)
  - Limitazione della rapidità di variazione del segnale di comando. Se  $T$  è alto infatti, la correzione da applicare all'impianto da un passo al successivo è elevata perchè l'impianto resta a lungo in anello aperto
  - Prontezza di reazione del sistema di controllo alla variazione del segnale di riferimento, che non viene recepita dal sistema fino all'istante di campionamento successivo alla variazione stessa

In molte applicazioni, si considera un buon compromesso prendere da 10 a 20 campioni sul tempo di salita del sistema

$$\frac{t_s}{20} < T < \frac{t_s}{10}$$

i.e.

$$\frac{\pi}{20B_3} < T < \frac{\pi}{10B_3} \quad ; \quad 20B_3 < \omega_s < 40B_3$$

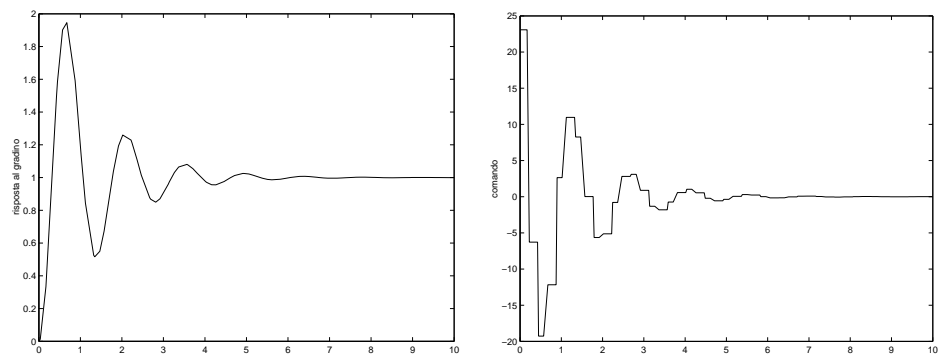
## SCELTA DEL TEMPO DI CAMPIONAMENTO

- Esempio: progetto per discretizzazione (Tustin)

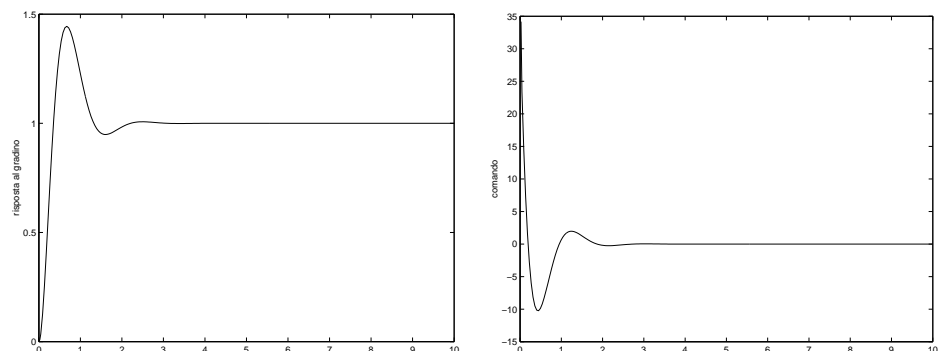
Script `tustinsr.sce`

$$P(s) = \frac{1}{s^2} \quad ; \quad C(s) = 40 \frac{s+2}{s+10} \quad ; \quad B_3 = 7 \text{ rad/s}$$

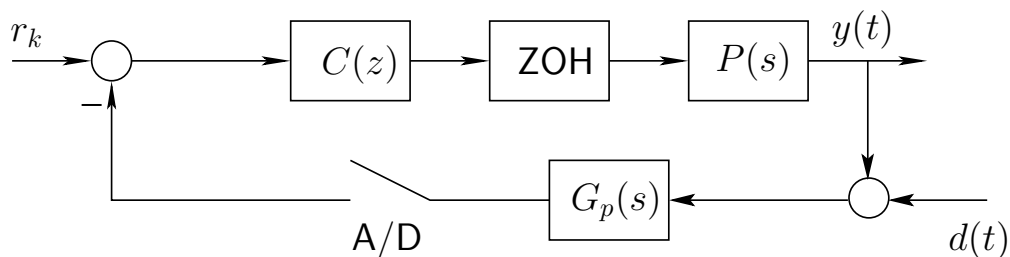
- Risposta al gradino per  $\omega_s = 4B_3$  (uscita e comando)



- Risposta al gradino per  $\omega_s = 20B_3$  (uscita e comando)



## PROGETTO DEL FILTRO ANTIALIASING, EFFETTO SU T



- È necessario prefiltrare con un passa basso i segnali a monte dell'operazione di campionamento per evitare fenomeni di aliasing dovuti a disturbi ad alta frequenza (ad es. un disturbo di misura  $d(t)$ )
- Il filtro non può essere ideale. Si consideri ad es. un passa basso del primo ordine con pulsazione di taglio  $\omega_p$

$$G_p(s) = \frac{\omega_p}{s + \omega_p}$$

- Il filtro non ideale introduce un ritardo di fase nell'anello, dannoso per la stabilità
- $\omega_p$  deve essere sufficientemente più grande di  $B_3$  per non attenuare e sfasare in banda. Si sceglie ad es.

$$\omega_p > 10B_3$$

- $\omega_p$  deve essere sufficientemente più piccola di  $\omega_N$  per assicurare una buona attenuazione dei disturbi che verrebbero campionati in aliasing. Ad es.

$$\omega_N > 10\omega_p$$

- Le relazioni precedenti impongono un ulteriore vincolo sulla scelta del tempo di campionamento ( $\omega_s > 20\omega_p > 200B_3$ ). In molti casi è sufficiente

$$\omega_s > 50B_3$$

## SCELTA DI T: ULTERIORI VINCOLI

- Ritardo di fase dovuto allo ZOH

$$\arg G_{ZOH}(j\omega) = -\frac{\omega T}{2}$$

- Se si ammette che lo ZOH introduca un peggioramento del margine di fase al massimo pari  $\Delta m_\phi$  alla pulsazione di attraversamento  $\omega_a$ , allora si ha un'ulteriore condizione su  $T$

$$\frac{\omega_a T}{2} < \Delta m_\phi$$

- Il sistema digitale lavora in precisione finita e questo causa errori numerici
  - Si consideri la relazione  $z = e^{sT}$  tra poli continui e discreti (ad es. nella discretizzazione del controllore mediante MPZ)
  - Se  $T \rightarrow 0$ , tutti i poli tendono a venir mappati in  $z = 1$
  - Esempio: due poli in  $s_1 = -1$  e  $s_2 = -10$ 
    1. Se  $T = 1 \text{ ms}$ , i poli discreti valgono  $z_1 = e^{-0.001} \approx 0.9990$ ,  $z_2 = e^{-0.01} \approx 0.9900$ . Con troncamento alla seconda cifra decimale, si ha  $z_1 = z_2$ , esattamente lo stesso risultato che si otterrebbe se fosse  $s_1 = \frac{1}{T} \ln z_1 = \frac{1}{T} \ln z_2 = s_2 \approx -10.05$
    2. Se  $T = 100 \text{ ms}$ , lo stesso troncamento produce  $z_1 = 0.90$ ,  $z_2 = 0.36$ , che è lo stesso risultato che si otterrebbe a partire da  $s_1 \approx -1.05$ ,  $s_2 \approx -10.21$
  - L'effetto degli errori numerici peggiora con il diminuire del tempo di campionamento!