Lucidi del corso di

Controllo digitale

Corso di Laurea triennale in Ingegneria dell'Automazione

Università di Siena, Facoltà di Ingegneria

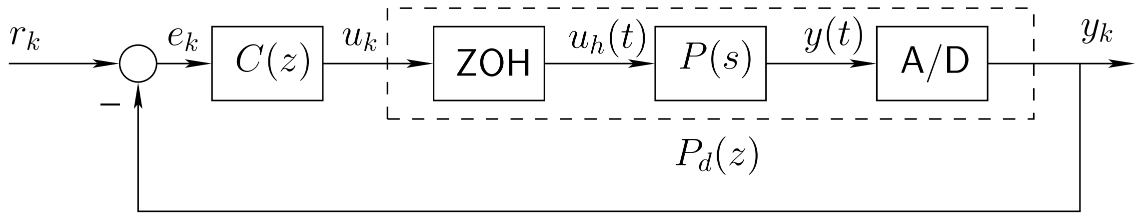
Parte V

Sintesi nel dominio tempo discreto

Gianni Bianchini

SINTESI DIRETTA NEL DISCRETO

Le tecniche dirette a tempo discreto si basano sull'imporre un andamento desiderato alla risposta campionata y_k del un sistema di controllo in corrispondenza al riferimento dato. Si considera pertanto l'equivalente campionato con ZOH dell'impianto



$$P_d(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}\right]$$

Problema della sintesi diretta. Progettare il compensatore digitale $C(z)$ in modo tale che la funzione di trasferimento ad anello chiuso tra il riferimento e l'uscita campionata

$$W(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$$

sia pari ad una data $W_0(z)$ che soddisfa opportune specifiche.

Soluzione. Niente di più semplice...

$$W(z) = \frac{C(z)P_d(z)}{1 + C(z)P_d(z)} = W_0(z)$$

$$\Downarrow$$

$$C(z) = \frac{1}{P_d(z)}\frac{W_0(z)}{1 - W_0(z)}$$

Nota. In questo modo viene impostata la funzione di trasferimento tra il segnale di riferimento r_k e l'uscita campionata y_k. Tuttavia ciò che si ha interesse a controllare è l'uscita analogica fisica $y(t)$, per cui sarà necessario verificare che questa non presenti comportamenti indesiderati in corrispondenza del progetto effettuato.

SINTESI DIRETTA NEL DISCRETO

- Esempio.

$$P(s) = \frac{a}{s+a}$$

  - Equivalente campionato con ZOH

$$P_d(z) = \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$$

  - F.d.T. ad anello chiuso desiderata (ILUL stabile e con guadagno in continua unitario per assicurare l'inseguimento del gradino)

$$W_0(z) = \frac{1-\alpha}{z-\alpha} \quad ; \quad |\alpha| < 1$$

  - Controllore corrispondente

$$C(z) = \frac{1}{P_d(z)} \frac{W_0(z)}{1-W_0(z)} = \frac{(1-\alpha)(z-e^{-aT})}{(1-e^{-aT})(z-1)}$$

  - Guadagno d'anello corrispondente

$$L(z) = \frac{1-\alpha}{z-1}$$

- Si hanno cancellazioni polo-zero tra $C(z)$ e $P_d(z)$. Il controllore cancella del tutto la dinamica dell'impianto e ve ne sostituisce una propria

- Altro esempio. Stesso impianto e F.d.T. ad anello chiuso desiderata

$$W_0(z) = \frac{(1-\alpha)z}{z-\alpha} \quad ; \quad |\alpha| < 1$$

  - Controllore

$$C(z) = \frac{(1-\alpha)z(z-e^{-aT})}{\alpha(1-e^{-aT})(z-1)}$$

    Non causale!

SINTESI DIRETTA: VINCOLI DI PROGETTO

- **Causalità.** Il controllore deve essere causale, i.e., $C(z)$ deve avere il grado del denominatore n^c maggiore o uguale a quello del numeratore m^c
  - Affinché il controllore sia causale, l'eccesso poli-zeri $n^w - m^w$ di $W_0(z) = N_W(z)/D_W(z)$ deve essere maggiore o uguale all'eccesso poli-zeri $n^p - m^p$ di $P_d(z) = N_P(z)/D_P(z)$, ovvero, la funzione di trasferimento ad anello chiuso desiderata non può presentare un ritardo (discreto) ingresso-uscita inferiore a quello dell'equivalente campionato dell'impianto. Infatti
$$C(z) = \frac{D_P(z)}{N_P(z)} \frac{N_W(z)}{D_W(z) - N_W(z)}$$
$$n^c - m^c = m^p + n^w - (n^p + m^w) \geq 0 \Rightarrow n^w - m^w \geq n^p - m^p$$

- **Stabilità interna** del sistema di controllo: non devono esistere cancellazioni tra poli e zeri con modulo maggiore o uguale a 1 nel prodotto $C(z)P_d(z)$. Essendo
$$C(z)P_d(z) = \frac{W_0(z)}{1 - W_0(z)}$$
  - ogni zero di $P_d(z)$ con modulo ≥ 1 deve comparire tra gli zeri di $W_0(z)$ in modo che permanga come zero del prodotto $C(z)P_d(z)$
  - ogni polo di $P_d(z)$ con modulo ≥ 1 deve comparire tra gli zeri di $1 - W_0(z)$ in modo che permanga come polo di $C(z)P_d(z)$

- In generale, la sintesi diretta effettua la cancellazione della dinamica dell'impianto per sostituirvene una nuova corrispondente alle specifiche, salvo le cancellazioni esplicitamente impedite, ad esempio per garantire la stabilità interna.

SINTESI DIRETTA: SPECIFICHE STATICHE

- Specifiche tipiche di **precisione a regime**
  - Errore e^0 di inseguimento al gradino ($r_k = 1_k$) nullo

$$E(z) = (1 - W_0(z))R(z)$$

$$\Downarrow$$

$$e^0 = \lim_{z \to 1}(z-1)\frac{z}{z-1}(1 - W_0(z)) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$W_0(1) = 1$$

  - Errore e^1 di inseguimento alla rampa ($r_k = kT\ 1_k$) finito e pari a e_0^1

$$e^1 = \lim_{z \to 1}(z-1)\frac{Tz}{(z-1)^2}(1 - W_0(z)) = e_0^1$$

$$\Downarrow \quad [\text{Applicare l'Hopital e ricordare che } \ W_0(1) = 1]$$

$$-T\frac{dW_0(z)}{dz}\bigg|_{z=1} = -T\frac{1}{W_0(z)}\frac{dW_0(z)}{dz}\bigg|_{z=1} = -T\frac{d}{dz}\log W_0(z)\bigg|_{z=1} = e_0^1$$

Se $W_0(z)$ è espressa nella forma poli-zeri

$$W_0(z) = K^w \frac{\Pi_{j=1}^{m^w}(z - z_j^w)}{\Pi_{i=1}^{n^w}(z - p_i^w)}$$

dalla precedente relazione risulta

$$T\left[\sum_{i=1}^{n^w}\frac{1}{1 - p_i^w} - \sum_{j=1}^{m^w}\frac{1}{1 - z_j^w}\right] = e_0^1$$

che mette in relazione l'errore di inseguimento alla rampa unitaria con i poli e gli zeri della f.d.t. $W_0(z)$ ad anello chiuso (regola di Truxal).

SCELTA DI $W_0(z)$

In generale $W_0(z)$ è scelta della forma

$$W_0(z) = \frac{K^w(z - z_1^w)\dots(z - z_{m^w}^w)}{(z - p_1^w)\dots(z - p_{n^w}^w)}\frac{1}{z^N} = \frac{w_{m^w} z^{m^w} + \dots w_0}{(z - p_1^w)\dots(z - p_{n^w}^w)}\frac{1}{z^N}$$

- I poli p_i^w si fissano sulla base delle specifiche di transitorio (vedi seguito)

- Gli m^w zeri z_j^w ed il guadagno K^w (o in alternativa i coefficienti w_j), in tutto $m^w + 1$ parametri, si calcolano imponendo le condizioni di stabilità interna e di precisione statica. Ovviamente, si sceglie $m^w + 1$ pari al numero di condizioni da imporre.

  * $W_0(z_j) = 0$ per ogni zero z_j di $P_d(z)$ con $|z_j| \geq 1$ (stab. interna); se la molteplicità di z_j è $\mu_j > 1$ si deve imporre anche $\frac{d^r}{dz^r} W_0(z)|_{z=z_j} = 0$ $\forall r = 1, \dots, \mu_j - 1$; in generale si introducono come zeri di $W_0(z)$ gli zeri di $P_d(z)$ che non si vuole vengano cancellati da poli di $C(z)$.

  * $1 - W_0(p_i) = 0$ per ogni polo p_i di $P_d(z)$ con $|p_i| \geq 1$ (stab. interna), ovvero per ogni polo di $P_d(z)$ che non si vuole venga cancellato da $C(z)$; se la molteplicità di p_i è $\nu_i > 1$ si deve imporre anche $\frac{d^r}{dz^r}[1 - W_0(z)]|_{z=p_i} = 0$ $\forall r = 1, \dots, \nu_i - 1$

  * $1 - W_0(1) = 0$ (errore a regime nullo al gradino); questa condizione è analoga a quella che previene la cancellazione di un eventuale polo in $z = 1$ di $P_d(z)$, d'altra parte la specifica di errore nullo al gradino richiede che $L(z) = C(z)P_d(z)$ abbia un polo in $z = 1$.

  * Precisione alla rampa: imponendo la formula di Truxal si ottiene una relazione tra poli e zeri di $W_0(z)$.

SCELTA DI $W_0(z)$

- I poli in $z = 0$ si aggiungono per rispettare la condizione di causalità del controllore, si sceglie quindi

  $$N \geq (n^p - m^p) - (n^w - m^w)$$

  per assicuare la causalità del controllore. Questi poli corrispondono a dinamiche che vanno a zero in tempo finito e quindi, in generale, non alterano significativamente il transitorio della risposta al gradino.

  Attenzione. Per imporre le condizioni che portano al calcolo degli zeri di $W_0(z)$ (stabilità interna, precisione statica), è necessario considerare la $W_0(z)$ completa degli eventuali poli in $z = 0$. Aggiungerli *dopo* aver calcolato gli zeri senza tenerne conto altera alcune condizioni (es. Truxal).

- Si noti che con questo procedimento si è ottenuto un metodo sistematico per stabilizzare qualunque impianto!

SCELTA DI $W_0(z)$: TRANSITORIO DEADBEAT

- Obiettivo. Progettare $W_0(z)$ in modo da soddisfare le specifiche:
  - Errore a regime al gradino nullo
  - La risposta y_k al gradino deve raggiungere il valore di regime in un numero N finito di passi, possibilmente minimo
- Soluzione nel caso di $P_d(z)$ con poli e zeri tutti interni al cerchio unitario o con al più un polo in $z = 1$. Basta scegliere

$$W_0(z) = \frac{1}{z^N}$$

  con N uguale o superiore all'eccesso poli-zeri $n^p - m^p$ di $P_d(z)$. In questo modo l'uscita y_k insegue qualunque riferimento con un ritardo di N passi. In particolare quindi la risposta al gradino va a regime in N passi

- La specifica sull'errore a regime è soddisfatta poiché $W_0(1) = 1$.
- Non sono richieste altre condizioni per la stabilità interna avendo $P_d(z)$ poli e zeri tutti stabili
- Controllore corrispondente

$$C(z) = \frac{1}{P_d(z)} \frac{1}{z^N - 1}$$

  - Si noti che $z = 1$ è uno zero di $1 - W_0(z)$ per qualunque N. Quindi anche se $P_d(z)$ ha un polo semplice in $z = 1$, $C(z)$ non lo cancella. Si noti inoltre che, se $P_d(z)$ è l'equivalente campionato di un dato $P(s)$, allora ha tanti poli in $z = 1$ quanti sono i poli in zero di $P(s)$.

SCELTA DI $W_0(z)$: TRANSITORIO DEADBEAT

- Esempio (file Scilab `deadbeat.sce`)
  - Impianto a tempo continuo

$$P(s) = \frac{e^{-0.2s}}{1+s}$$

  - Equivalente a dati campionati con ZOH, $T = 0.2$ s

$$P_d(z) = \frac{0.1823}{z(z-0.8187)}$$

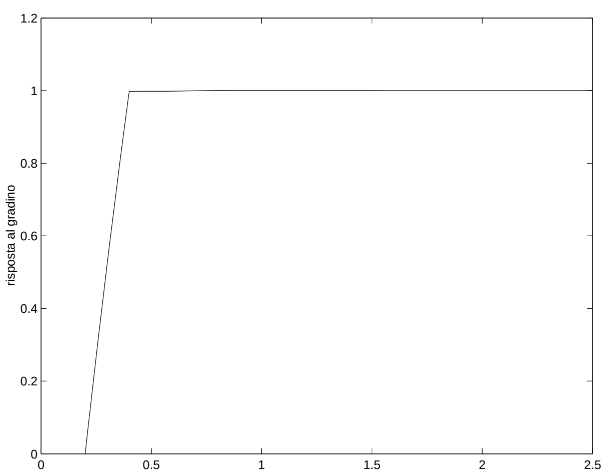
  - $P_d(z)$ ha poli e zeri stabili e grado relativo 2, per cui si sceglie

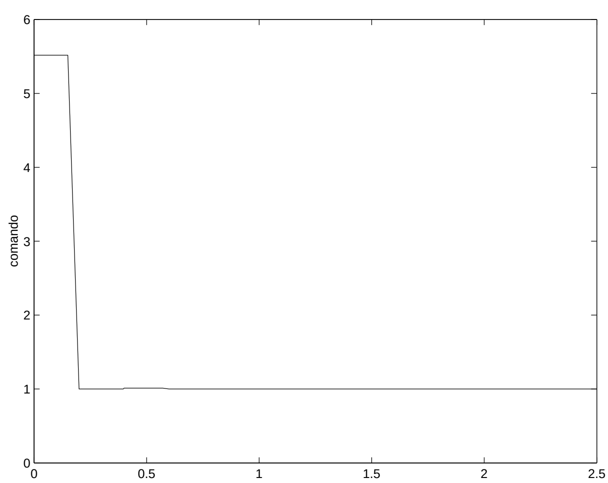
$$W_0(z) = z^{-2}$$

  - Controllore corrispondente

$$C(z) = \frac{z(z-0.8187)}{0.1823(z^2-1)}$$

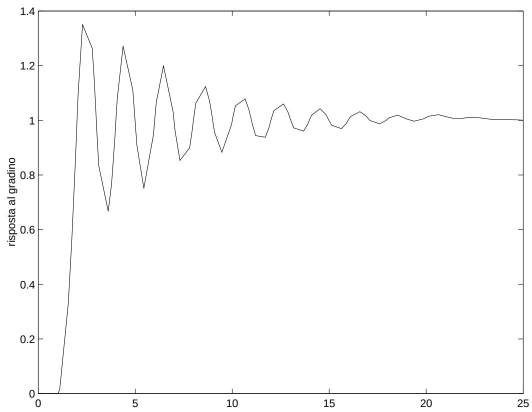
  - Risposta al gradino (uscita e comando)

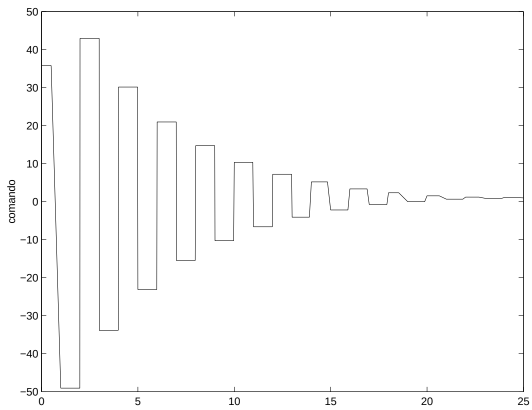




SCELTA DI $W_0(z)$: TRANSITORIO DEADBEAT

- Esempio (file Scilab `interper.sce`, prima parte)
  - Impianto
$$P(s) = \frac{e^{-s}}{1 + 8s + 15s^2}$$
  - Equivalente campionato con ZOH, $T = 1$ s
$$P_d(z) = \frac{0.028(z + 0.8357)}{z^3 - 1.5353z^2 + 0.5866z}$$
  - Controllore deadbeat ($W_0(z) = z^{-2}$). [N.B. Lo zero di $P_d(z)$ è stabile]
$$C(z) = \frac{z(z^2 - 1.5353z + 0.5866)}{0.028(z + 1)(z - 1)(z + 0.8357)}$$
  - Risposta al gradino (uscita analogica e comando)





- Presenza di forti oscillazioni interperiodo nell'uscita analogica
  - Causa: il controllore ha poli prossimi a $z = -1$ che cancellano zeri dell'impianto discretizzato ($z_r = -0.8357$). Tali poli compaiono quindi nella f.d.t. tra riferimento e comando e ne producono un andamento oscillatorio che causa l'oscillazione della risposta analogica
  - Se lo zero "risonante" z_r comparisse tra gli zeri di $W_0(z)$, tale cancellazione verrebbe prevenuta, allo stesso modo delle cancellazioni di zeri instabili

TRANSITORIO DEADBEAT

- Se $P_d(z)$ ha poli o zeri instabili, si deve introdurre in $W_0(z)$ un numero opportuno di zeri per poter imporre le condizioni di stabilità interna

$$W_0(z) = K^w(z - z_1^w)\ldots(z - z_{m^w}^w)\frac{1}{z^N} = (w_{m^w} z^{m^w} + \ldots w_0)\frac{1}{z^N}$$

Anche in questo caso la risposta al gradino va a regime in N passi, essendo

$$W_0(z) = w_0 z^{-N} + \ldots + w_{m^w} z^{-N+m^w}$$

si noti però che $W_0(z)$ non è più un ritardo puro.

- Esempio (modello Scicos `magia.cos`)

$$P(s) = \frac{1}{s^2} \qquad \Rightarrow \qquad P_d(z) = \frac{T^2}{2}\frac{z+1}{(z-1)^2}$$

- $P_d(z)$ ha uno zero in $z = -1$ e due poli in $z = 1$, per cui si deve imporre

$$W_0(-1) = 0\ [1] \quad ; \quad 1 - W_0(1) = 0\ [2] \quad ; \quad \frac{d(1 - W_0)}{dz}(1) = 0\ [3]$$

N.B. L'imposizione delle condizioni [2] e [3] "preserva" i poli in $z = 1$ già presenti in $P_d(z)$ che altrimenti il controllore cancellerebbe, compromettendo l'errore nullo al gradino e la stabilità interna.

- Scelta di $W_0(z)$: per soddisfare tre vincoli ci vogliono tre parametri liberi. Inoltre il grado relativo di $W_0(z)$ deve essere almeno 1, per cui $N = 3$

$$W_0(z) = (w_2 z^2 + w_1 z + w_0)\frac{1}{z^3}$$

- Imponendo le tre condizioni si ricava $w_2 = \frac{5}{4}$, $w_1 = \frac{1}{2}$, $w_0 = -\frac{3}{4}$

$$\Downarrow$$

$$C(z) = \frac{1}{P_d(z)}\frac{W_0(z)}{1 - W_0(z)} = \frac{2}{T^2}\frac{5z-3}{4z+3}$$

TRANSITORIO DEADBEAT

- Soluzione (file Scilab `interper.sce`, seconda parte)

- Impianto

$$P(s) = \frac{e^{-s}}{1 + 8s + 15s^2}$$

- Equivalente campionato con ZOH, $T = 1$ s

$$P_d(z) = \frac{0.028(z + 0.8357)}{z^3 - 1.5353z^2 + 0.5866z}$$

- Si include lo zero risonante $z_r = -0.8357$ dell'impianto tra gli zeri di $W_0(z)$ per prevenirne la cancellazione, come si farebbe per uno zero instabile allo scopo di preservare la stabilità interna. Si impedisce così che z_r sia un polo della f.d.t. tra riferimento e comando. Dunque si sceglie

$$W_0(z) = K^w(z + 0.8357)\frac{1}{z^3}$$

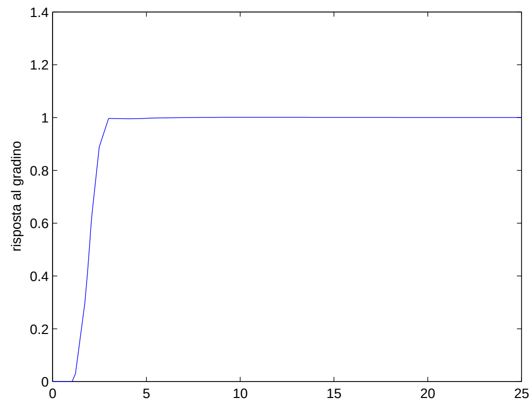
sono necessari 3 poli in $z = 0$ per preservare la causalità

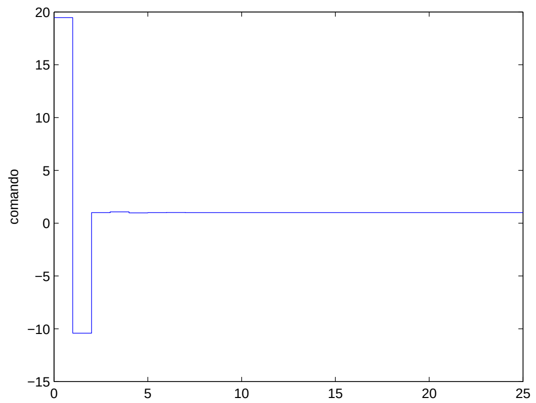
- K^w si calcola imponendo errore a regime nullo al gradino ($W_0(1) = 1$)

- $W_0(z)$ risultante

$$W_0(z) = \frac{0.5443(z + 0.8371)}{z^3}$$

- Risposta al gradino (uscita e comando)





SCELTA DI $W_0(z)$: TRANSITORIO DEL PRIMO ORDINE (DAHLIN)

- Si impone che la risposta al gradino del sistema presenti un transitorio assimilabile a quello di un sistema del primo ordine con una costante di tempo assegnata τ. Si sceglie quindi

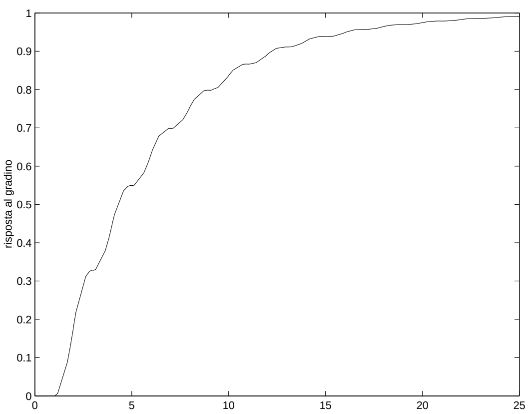
$$W_0(z) = \frac{K^w(z - z_1^w) \dots (z - z_{m^w}^w)}{z - e^{-T/\tau}} \; \frac{1}{z^N}$$

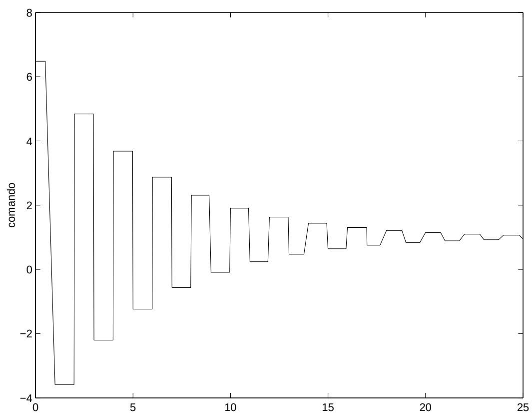
  con $N \geq n^p - m^p - 1 + m^w$. Come in precedenza, K^w e gli zeri z_j^w sono scelti per soddisfare i vincoli di progetto (stabilità interna, precisione statica)

- Esempio (`dahlin.sce`): $P(s)$ come in `interper.sce`, $\tau = 5$ s, $T = 1$ s

$$W_0(z) = \frac{1 - e^{-T/\tau}}{z - e^{-T/\tau}} \; \frac{1}{z}$$

- Risposte al gradino uscita e comando





- Esempio precedente con inclusione dello zero risonante in $W_0(z)$

$$W_0(z) = \frac{K^w(z + 0.8371)}{z - e^{-T/\tau}} \; \frac{1}{z^2}$$

  dove K^w è calcolata affinché $W_0(1) = 1$.

SCELTA DI $W_0(z)$: TRANSITORIO DEL SECONDO ORDINE

Obiettivo: Imporre le specifiche di transitorio tipiche (sovraelongazione, tempo di salita, tempo di assestamento,...)

Caso ideale. Imporre che la risposta al gradino di $W_0(z)$ sia esattamente la versione campionata della risposta di un sistema continuo del secondo ordine con ζ e ω_n corrispondenti alle specifiche

$$Y(z) = W_0(z)\ \frac{z}{z-1} = \mathcal{Z}\left[W(s)\ \frac{1}{s}\right] \quad \text{dove} \quad W(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta/\omega_n\ s + s^2/\omega_n^2}$$

da cui si ricava che $W_0(z)$ si calcola come l'equivalente con ZOH di $W(s)$.

Non sempre è praticabile per i vincoli di causalità, presenza di poli o zeri instabili nell'impianto, specifiche statiche (es. errore alla rampa).

Caso pratico. Imporre che le dinamiche dominanti della risposta al gradino siano la versione campionata di quelle della risposta continua desiderata. Ciò equivale a richiedere che i poli dominanti di $W_0(z)$ siano il corrispondente secondo $z = e^{sT}$ di una coppia di poli che nel continuo danno una risposta con le caratteristiche transitorie desiderate.

1. Si determinano ζ e ω_n corrispondenti alle specifiche richieste ed i relativi poli $p = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ e $\bar{p} = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

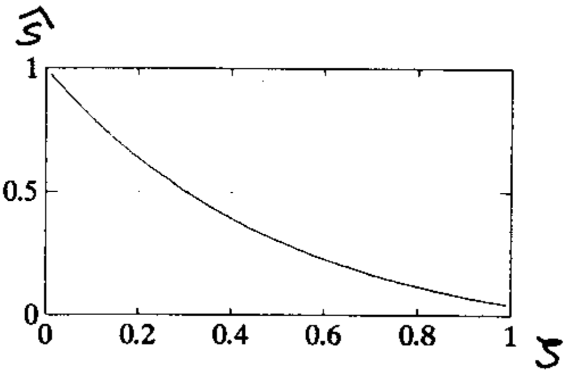
2. Si sceglie una $W_0(z)$ che abbia come poli e^{pT}, $e^{\bar{p}T}$ più ulteriori poli in $z = 0$ e zeri scelti come al solito in modo da rispettare causalità ed altri vincoli

$$W_0(z) = \frac{K^w(z - z_1^w)\ldots(z - z_{m^w}^w)}{(z - e^{pT})(z - e^{\bar{p}T})}\ \frac{1}{z^N}$$

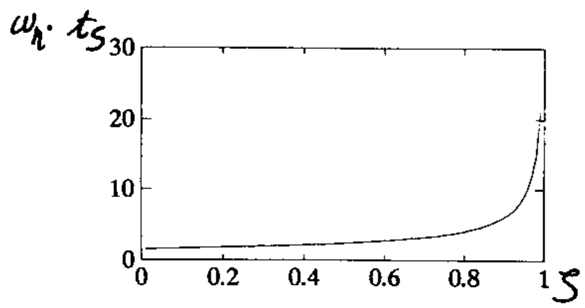
con $N \geq n^p - m^p - 2 + m^w$.

SINTESI NEL PIANO Z

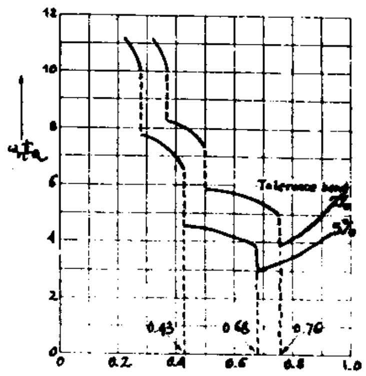
- Specifiche di transitorio vs. posizione dei poli dominanti (file Scilab `smorzamento.sce`)
  - Massima sovraelongazione $\hat{s} = \exp(-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})$



  - Tempo di salita $t_s = \omega_n^{-1}[1-\zeta^2]^{-1/2}[\pi - \arctan\zeta^{-1}\sqrt{1-\zeta^2}]$



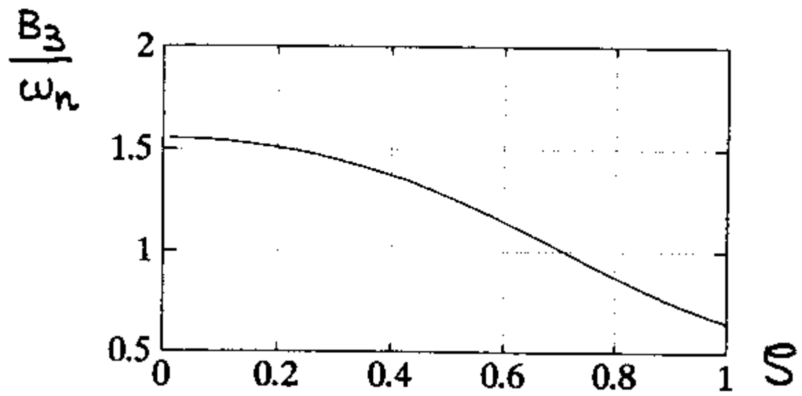
  - Tempo di assestamento



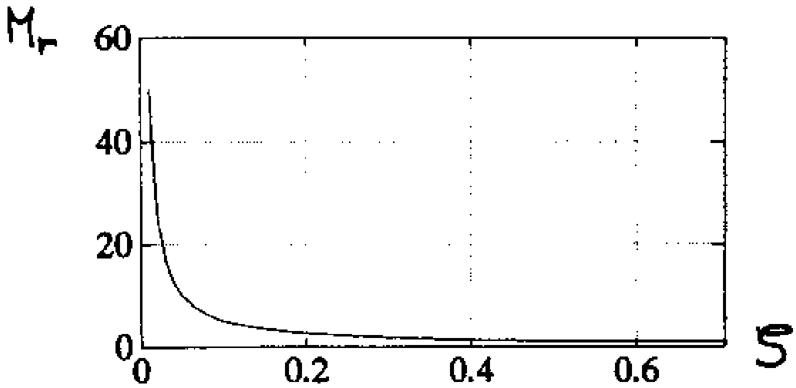
49

SINTESI NEL PIANO Z

- Specifiche in frequenza vs. posizione dei poli dominanti
  - Banda passante



  - Picco di risonanza



SINTESI NEL PIANO Z: ESEMPI DI SPECIFICHE

- Specifica sullo smorzamento (sovraelongazione $\hat{s} < \hat{s}_1$)

$$\zeta > \zeta_1$$

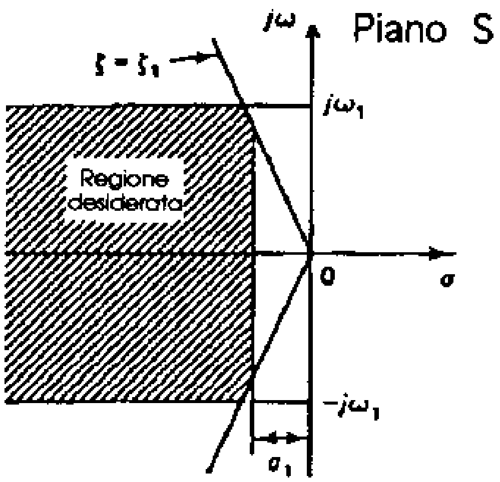
- Specifica sulla parte immaginaria dei poli dominanti (sensibilità ai disturbi ad alta frequenza)

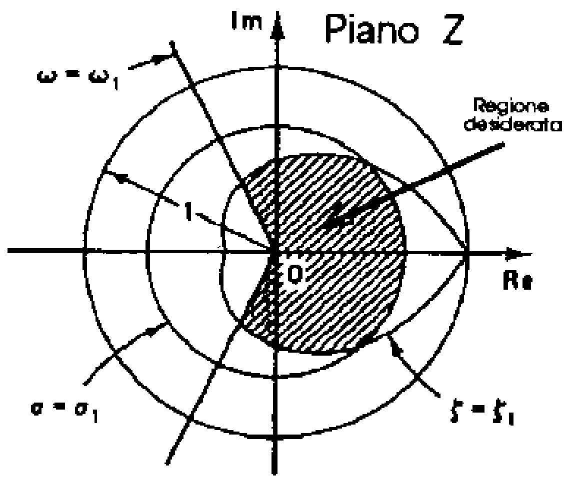
$$\omega < \omega_1$$

- Specifica sulla parte reale dei poli dominanti
(tempo di assestamento $t_a \approx 5/\sigma$)

$$-\sigma < -\sigma_1$$

- Posizione nel piano s e nel piano z dei poli dominanti corrispondenti alle specifiche





SINTESI NEL PIANO Z

- Esempio (file Scilab `diretta.sce`)

$$P(s) = \frac{0.1}{s(s+0.1)}$$

- Specifiche
  - Errore di inseguimento al gradino nullo
  - Errore di inseguimento alla rampa unitaria $e^1 \leq e_0^1 = 1$
  - Tempo di salita $t_s \leq 1.5$ s
  - Massima sovraelongazione $\hat{s} \leq 0.4$.
- Equivalente campionato con ZOH e $T = 1$ s

$$P_d(z) = \frac{0.04837(z+0.9672)}{(z-1)(z-0.9048)}$$

  - Occhio allo zero di $P_d(z)$, molto vicino al punto $z = -1$
- Dalle specifiche dinamiche si può assumere $\zeta = 0.5$, $\omega_n = 1$
  - Poli dominanti nel continuo: $p, \bar{p} = -1/2 \pm j\sqrt{3}/2$
  - Polinomio corrispondenti ai poli dominanti nel discreto: $(z - e^{pT})(z - e^{\bar{p}T}) = z^2 - 0.7859z + 0.3679$
- Scelta di $W_0(z)$

$$W_0(z) = \frac{K^w(z - z_1)}{z^2 - 0.7859z + 0.3679}$$

  - z_1 si calcola imponendo l'errore alla rampa con la regola di Truxal: $z_1 = 0.0793$
  - K^w si calcola imponendo guadagno in continua unitario: $K^w = 0.6321$

SINTESI NEL PIANO Z

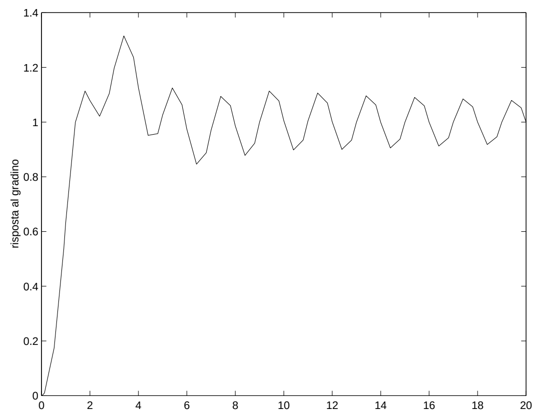
- Funzione di trasferimento ad anello chiuso desiderata

$$W_0(z) = 0.6321\frac{z - 0.0793}{z^2 - 0.7859z + 0.3679}$$

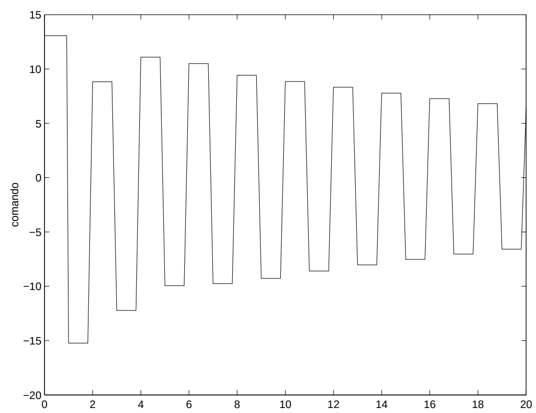
- Controllore

$$C(z) = \frac{1}{P_d(z)}\frac{W_0(z)}{1 - W_0(z)} = 13.068\frac{(z - 0.9048)(z - 0.0793)}{(z + 0.9672)(z - 0.4180)}$$

- Risposta al gradino nell'uscita



- Risposta al gradino nel comando



- Forti oscillazioni dovute al polo risonante di $C(z)$ che cancella lo zero dell'impianto

SINTESI NEL PIANO Z

- Per eliminare le oscillazioni, si include il polo risonante tra gli zeri di $W_0(z)$, in modo che non compaia più in $C(z)$

$$W_0(z) = K^w \frac{(z+0.9672)(z-z_1)}{z(z^2-0.7859z+0.3679)}$$

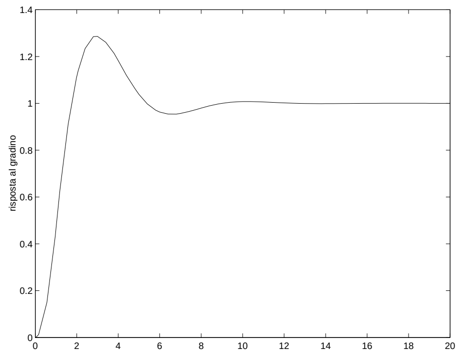
  - È necessaria l'inclusione di un polo in $z=0$, che introduce una dinamica rapida (un passo di ritardo), per preservare la causalità
  - Si effettua di nuovo il calcolo di z_1 e K^w sulla base delle specifiche statiche

$$W_0(z) = 0.4668 \frac{(z+0.9672)(z-0.3662)}{z(z^2-0.7859z+0.3679)}$$

- Controllore

$$C(z) = 9.6495 \frac{(z-0.9048)(z-0.3662)}{(z-0.5521)(z-0.2994)}$$

- Risposta al gradino nell'uscita



- Risposta al gradino nel comando