

Lucidi del corso di

Controllo digitale

Corso di Laurea triennale in Ingegneria dell'Automazione

Università di Siena, Facoltà di Ingegneria

Parte VII

Stima dello stato

Sintesi del regolatore

Gianni Bianchini

© 2003-2006 - Il presente documento è rilasciato nei termini di licenze

Creative Commons come indicato su

<http://control.dii.unisi.it/giannibi/teaching>

STIMA DELLO STATO: MOTIVAZIONI

- Abbiamo analizzato il controllo in retroazione dallo stato

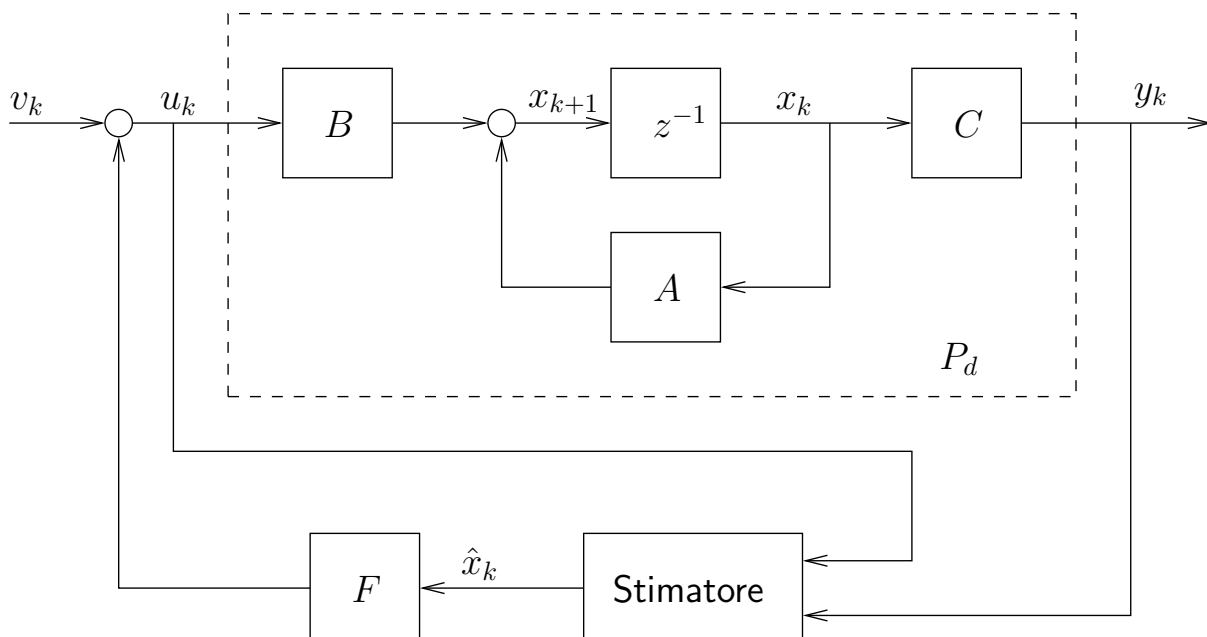
$$u_k = Fx_k + v_k$$

che può essere progettato secondo diversi criteri

- Allocazione degli autovalori sulla base di specifiche di transitorio
 - Tecniche ottime (discusse in seguito)
- In generale non sono disponibili misure dell'intero stato, ma solo di opportune variabili dette *accessibili*

Problema della stima dello stato. Calcolare istante per istante una stima \hat{x}_k del valore delle variabili di stato x_k a partire da misurazioni delle variabili accessibili (l'ingresso u_k ed un'uscita misurabile y_k)

- Se la stima è esatta istante per istante, in linea di principio è possibile utilizzare i metodi nello spazio degli stati retroazionando il valore stimato
- Quando è possibile fare questo?



OSSERVABILITA'

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k & x_k \in \mathbb{R}^n \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

Problema dell'osservabilità. Determinare lo stato iniziale x_0 del sistema a partire dalla sequenza di uscita y_0, y_1, \dots (e della sequenza di ingresso se presente)

- Esaminiamo l'uscita del un sistema in evoluzione libera

$$y_k = CA^k x_0 \quad k = 0, 1, \dots$$

- Se due stati iniziali x_0^1 e x_0^2 producono la stessa sequenza y_k per $k = 0, 1, \dots, K-1$, allora non si è in grado di decidere, osservando K campioni dell'uscita, quale dei due abbia generato l'evoluzione del sistema. Questi stati si dicono *indistinguibili nel futuro* in K passi.
- In particolare, se uno stato x_0 è tale che $y_0 = y_1 = \dots = y_{K-1} = 0$, esso è indistinguibile dallo stato nullo e si dice *inosservabile* in K passi.
- Il vettore dei primi K campioni di uscita si può esprimere come

$$Y_K = O_K x_0$$

dove

$$Y_K = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{K-1} \end{bmatrix} ; \quad O_K = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{K-1} \end{bmatrix}$$

- Se si riesce a risolvere univocamente questo sistema lineare rispetto a x_0 , allora si è in grado di ricostruire lo stato iniziale a partire dall'osservazione di K campioni dell'uscita!

OSSERVABILITA'

$$Y_K = O_K x_0$$

- L'insieme degli stati x_0 inosservabili in K passi, che producono cioè uscita nulla per K passi ($Y_K = [0 \dots 0]'$), è quindi dato da

$$\mathcal{O}_K = \ker O_K$$

- Il sottospazio \mathcal{O}_K di \mathbb{R}^n è detto *sottospazio inosservabile* in K passi
- Risulta

$$\ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{K-1} \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \forall K > n$$

infatti, per il teorema di H.C., CA^{k-1} è combinazione lineare di C, CA, \dots, CA^{n-1} $\forall k > n$.

Dunque se uno stato è inosservabile in n passi lo è anche in qualunque numero di passi $K > n$, perciò il sottospazio

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_n = \ker O_n = \ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

rappresenta l'insieme degli stati inosservabili in qualunque numero di passi ed è detto *sottospazio inosservabile*. La matrice $O = O_n$ è detta *matrice di osservabilità* del sistema

- Il sistema (la coppia (A, C)) è detto *completamente osservabile* se non esistono stati inosservabili, cioè se

$$\mathcal{O} = \{0\} \Leftrightarrow \text{rank } O = n$$

OSSERVABILITA'

- Torniamo alla determinazione dello stato iniziale x_0 da osservazioni dell'uscita (uscita scalare)

$$Y_K = O_K x_0$$

- Il problema ha n incognite, per cui per avere soluzione univoca è necessario che $K \geq n$. D'altra parte per H.C. la matrice O_K non aumenta di rango all'aumentare di K per $K > n$, per cui il problema diviene

$$Y_n = O x_0$$

che ha soluzione univoca se e solo se $\text{rank } O = n$, ovvero se e solo se il sistema è completamente osservabile

- Se il sistema non è completamente osservabile, allora $Y_n = O x_0$ ha infinite soluzioni ed inoltre ogni stato iniziale x_0 è indistinguibile da un qualunque altro stato della forma $\hat{x} = x_0 + \bar{x}$ con $\bar{x} \in \mathcal{O}$, infatti la sequenza di uscita in n passi corrispondente a \hat{x} vale

$$O\hat{x} = O x_0 + O\bar{x} = O x_0$$

e dunque lo stato iniziale è noto a meno di un opportuno stato inosservabile, ovvero se \hat{x} è una qualunque soluzione di

$$Y_n = O\hat{x}$$

allora lo stato iniziale x_0 è dato da $\hat{x} - \bar{x}$ dove \bar{x} è uno stato inosservabile. Quanto valga \bar{x} non è ovviamente possibile saperlo da osservazioni dell'uscita, perché ogni stato inosservabile genera tutte uscite nulle.

RICOSTRUIBILITA'

- Nel problema del controllo, per effettuare la retroazione, si è interessati a stimare istante per istante lo stato *attuale* x_n del sistema, sulla base dell'osservazione delle uscite, piuttosto che lo stato iniziale x_0 . Per un sistema in evoluzione libera lo stato attuale vale

$$x_n = A^n x_0$$

- Se il sistema è completamente osservabile è possibile calcolare

$$x_0 = O^{-1} Y_n$$

e dunque risulta

$$x_n = A^n O^{-1} Y_n$$

- Se il sistema non è osservabile, sia \hat{x} è una delle infinite soluzioni di $Y_n = O\hat{x}$. Da quanto già detto risulta $x_0 = \hat{x} - \bar{x}$ dove \bar{x} è uno stato inosservabile e non noto. Dunque

$$x_n = A^n x_0 = A^n \hat{x} - A^n \bar{x}$$

che non si può calcolare perché non si conosce \bar{x} . Se tuttavia si sa a priori che per ogni $\bar{x} \in \mathcal{O}$ risulta $A^n \bar{x} = 0$, ovvero,

$$\mathcal{O} \subseteq \ker A^n$$

allora si ha

$$x_n = A^n \hat{x}$$

e dunque lo stato attuale x_n è ricostruibile conoscendo solo \hat{x} , seppure non sia noto x_0 . Se vale la condizione $\mathcal{O} \subseteq \ker A^n$, il sistema è detto pertanto *completamente ricostruibile*.

DUALITA'

- Sia dato il sistema Σ definito dalle matrici (A, B, C)

$$\Sigma = (A, B, C)$$

- Si definisce sistema *duale*

$$\Sigma^* = (A^*, B^*, C^*) \quad \text{dove } A^* = A', B^* = C', C^* = B'$$

che ha tanti ingressi quante sono le uscite di Σ e tante uscite quanti sono gli ingressi di Σ

- Nota. Il duale di Σ^* è Σ
- Relazione tra la matrice di osservabilità O di Σ e la matrice di raggiungibilità R^* di Σ^*

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C' & A'C' & \dots & (A')^{n-1}C' \end{bmatrix}' = (R^*)'$$

– Analogamente per R ed O^*

$$R = (O^*)'$$

– Dalle condizioni di rango che definiscono la completa raggiungibilità/osservabilità segue allora che

Σ è compl. osservabile $\Leftrightarrow \Sigma^*$ è compl. raggiungibile

Σ è compl. raggiungibile $\Leftrightarrow \Sigma^*$ è compl. osservabile

DECOMPOSIZIONE DI OSSERVABILITA'

- Dato $\Sigma = (A, B, C)$, si consideri una trasformazione di coordinate nello spazio degli stati definita da una matrice T

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \quad ; \quad \tilde{B} = T^{-1}B \quad ; \quad \tilde{C} = CT$$

trasponendo queste relazioni si ha

$$\tilde{A}' = T'A'(T')^{-1} \quad ; \quad \tilde{C}' = T'C' \quad ; \quad \tilde{B}' = B'(T')^{-1}$$

e dunque se si applica nel duale Σ^* la trasformazione di coordinate definita da $T^* = (T')^{-1}$, il duale nella nuova base risulta

$$\tilde{A}^* = T^{*-1}A^*T^* \quad ; \quad \tilde{B}^* = T^{*-1}B^* \quad ; \quad \tilde{C}^* = C^*T^*$$

- Sia $\Sigma = (A, B, C)$ non completamente osservabile, allora il suo duale $\Sigma^* = (A', C', B')$ è non completamente raggiungibile ed ammette una trasformazione di coordinate T^* che lo porta in decomposizione di raggiungibilità

$$\tilde{A}' = \begin{bmatrix} A'_o & A'_{o\bar{o}} \\ 0 & A'_{\bar{o}} \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{C}' = \begin{bmatrix} C'_o \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{B}' = \begin{bmatrix} B'_o & B'_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

- Quindi, mediante la trasformazione di coordinate definita da $T = (T^*)^{-1}$

$$x_k = T \begin{bmatrix} z_k^o & z_k^{\bar{o}} \end{bmatrix}'$$

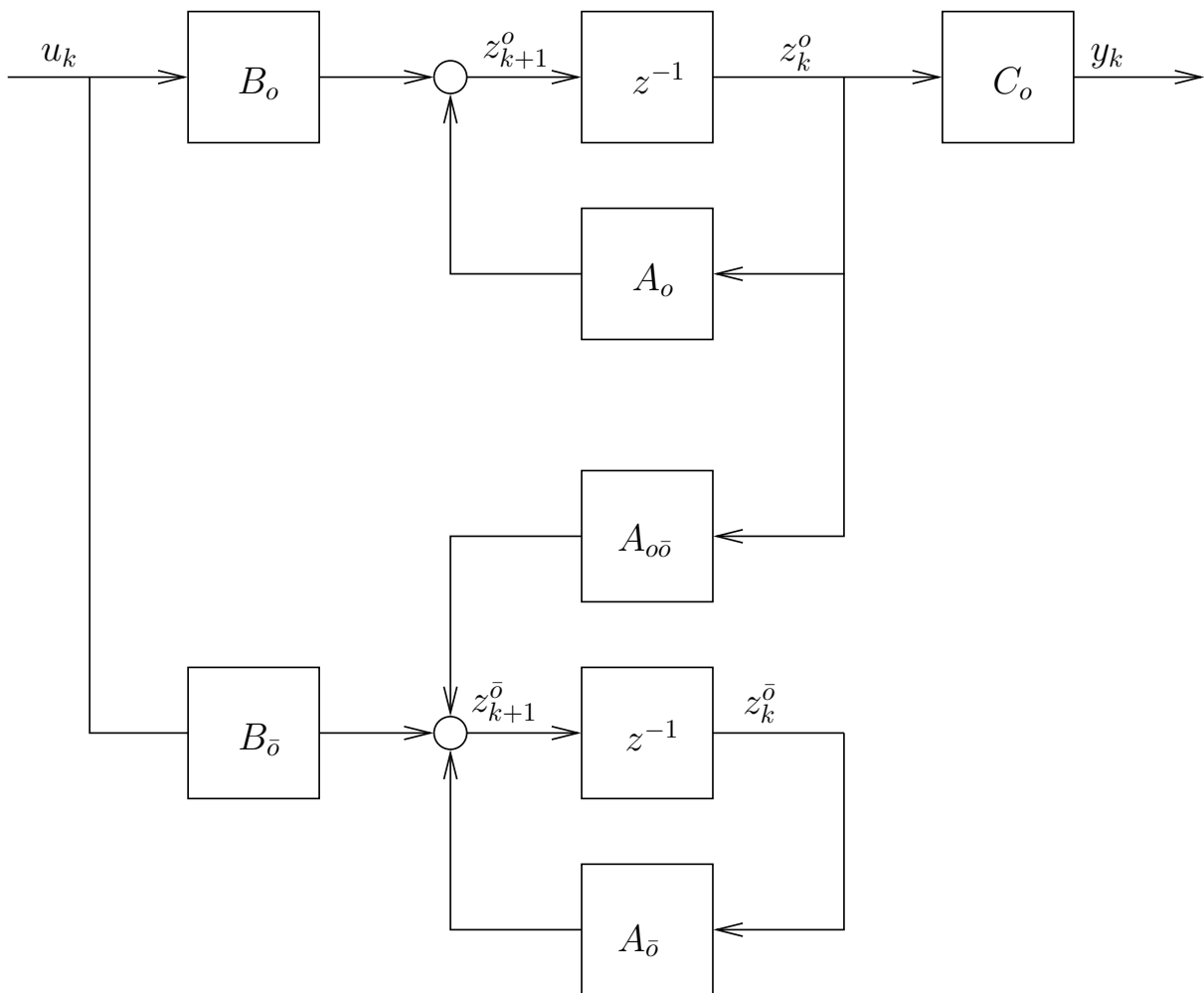
il sistema primale Σ viene portato nella forma

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C_o & 0 \end{bmatrix}$$

Questa forma è detta *decomposizione canonica di osservabilità*

DECOMPOSIZIONE DI OSSERVABILITA'

- Il sottosistema definito da (A_o, B_o, C_o) è completamente osservabile e viene detto sottosistema osservabile
- Il sottosistema definito da $(A_{\bar{o}}, B_{\bar{o}}, 0)$ ha un'evoluzione cui corrispondono uscite tutte nulle e viene pertanto detto sottosistema inosservabile
- Gli autovalori di A sono dati dall'insieme degli autovalori di A_o (autovalori osservabili) e di $A_{\bar{o}}$ (autovalori inosservabili)



- L'ingresso non influisce sulla proprietà di osservabilità, poiché il sottosistema inosservabile ha uscite sempre nulle indipendentemente dall'ingresso

DECOMPOSIZIONE DI OSSERVABILITA'

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{bmatrix} ; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} ; \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C_o & 0 \end{bmatrix}$$

- La matrice di trasformazione che porta il sistema nella decomposizione di osservabilità è della forma

$$T = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_{n_o} & v_{n_o+1} & \dots & v_n \end{bmatrix}$$

dove v_{n_o+1}, \dots, v_n è una base del sottospazio inosservabile \mathcal{O} e w_1, \dots, w_{n_o} è un suo completamento per ottenere una base di \mathbb{R}^n . Infatti le ultime $n - n_o$ componenti dello stato in decomposizione ($z_k^{\bar{o}}$) sono quelle che producono uscite identicamente nulle, quindi sono le componenti dello stato sul sottospazio inosservabile

- Gli autovalori del sottosistema non osservabile non compaiono tra i poli della funzione di trasferimento $G(z)$. Si prova infatti in modo analogo al caso della decomposizione di raggiungibilità che risulta

$$G(z) = C_o(zI - A_o)^{-1}B_o$$

Ricordando anche il risultato sulla decomposizione di raggiungibilità si ricava il seguente

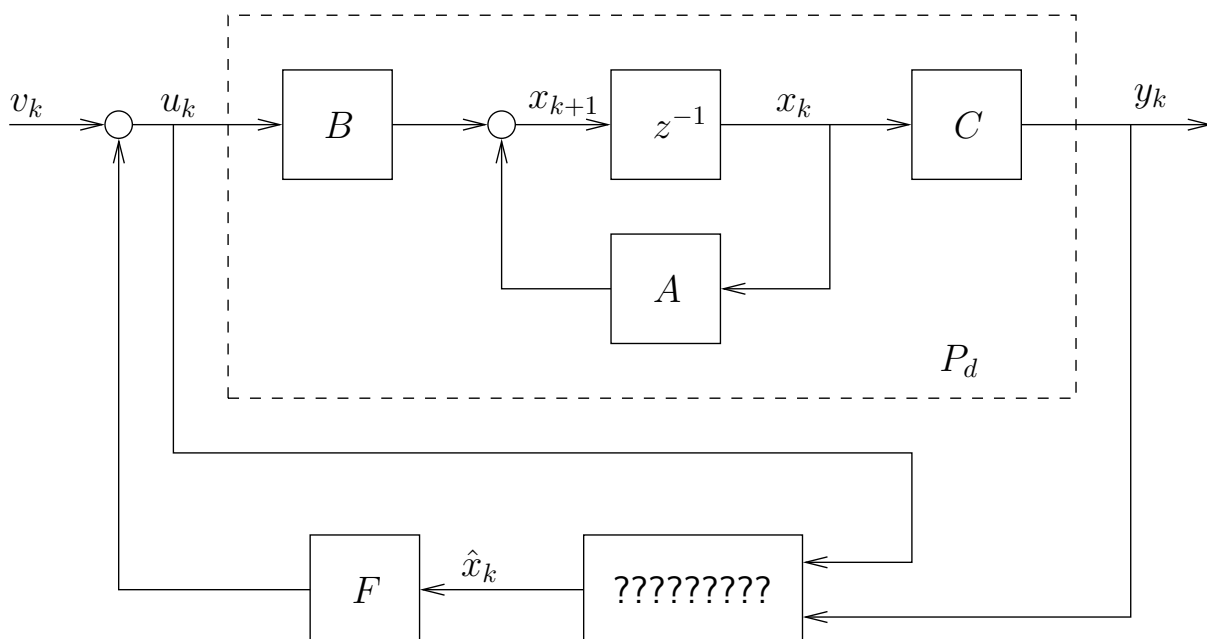
Teorema. La funzione di trasferimento $G(z)$ contiene come poli solo gli autovalori della parte *raggiungibile E osservabile* del sistema

- Il sistema è completamente ricostruibile se e solo se gli autovalori della sua parte non osservabile sono tutti nulli. Questa condizione infatti fa sì che la risposta libera della componente inosservabile dello stato vada a zero dopo n passi per qualunque condizione iniziale, rendendo quindi noto l'intero stato al passo n dalla sola conoscenza della parte osservabile.

RIVELABILITA'

- Un sistema si dice *rivelabile* se la sua parte non osservabile ha tutti autovalori asintoticamente stabili
- La rivelabilità equivale alla possibilità di determinare asintoticamente (non in tempo finito) il valore dello stato attuale da osservazioni dell'uscita. Infatti in tal caso la risposta libera della parte inosservabile dello stato si esaurisce, anche se questo succede solo asintoticamente e non dopo un numero finito di passi
- Un sistema è rivelabile se e solo se il suo duale è stabilizzabile (vedi decomposizione canonica)

Problema. Dato un sistema osservabile o almeno rivelabile, determinare un meccanismo per stimare *in linea* il valore dello stato, in modo da poter utilizzare una sua retroazione per controllare il sistema.

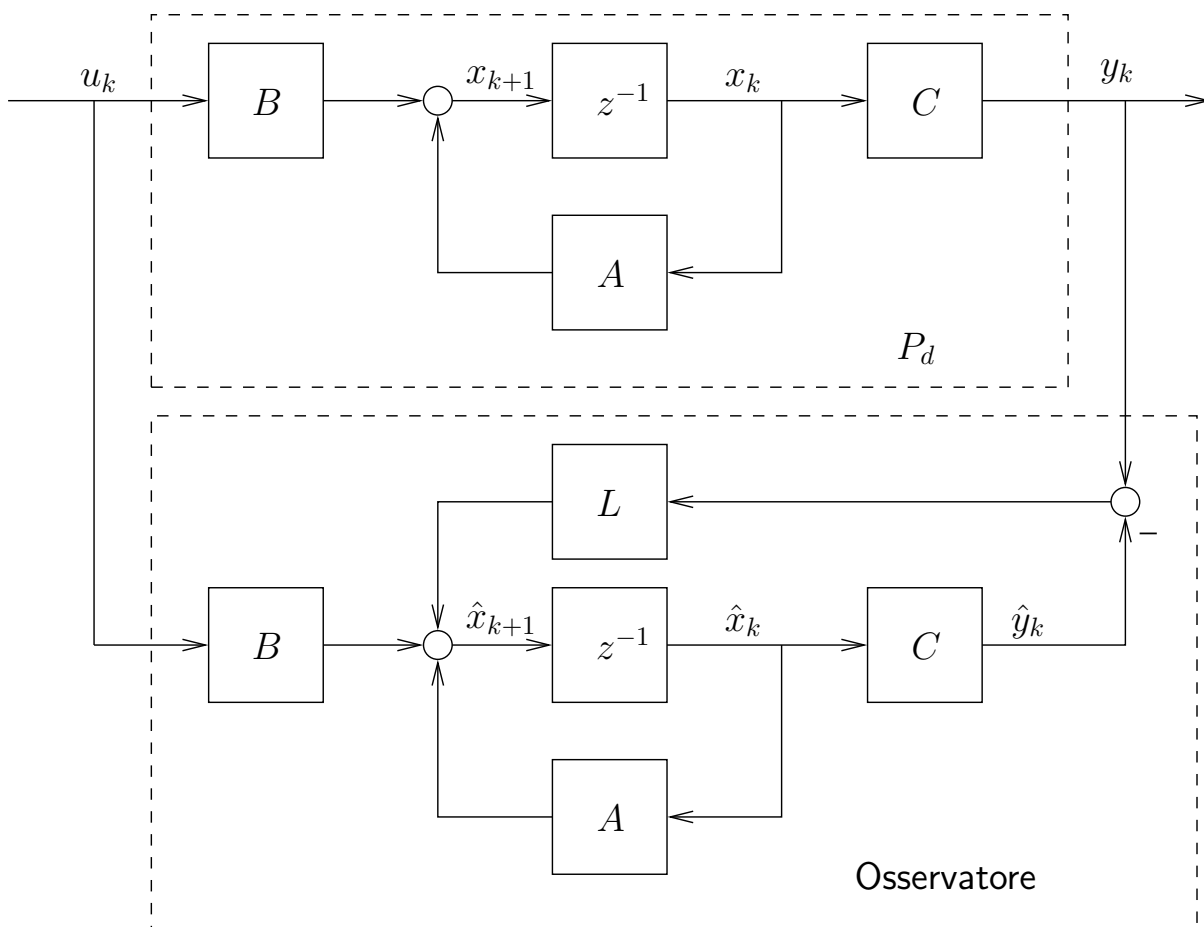


OSSERVATORE ASINTOTICO

Idea. Si affianca al sistema di cui si vuole stimare lo stato un sistema simulato, che funge da stimatore, con la stessa dinamica e di cui è ovviamente possibile misurare lo stato. Inoltre si introduce un termine di retroazione che sia proporzionale all'errore che lo stimatore sta commettendo rispetto al sistema vero. Questo errore può essere valutato solo in termini di uscita, visto che questa è l'unica informazione di cui si dispone sul sistema vero

- Evoluzione dello stato dello stimatore

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_k - \hat{y}_k)$$



Osservatore di Luenberger

OSSERVATORE ASINTOTICO

- Evoluzione del sistema complessivo

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x} + Bu_k - LC(\hat{x}_k - x_k)$$

- Evoluzione dell'errore di stima $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$

$$\tilde{x}_{k+1} = (A - LC)\tilde{x}_k$$

Si osservi che la dinamica dell'errore di stima dipende dalla matrice L , che può essere scelta arbitrariamente. Inoltre non dipende dall'ingresso

- Il sistema duale dell'evoluzione dell'errore di stima

$$\pi_{k+1} = (A' - C'L')\pi_k$$

ci ricorda molto (troppo) da vicino il problema di allocazione degli autovalori

$$\pi_{k+1} = (A^* + B^*F^*)\pi_k \quad ; \quad A^* = A', \quad B^* = C', \quad F^* = -L'$$

- Se la coppia (A^*, B^*) è raggiungibile, allora è possibile determinare F^* in modo da posizionare arbitrariamente gli autovalori di $A^* + B^*F^*$
- Se la coppia (A, C) è osservabile, allora (A^*, B^*) è raggiungibile, quindi è possibile determinare F^* in modo da stabilizzare asintoticamente $A^* + B^*F^*$, ovvero L in modo da stabilizzare $A - LC$ (per $L = -F^*$, gli autovalori di $A - LC$ e $A^* + B^*F^*$ coincidono perché le due matrici sono l'una la trasposta dell'altra). In questo modo l'osservatore fornisce una stima \hat{x}_k dello stato del sistema x_k il cui errore \tilde{x}_k rispetto allo stato reale tende asintoticamente a zero con la dinamica assegnata agli autovalori di $A - LC$ tramite la scelta di L !

OSSERVATORE ASINTOTICO

- Se il sistema non è osservabile ma rivelabile, il suo duale è stabilizzabile, dunque è possibile determinare L che, pur allocando i soli autovalori osservabili, rende la dinamica dell'osservatore asintoticamente stabile e dunque rende lo stato stimato \hat{x}_k asintoticamente convergente allo stato vero x_k
- Se il sistema è osservabile, in particolare è possibile allocare tutti gli autovalori dell'osservatore in zero, e quindi lo stato stimato converge in al più n passi (osservatore *deadbeat*)
- L'osservatore *deadbeat* può essere ottenuto anche nel caso in cui eventuali autovalori inosservabili siano tutti nulli, ovvero nel caso in cui il sistema sia ricostruibile
- Scilab: per sintetizzare L si usa la stessa funzione impiegata per l'allocazione degli autovalori (si effettua una allocazione degli autovalori sul sistema duale)

$$L = \text{ppol}(A', C', P)'$$

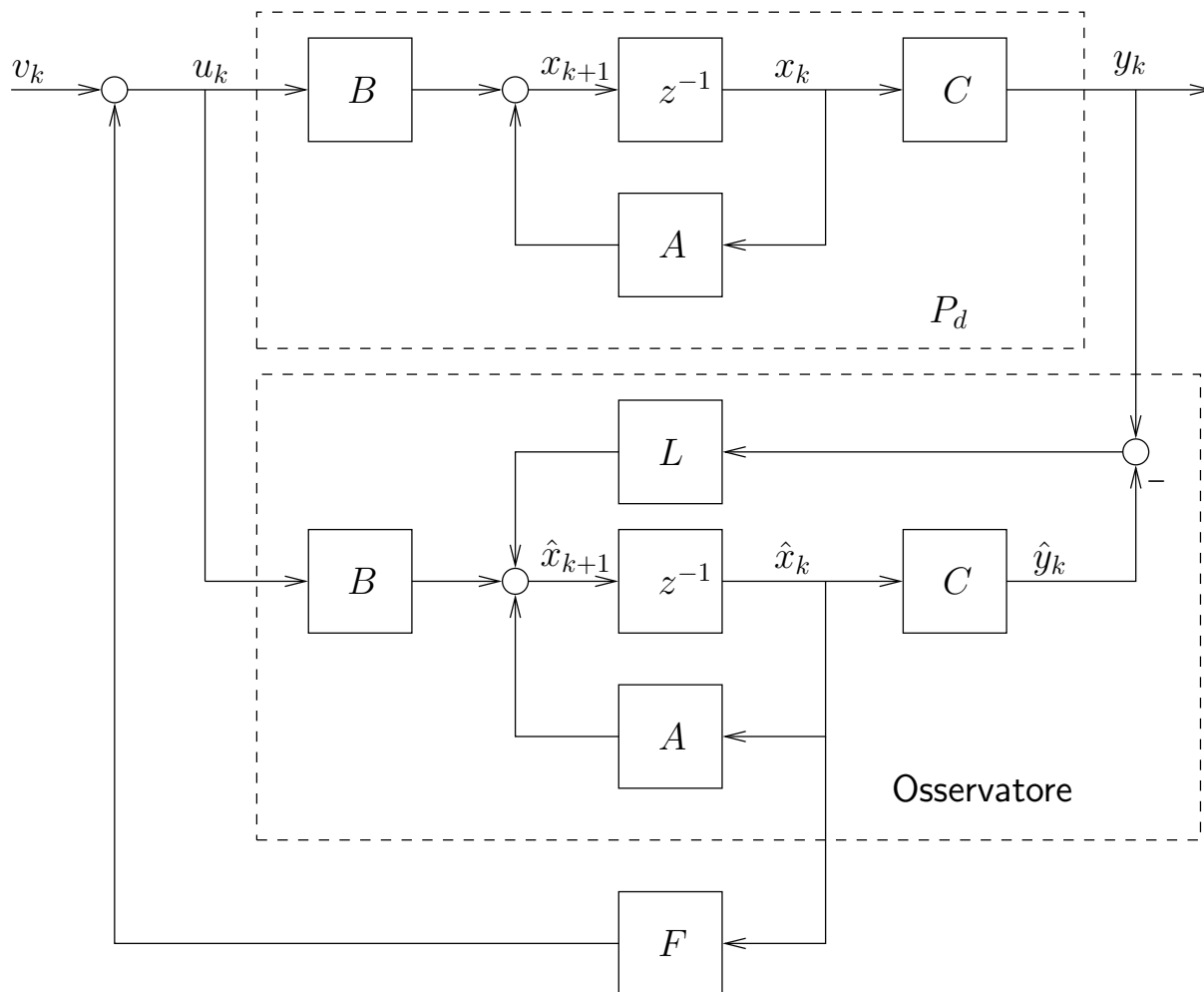
dove P è il vettore degli autovalori desiderati dell'osservatore (notare la trasposizione ed il cambio di segno rispetto alla formula di allocazione degli autovalori per il controllo)

PROPRIETA' STRUTTURALI E STABILITA'

- Definizione di *stabilità interna*: tutte le variabili (ovvero lo stato) del sistema hanno evoluzione asintoticamente stabile (la risposta libera nello stato è convergente e la risposta forzata nello stato a qualunque segnale limitato è limitata)
 - Il sistema è internamente stabile se e solo se tutti gli autovalori hanno modulo minore di 1
- Definizione di *stabilità esterna* (o *ILUL*): l'evoluzione dell'uscita in corrispondenza ad ingressi limitati è limitata
 - Il sistema è ILUL stabile se e solo se la funzione di trasferimento ha tutti i poli con modulo minore di 1
- Abbiamo osservato che la funzione di trasferimento ha come poli tutti e soli gli autovalori raggiungibili e osservabili del sistema
 - Se il sistema è raggiungibile e osservabile allora 1) non ci sono cancellazioni polo-zero nella funzione di trasferimento e 2) la stabilità interna è equivalente alla stabilità ILUL
- Se il sistema è ILUL stabile ma non è raggiungibile e osservabile, vi sono alcune dinamiche dello stato che non compaiono nella funzione di trasferimento. In questo caso il sistema è internamente stabile se e solo se gli autovalori irraggiungibili e quelli inosservabili sono asintoticamente stabili (modulo minore di 1). Se questo non accade, ci sono cancellazioni polo-zero instabili nella funzione di trasferimento.

SINTESI DEL REGOLATORE (COMPENSATORE DINAMICO)

- Si desidera utilizzare i metodi nello spazio degli stati retroazionando la stima dello stato fornita da un osservatore asintotico



$$u_k = F\hat{x}_k + v_k$$

- Alla dinamica dell'anello chiuso contribuiscono la dinamica del sistema e quella dell'osservatore, che retroaziona il sistema
- Quale influenza ha l'osservatore sulla dinamica complessiva?

SINTESI DEL REGOLATORE

- Equazioni del sistema impianto + stimatore + retroazione

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_k - C\hat{x}_k)$$

$$u_k = F\hat{x}_k + v_k$$

$$y_k = Cx_k$$

- Introducendo la variabile errore di stima $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$ si ottiene

$$x_{k+1} = (A + BF)x_k - BF\tilde{x}_k + Bv_k$$

$$\tilde{x}_{k+1} = (A - LC)\tilde{x}_k$$

$$y_k = Cx_k$$

- Introducendo lo stato esteso $\xi_k = [x'_k \ \tilde{x}'_k]'$ il sistema complessivo ad anello chiuso si scrive quindi

$$\xi_{k+1} = \begin{bmatrix} A + BF & -BF \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \xi_k + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \xi_k$$

- Funzione di trasferimento ad anello chiuso $W(z) = Y(z)/V(z)$

$$W(z) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - (A + BF) & BF \\ 0 & zI - (A - LC) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= C[zI - (A + BF)]^{-1}B$$

- La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso, e quindi il comportamento ingresso-uscita del sistema, non dipende dalla dinamica dell'osservatore ed è identica al caso della retroazione dall'intero stato!

PRINCIPIO DI SEPARAZIONE

- Data la struttura a blocchi della matrice di evoluzione del sistema complessivo ad anello chiuso, è possibile assegnare i suoi autovalori allocando separatamente quelli di $A + BF$ e quelli di $A - LC$
- Il guadagno F non influenza la dinamica dell'errore di stima
- Il guadagno L non influenza i poli della funzione di trasferimento dell'anello chiuso $W(z) = C[zI - (A + BF)]^{-1}B$ e solo gli autovalori di $A + BF$ compaiono come poli in $W(z)$. Ci sono quindi cancellazioni polo-zero corrispondenti alla dinamica di \tilde{x}_k (autovalori di $A - LC$). Tale dinamica è *non raggiungibile*, infatti il sistema ad anello chiuso è in decomposizione di raggiungibilità con $A_r = A + BF$, $A_{\bar{r}} = A - LC$, $B_r = B$. L'errore di stima \tilde{x}_k evolve quindi sempre liberamente
- La f.d.t. $W(z)$ dipende solo da F ma rende ragione solo del comportamento ingresso-uscita del sistema, non della sua risposta libera. La scelta di L influisce invece sul comportamento in evoluzione libera del sistema. Infatti la risposta libera nell'uscita vale

$$y_k^l = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + BF & -BF \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}^k \xi_0$$

– Si verifica facilmente che nell'espressione di y_k^l per $k \geq 2$ compare L

- Per ridurre l'effetto dello stimatore sul transitorio dovuto alla risposta libera, può essere conveniente scegliere L in modo che la dinamica dell'errore di stima risulti molto più rapida della dinamica del sistema. L'osservatore può essere ad esempio deadbeat (tutti gli autovalori in $z = 0$)

CONTROLLO DEADBEAT

- *Controllo deadbeat in retroazione dallo stato*: se il sistema è controllabile, il guadagno F può essere scelto in modo da posizionare tutti gli n autovalori di $A + BF$ in $z = 0$, in modo che la risposta vada a regime in al più n passi
- Se si impiega un osservatore, gli autovalori dell'osservatore (errore di stima) non compaiono come poli nella funzione di trasferimento $W(z)$ ad anello chiuso, dunque la risposta *forzata* del sistema va a regime in n passi quando F è scelta in modo che $A + BF$ sia deadbeat
- La risposta libera in generale *non* va a zero in tempo finito anche se $A + BF$ è deadbeat, poiché la sua evoluzione dipende da L
- Tuttavia se anche l'osservatore è scelto di tipo deadbeat, allora l'evoluzione libera del sistema complessivo

$$\xi_{k+1}^l = \begin{bmatrix} A + BF & -BF \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \xi_k$$

va a zero in al più $2n$ passi (il sistema con osservatore ha infatti ordine $2n$), dunque l'evoluzione completa del sistema (risposta libera più risposta forzata) va a regime dopo al più $2n$ passi.

- Con *compensatore dinamico deadbeat* si intende un compensatore dinamico in cui sia i poli del sistema sia quelli dell'osservatore sono posti in $z = 0$