

Lucidi del corso di

Controllo digitale

Corso di Laurea triennale in Ingegneria dell'Automazione

Università di Siena, Facoltà di Ingegneria

Parte VIII

Cenni di controllo ottimo

Gianni Bianchini

© 2003-2006 - Il presente documento è rilasciato nei termini di licenze

Creative Commons come indicato su

<http://control.dii.unisi.it/giannibi/teaching>

UN APPROCCIO ALTERNATIVO

- Metodi classici di sintesi
 - Scelta di poli dominanti/autovalori sulla base di proprietà temporali o frequenziali (allocazione degli autovalori, sintesi diretta)
 - Impostazione della risposta in frequenza sulla base di relazioni empiriche con la risposta nel tempo (sintesi per tentativi)
 - Criteri empirici (taratura dei regolatori industriali standard)
- In alcuni metodi moderni si caratterizzano le specifiche in termini di *norme* di segnali, ovvero di quantità dipendenti dall'intera evoluzione del segnale
 - Esempio: norma quadratica (energia del segnale)

$$\|u\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^2$$

- Controllo ottimo
 - Si progetta il controllo in modo da rendere minimo (o massimo) un opportuno funzionale detto *indice di costo* (o *di prestazione*)
 - L'indice di costo è di solito definito in termini di norme di segnali tiene tipicamente conto della necessità di soddisfare obiettivi contrastanti tra loro, ciascuno dei quali *pesa* in maniera opportuna nel funzionale
 - Il progetto del controllo implica la risoluzione di un problema di ottimizzazione
 - In molti problemi di interesse, la soluzione ottima si presenta sotto forma di retroazione dello stato

CONTROLLO OTTIMO: ESEMPI

- Raggiungere un obiettivo assegnato impiegando in modo ottimale la risorsa disponibile (ad es. minimizzando l'energia impiegata)
 - Strategia ottimale di guida per spostare un veicolo da A a B lungo un percorso con caratteristiche assegnate, minimizzando il consumo di carburante
- Soddisfare requisiti di tipo economico (costi/benefici), biologico, ecologico, sociale
 - Gestione di una risorsa naturale (pesca, boschi): scegliere il compromesso ottimo tra il profitto economico dovuto allo sfruttamento e la sopravvivenza della specie
- Requisiti temporali: raggiungere un dato obiettivo in tempo minimo
- Il controllo ottimo può essere visto come un problema di ottimizzazione standard
 - L'obiettivo da raggiungere è codificato nell'ottimizzazione di un funzionale di costo
 - Le equazioni della dinamica del sistema da controllare costituiscono i vincoli del problema
 - L'incognita è rappresentata dalla sequenza di ingressi da applicare in un dato intervallo di tempo, eventualmente infinito

CONTROLLO OTTIMO: FORMULAZIONE

- Sistema dinamico lineare stazionario a tempo discreto

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k & ; \quad x \in \mathbb{R}^n \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

(il sistema è eventualmente un modello discretizzato)

Problema del controllo ottimo. Assegnati il sistema, una condizione iniziale x_0 ed un orizzonte temporale $0, 1, \dots, K$, determinare la sequenza d'ingresso

$$U_K = [u_{K-1} \ u_{K-2} \ \dots \ u_0]'$$

che applicata al sistema genera un'evoluzione tale da rendere minimo un opportuno indice di costo

$$J(U_K, x_0)$$

Nota. Il valore dell'indice, fissato K , dipende solo dalla condizione iniziale e dalla sequenza d'ingresso, poiché l'evoluzione del sistema è deterministica

- Esempio: assegnato uno stato iniziale x_0 ed uno stato finale \bar{x} , determinare la sequenza d'ingresso U_K che porta il sistema da x_0 a \bar{x} in K passi minimizzando l'energia dell'ingresso stesso (controllo a energia minima)

$$\min_{U_K} J(U_K, x_0) \quad \text{t.c.}$$

$$\bar{x} - A^K x_0 = R_K U_K$$

dove

$$J(U_K, x_0) = \sum_{k=0}^{K-1} u_k^2$$

CONTROLLO OTTIMO LINEARE QUADRATICO (LQ)

- Ricordiamo che una matrice quadrata M è detta definita positiva ($M > 0$) [o, rispettivamente, semidefinita positiva ($M \geq 0$)] se

$$x'Mx > 0 \quad [x'Mx \geq 0] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Problema del controllo ottimo LQ (su orizzonte finito): dato un sistema lineare stazionario a tempo discreto, una condizione iniziale x_0 ed un orizzonte temporale $0, 1, \dots, K$, determinare la sequenza di ingressi U_K che minimizza l'indice di costo

$$J(U_K, x_0) = \sum_{k=0}^{K-1} [x'_k Q x_k + u'_k R u_k] + x'_K Q_K x_K$$

dove

- il termine $x'_k Q x_k$ pesa istante per istante la deviazione dello stato x_k dallo stato nullo, assunto come obiettivo,
- il termine $u'_k R u_k$ pesa l'intensità (potenza) dell'azione di controllo al generico istante
- il termine $x'_K Q_K x_K$ pesa in modo separato l'errore all'istante finale (che determina l'esito dell'azione di controllo) ed è quindi detto costo terminale
- $Q \geq 0$, $R > 0$, $Q_K \geq 0$ sono matrici simmetriche che pesano in modo diverso i vari termini e quindi codificano le specifiche di progetto

SOLUZIONE DEL PROBLEMA LQ

Soluzione basata sul *principio della programmazione dinamica* (Bellman, 1940).

- Si supponga inizialmente di determinare, per ogni possibile valore di x_{K-1} , il valore dell'ingresso $u_{K-1} = u_{K-1}^*(x_{K-1})$ che permette di far evolvere il sistema da x_{K-1} a x_K con costo minimo. Qualunque sia la legge di controllo ottima per portare lo stato da x_0 ad x_K , l'ultimo passo di questa legge deve necessariamente essere costituito dall'ingresso $u_{K-1}^*(x_{K-1})$, poiché ogni altra scelta implica un costo più elevato per l'ultimo passo e quindi più elevato complessivamente. L'ingresso ottimo per l'ultimo passo si calcola come la soluzione di

$$\begin{aligned} V_{K-1}(x_{K-1}) &= \min_{u_{K-1}} [x'_{K-1} Q x_{K-1} + u'_{K-1} R u_{K-1} + x_K P_K x_K] \\ &= \min_{u_{K-1}} [x'_{K-1} Q x_{K-1} + u'_{K-1} R u_{K-1} \\ &\quad + (Ax_{K-1} + Bu_{K-1})' P_K (Ax_{K-1} + Bu_{K-1})] \end{aligned}$$

dove $P_K = Q_K$.

- Minimizzando rispetto a u_{K-1} si ottiene il valore ottimo dell'ingresso

$$u_{K-1}^* = -(R + B' P_K B)^{-1} B' P_K A x_{K-1}$$

- e sostituendo si ottiene il costo ottimo

$$V_{K-1}(x_{K-1}) = x'_{K-1} P_{K-1} x_{K-1}$$

dove

$$P_{K-1} = Q - A' P_K B (R + B' P_K B)^{-1} B' P_K A + A' P_K A$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA LQ

- Si supponga di voler risolvere il problema per i due passi finali, dall'istante $K - 2$ all'istante K per qualunque valore di x_{K-2} . Poiché l'ingresso ottimo per compiere l'ultimo passo è noto per ogni valore di x_{K-1} , il costo ottimo in due passi è pari al minimo rispetto a u_{K-2} di un funzionale costituito dal costo relativo al passo $K - 2$ più il costo ottimo in un passo $V_{K-1}(x_{K-1})$, dove x_{K-1} è lo stato in cui evolve il sistema applicando u_{k-2}

$$\begin{aligned} V_{K-2}(x_{K-2}) &= \min_{u_{K-2}} [x'_{K-2} Q x_{K-2} + u'_{K-2} R u_{K-2} + V_{K-1}(x_{K-1})] \\ &= \min_{u_{K-2}} [x'_{K-2} Q x_{K-2} + u'_{K-2} R u_{K-2} + x_{K-1} P_{K-1} x_{K-1}] \end{aligned}$$

e questa espressione è analoga a $V_{K-1}(x_{K-1})$, traslata indietro di un passo, quindi la soluzione ha la stessa forma traslata indietro di un passo

- Iterando il ragionamento per un orizzonte temporale di j passi, al generico passo $k = K - j$ l'ingresso ottimo vale quindi

$$u_k^* = -(R + B' P_{k+1} B)^{-1} B' P_{k+1} A x_k$$

dove la successione P_k soddisfa

$$P_k = Q - A' P_{k+1} B (R + B' P_{k+1} B)^{-1} B' P_{k+1} A + A' P_{k+1} A$$

(ricorsione di Riccati)

SOLUZIONE LQ VIA PROGRAMMAZIONE DINAMICA

- Problema di controllo ottimo LQ

$$\min_{U_K} J(U_K, x_0) = \min_{U_K} \sum_{k=0}^{K-1} [x'_k Q x_k + u'_k R u_k] + x'_K Q_K x_K$$

- Algoritmo per la soluzione

1. Inizializza

$$P_K = Q_K$$

2. Per $j = K - 1, K - 2, \dots, 0$ calcola

$$P_j = Q - A' P_{j+1} B (R + B' P_{j+1} B)^{-1} B' P_{j+1} A + A' P_{j+1} A$$

$$F_j = -(R + B' P_{j+1} B)^{-1} B' P_{j+1} A$$

3. L'ingresso ottimo al passo k è dato da

$$u_k^* = F_k x_k$$

- La legge di controllo ottimo è una retroazione tempo variante dallo stato

CONTROLLO LQ SU ORIZZONTE INFINITO

- Nei casi pratici, il problema del controllo consiste nel far raggiungere al sistema una situazione di regime dopo un transitorio rispondente a determinate caratteristiche
 - La soluzione su orizzonte finito è riduttiva, è necessaria una legge di controllo che minimizzi il costo necessario a raggiungere la condizione di regime
 - Il costo non deve divergere quando il sistema è a regime
 - Il controllo su orizzonte finito va precalcolato per ogni passo, questo non può essere fatto per un'orizzonte infinito
 - La legge di controllo, oltre a minimizzare il costo, deve stabilizzare asintoticamente il sistema

- Formulazione problema LQ su orizzonte temporale infinito

$$V_{\infty}(x_0) = \min_U J(U, x_0) = \min_U \sum_{k=0}^{\infty} [x_k' Q x_k + u_k' R u_k]$$

dove U è la sequenza infinita di ingressi

$$U = [\dots, u_1, u_0]'$$

- Sarebbe auspicabile riuscire a trovare una legge di controllo in forma di retroazione, preferibilmente stazionaria della forma $u_k = F_{-\infty} x_k$

CONTROLLO LQ SU ORIZZONTE INFINITO

Idea della soluzione

- Si supponga di voler risolvere il problema su un orizzonte temporale $0, \dots, K$ con K arbitrariamente grande. La ricorsione di Riccati va inizializzata a $P_K = 0$ (costo terminale nullo).
- Se si suppone che la ricorsione di Riccati converga a una matrice $P_{-\infty}$ per $k \rightarrow -\infty$, allora si ha $P_k \approx P_{-\infty}$ se $k \ll K$. Se si assume K tendente all'infinito, si tende allora ad avere $P_k = P_{-\infty}$ per ogni k finito.

Teorema 1. Sia la coppia (A, B) stabilizzabile. Allora la ricorsione di Riccati

$$P_K = 0$$

$$P_k = Q - A'P_{k+1}B(R + B'P_{k+1}B)^{-1}B'P_{k+1}A + A'P_{k+1}A$$

converge a una matrice $P_{-\infty}$ simmetrica e semidefinita positiva. Tale matrice è una delle soluzioni della *equazione algebrica di Riccati (ARE)*

$$P_{-\infty} = Q - A'P_{-\infty}B(R + B'P_{-\infty}B)^{-1}B'P_{-\infty}A + A'P_{-\infty}A$$

Inoltre la ARE ammette almeno una soluzione simmetrica e semidefinita positiva.

Teorema 2. Sia (A, B) stabilizzabile e sia $P_{-\infty}$ la soluzione simmetrica e semidefinita positiva di ARE che rappresenta il limite della ricorsione di Riccati. Allora la legge di controllo in retroazione dallo stato

$$u_k^* = F_{-\infty}x_k$$

dove

$$F_{-\infty} = -(R + B'P_{-\infty}B)^{-1}B'P_{-\infty}A$$

rende minimo il costo su orizzonte infinito $J(U, x_0)$.

CONTROLLO LQ E STABILIZZAZIONE

- Si fattorizzi la matrice peso (simmetrica) Q come

$$Q = C'C$$

questo equivale a considerare il costo

$$J(U, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} [y_k^2 + u_k' R u_k]$$

definendo l'uscita del sistema come $y_k = Cx_k$.

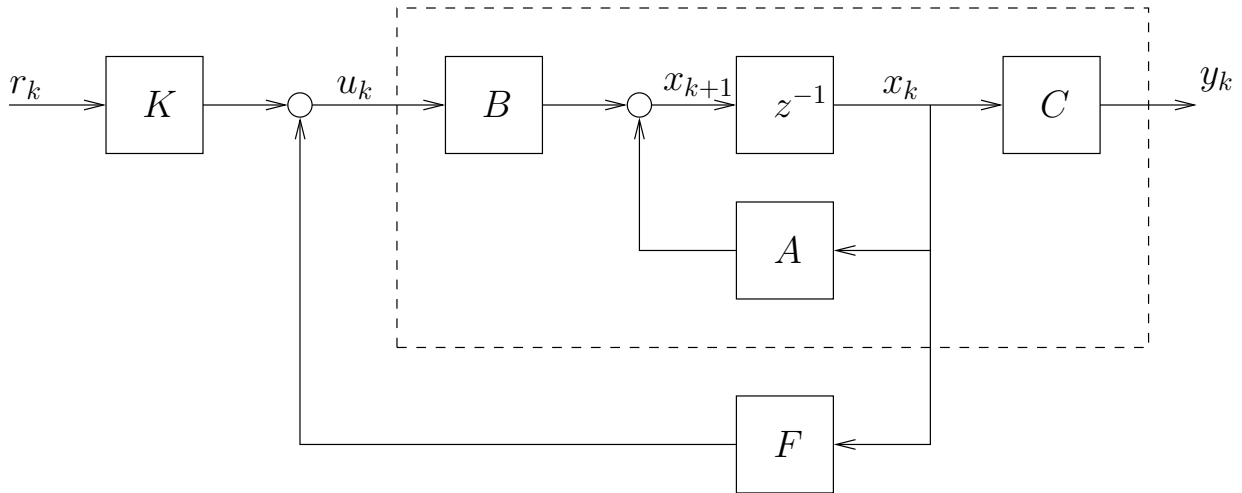
Teorema 3. Sia (A, B) stabilizzabile e $Q = C'C$. Sia $P_{-\infty}$ la soluzione di ARE associata alla legge di controllo ottimo (limite della ricorsione). Tale legge di controllo è stabilizzante se e solo se la coppia (A, C) è rivelabile.

Dimostrazione qualitativa. Se il sistema non è osservabile, le componenti non osservabili dello stato non vengono pesate nel costo perché non influenzano l'uscita. Se il sistema non è rivelabile, il costo può comunque convergere anche se tali componenti non vanno asintoticamente a zero.

Teorema 4. Sia (A, B) stabilizzabile e $Q = C'C$.

1. La ARE ammette al più una soluzione simmetrica semidefinita positiva P_s a cui corrisponde una legge di controllo stabilizzante
2. Tale soluzione esiste se e solo se la matrice $\begin{bmatrix} zI - A \\ C \end{bmatrix}$ ha rango pieno per ogni z complesso di modulo unitario
3. Se esiste la soluzione P_s , essa può essere ottenuta come limite per $k \rightarrow -\infty$ della ricorsione di Riccati, ed è quindi coincidente con la soluzione ottima $P_{-\infty}$ se (A, C) è rivelabile.

INSEGUIMENTO OTTIMO IN SENSO LQ



- Obiettivo. Determinare F e K per inseguire a regime un riferimento costante $r_k = r$ minimizzando

$$J(U, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} [\tilde{y}_k^2 + \rho \tilde{u}_k^2]$$

dove $\tilde{y}_k = y_k - r$ è l'errore di inseguimento e $\tilde{u}_k = u_k - u_\infty$ è lo scostamento del comando dal suo valore di regime. u_∞ è nullo se l'impianto contiene un'azione integrale (i.e., A ha autovalori in $z = 1$)

- L'evoluzione delle variazioni di x_k e y_k dai valori di regime è data da

$$\tilde{x}_{k+1} = A\tilde{x}_k + B\tilde{u}_k$$

$$\tilde{y}_k = C\tilde{x}_k$$

Dunque il problema è un problema LQ standard per il sistema alle variazioni con i pesi $Q = C'C$, $R = \rho$

- La soluzione vale

$$\tilde{u}_k^* = F_{-\infty}\tilde{x}_k$$

INSEGUIMENTO OTTIMO IN SENSO LQ

- Nello schema di controllo risulta

$$u_k = Fx_k + Kr$$

da cui

$$\tilde{u}_k = F\tilde{x}_k$$

e dunque la soluzione di inseguimento ottimo si ottiene con lo schema visto ponendo $F = F_{-\infty}$ dove $F_{-\infty}$ risolve il problema LQ per (A, B) con i pesi dati. Il valore di K è scelto al solito per rendere unitario il guadagno in continua.

- Ingresso ottimo

$$u_k^* = F_{-\infty}x_k + Kr \quad ; \quad K = \frac{1}{C(I - (A + BF_{-\infty}))^{-1}B}$$

Se l'impianto ha autovalori in $z = 1$, allora $u_k = \tilde{u}_k$, per cui il costo pesa effettivamente l'energia del comando.

- Si può utilizzare il criterio LQ anche per progettare i parametri F e K di uno schema di controllo con azione integrale, risolvendo il problema per il sistema aumentato (con una matrice Q di ordine $n + 1$). Nel costo viene pesata anche la variabile q_k