

Lucidi del corso di

Controllo digitale

Corso di Laurea triennale in Ingegneria dell'Automazione

Università di Siena, Facoltà di Ingegneria

Parte II

Sistemi a tempo discreto

Gianni Bianchini

© 2003-2006 - Il presente documento è rilasciato nei termini di licenze

Creative Commons come indicato su

<http://control.dii.unisi.it/giannibi/teaching>

REVISIONE TRASFORMATA ZETA

Analogamente alla trasformata di Laplace per un segnale a tempo continuo $f(t)$, si introduce la *trasformata zeta* di un segnale a tempo discreto (successione) $\{f_k\}$. Tale concetto permette di risolvere equazioni alle differenze con metodi algebrici e di definire la funzione di trasferimento per sistemi LTITD.

Definizione. Data una successione $\{f_k\}$ con $f_k = 0 \quad \forall k < 0$, la *trasformata zeta* di $\{f_k\}$ è una funzione $F(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$F(z) = \mathcal{Z}[f_k] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots$$

N.B. La trasformata zeta, a rigore, è definita solo per gli $z \in \mathbb{C}$ dove la serie converge. Ciò non è essenziale per le applicazioni.

- Impulso discreto

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \mathcal{Z}[\delta_k] = 1$$

- Gradino unitario

$$1_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k \geq 0 \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases} \longrightarrow \mathcal{Z}[1_k] = \frac{z}{z-1}$$

- Esponenziale

$$f_k = \begin{cases} \lambda^k & \text{se } k \geq 0 \\ 0 & \text{se } k < 0 \end{cases} \longrightarrow \mathcal{Z}[f_k] = \frac{z}{z-\lambda}$$

REVISIONE TRASFORMATA ZETA

Proprietà della trasformata zeta

- Linearità

$$\mathcal{Z}[\alpha f_k + \beta g_k] = \alpha F(z) + \beta G(z)$$

- Trasformata della successione anticipata di un passo

$$g_k = f_{k+1} \quad 1_k \quad \longrightarrow \quad G(z) = z(F(z) - f_0)$$

- Trasformata della successione ritardata di un passo

$$g_k = f_{k-1} \quad \longrightarrow \quad G(z) = z^{-1}F(z)$$

- Moltiplicazione per k

$$\mathcal{Z}[k f_k] = -z \frac{d}{dz} F(z)$$

- Teorema del valore finale.

Se i limiti seguenti esistono, allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)F(z)$$

- Teorema del valore iniziale

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

Definizione. Convoluzione di due successioni $\{f_k\}$ e $\{g_k\}$

$$f_k * g_k = \sum_{i=0}^k f_{k-i} g_i$$

- Teorema di convoluzione

$$\mathcal{Z}[f_k * g_k] = F(z)G(z)$$

REVISIONE TRASFORMATA ZETA

Definizione. *Antitrasformata zeta* di una funzione complessa $F(z)$: è l'operazione inversa della trasformata zeta

$$F(z) = \mathcal{Z}[f_k] \longrightarrow f_k = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) z^{k-1} dz$$

L'integrale è esteso ad una curva chiusa contenente tutte le singolarità di $F(z)$. Questa caratterizzazione è riportata solo per completezza.

N.B. Anche l'antitrasformata zeta è un'operazione lineare.

- Calcolo dell'antitrasformata per $F(z)$ razionali fratte con metodi pratici.

Esempio:

$$F(z) = \frac{z^2 + 2}{z^2 + 3z + 2}$$

– Metodo I: effettuare la divisione lunga

$$F(z) = 1 - 3z^{-1} + 9z^{-2} - 21z^{-3} + \dots$$

↓

$$f_0 = 1, \quad f_1 = -3, \quad f_2 = 9, \quad f_3 = -21$$

– Metodo II: calcolare lo sviluppo in fratti semplici ed antitrasformare le funzioni elementari ottenute (impulso, gradino, esponenziale)

$$F(z) = 1 - 3 \frac{z}{z+1} + 3 \frac{z}{z+2}$$

↓

$$f_k = \delta_k - [3(-1)^k - 3(-2)^k] 1_k$$

TRASFORMATA ZETA DI SEGNALI CAMPIONATI

Dato un segnale continuo $f(t)$, si vuole calcolare la trasformata zeta $F(z)$ del suo campionamento con periodo T (i.e., di $f_k = f(kT)$) a partire dalla trasformata di Laplace $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, in formule:

$$F(z) = \mathcal{Z}[f_k] = \mathcal{Z}[f(t)|_{t=kT} \mathbf{1}_k] = \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[F(s)]|_{t=kT} \mathbf{1}_k]$$

- Per brevità si definisce

$$\mathcal{Z}[F(s)] = \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[F(s)]|_{t=kT} \mathbf{1}_k]$$

Per linearità, si può eseguire lo sviluppo in fratti semplici di $F(s)$, ottenere le funzioni elementari e calcolare la trasformata zeta del campionamento di ciascuna di esse.

- Caso di $F(s)$ con tutti poli semplici

$$F(s) = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s - p_i} \Rightarrow F(z) = \sum_{i=1}^n \mathcal{Z}[r_i (e^{Tp_i})^k] = \sum_{i=1}^n \frac{r_i z}{z - e^{p_i T}}$$

- Caso di $F(s)$ con poli multipli: si usa la proprietà di moltiplicazione per k .

Esempio: trasformata zeta di una rampa campionata

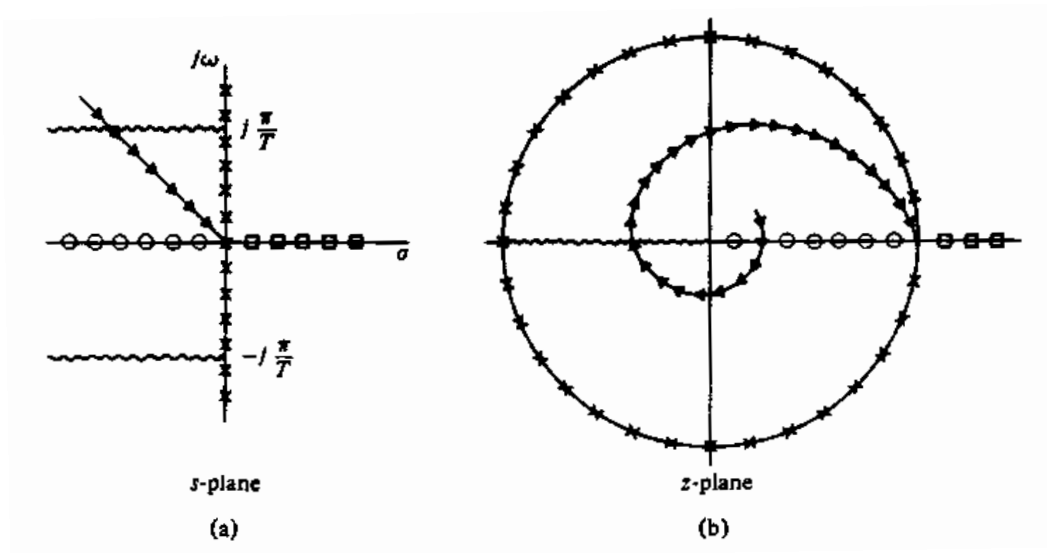
$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2}\right] = \mathcal{Z}[kT] = T(-z) \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[1_k] = -Tz \frac{d}{dz} \frac{z}{z-1} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

Proprietà generale. Per ogni polo p_i di $F(s)$, la $F(z)$ ha sempre un polo in $z_i = e^{p_i T}$, ovvero i poli di $F(s)$ si trasformano nei poli di $F(z)$ secondo la relazione

$$z = e^{sT}$$

TRASFORMATA ZETA DI SEGNALI CAMPIONATI

- Mappa della relazione $z = e^{sT}$ nel piano complesso

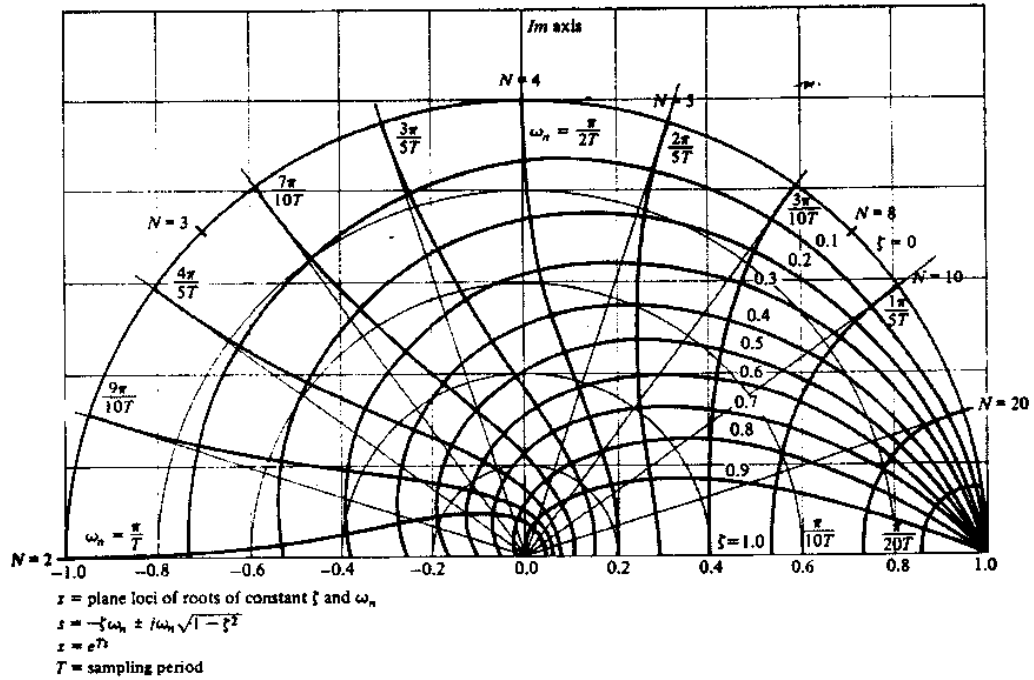


- Proprietà

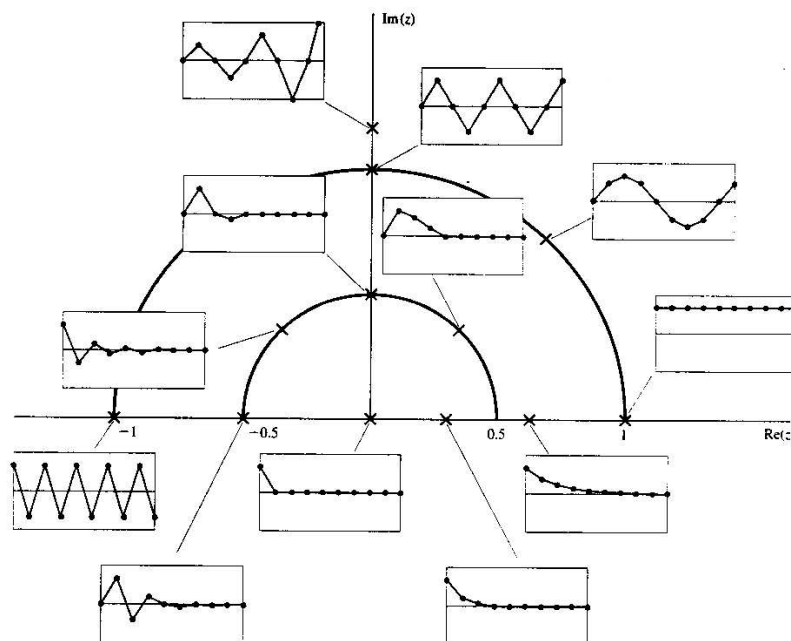
- La regione di stabilità asintotica a tempo continuo, il semipiano sinistro aperto in s , è mappata sull'interno del cerchio unitario in z
- Rette verticali in s con $\text{Re}[s] < 0$ sono mappate in circonferenze interne al cerchio unitario in z
- Rette per l'origine in s con $\text{Re}[s] < 0$ sono spirali logaritmiche interne al cerchio unitario in z
- Rette orizzontali in s sono rette radiali in z
- Il punto $s = 0$ è mappato sul punto $z = 1$
- I punti $s = \pm j\pi/T$ sono mappati su $z = -1$

TRASFORMATATA ZETA DI SEGNALI CAMPIONATI

- Trasformazione dei luoghi a ω_n e ζ costante dal piano s al piano z



- Andamento qualitativo dei segnali a tempo discreto in relazione alla posizione dei poli della loro trasformata zeta



TRASF. ZETA DI SEGNALI CAMPIONATI CON RITARDO

Problema. Dato un segnale a tempo continuo $f(t)$, nullo per $t < 0$, determinare la trasformata zeta del campionamento con passo T del segnale ritardato $f_\tau(t) = f(t - \tau)$

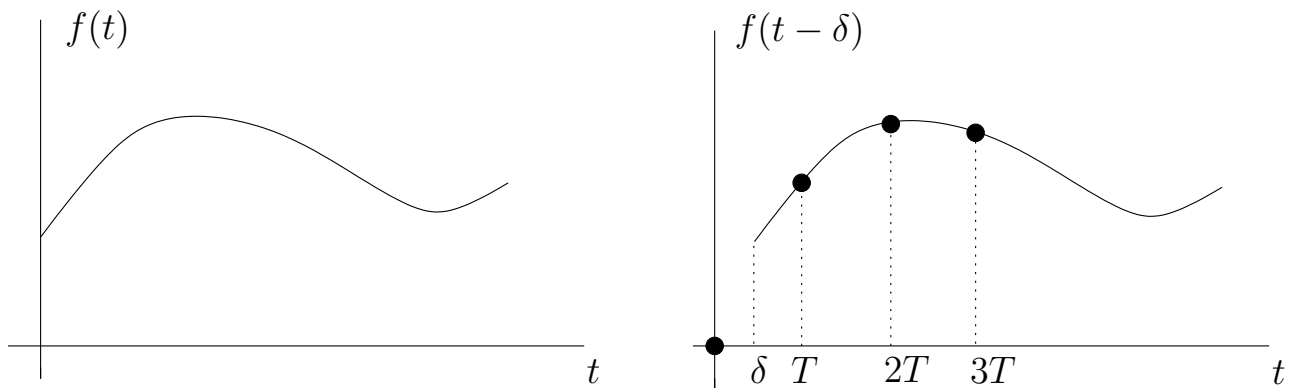
$$F_\tau(z) = \mathcal{Z} [f(t - \tau)|_{t=kT}]$$

- Il ritardo si può scomporre in

$$\tau = mT + \delta \quad ; \quad m \geq 0 \text{ intero, } 0 \leq \delta < T$$

Per la proprietà del ritardo della trasformata zeta ogni ritardo di un periodo intero conta un fattore z^{-1} nella trasformata, per cui

$$F_\tau(z) = z^{-m} \mathcal{Z} [f(t - \delta)|_{t=kT}] \quad ; \quad 0 \leq \delta < T$$

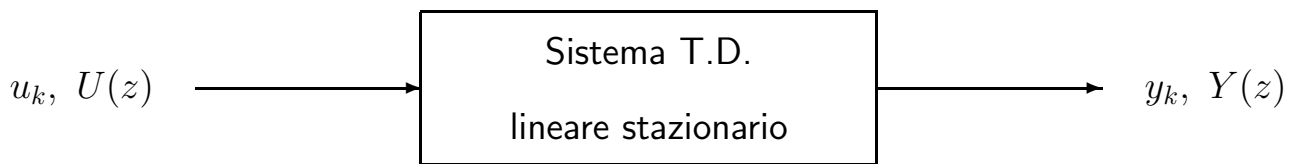


$$F_\tau(z) = z^{-m} [0 + f(T - \delta)z^{-1} + f(2T - \delta)z^{-2} + \dots]$$

$$= z^{-m-1} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT + T - \delta)z^{-k}$$

$$= z^{-m-1} \mathcal{Z} [f(kT + (T - \delta)) 1_k]$$

MODELLI LINEARI A TEMPO DISCRETO INGRESSO USCITA



- Un sistema lineare stazionario a tempo discreto è descritto da un'equazione alle differenze in u_k e y_k

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \dots + a_0y_k = b_m u_{k+m} + b_{m-1}u_{k+m-1} + \dots + b_0u_k$$

- Funzione di trasferimento: relazione tra le trasformate zeta dell'ingresso e dell'uscita *per condizioni iniziali nulle* (risposta forzata)

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + \dots b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} \dots a_1 z + a_0}$$

Fatto. La risposta forzata al segnale u_k vale

$$y_k = \sum_{i=0}^k g_{k-i} u_i = g_k * u_k$$

dove

$$g_k = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)]$$

rappresenta la risposta del sistema all'impulso unitario δ_k

Definizione. Il sistema è detto *causale* se l'uscita del sistema ad ogni istante k non dipende dai valori dell'ingresso ad istanti successivi a k

Proprietà. Il grado del polinomio a numeratore della funzione di trasferimento di un sistema causale è minore o uguale del grado del polinomio a denominatore, i.e., $n \geq m$.

MODELLI A TEMPO DISCRETO IN EQUAZIONI DI STATO

- Sistema lineare stazionario a tempo discreto in equazioni di stato

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

- Risposta completa nel dominio del tempo

$$\begin{aligned} x_k &= A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u_i \\ y_k &= C A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} C A^{k-i-1} B u_i + D u_k \end{aligned}$$

- Calcolo della risposta attraverso la trasformata zeta.

- Evoluzione libera

$$x_k^l = \mathcal{Z}^{-1}\{[zI - A]^{-1} z x_0\}$$

$$y_k^l = \mathcal{Z}^{-1}\{C[zI - A]^{-1} z x_0\}$$

- Evoluzione forzata

$$x_k^f = \mathcal{Z}^{-1}\{[zI - A]^{-1} B U(z)\}$$

$$y_k^f = \mathcal{Z}^{-1}\{[C(zI - A)^{-1} B + D] U(z)\}$$

MODELLI A TEMPO DISCRETO IN EQUAZIONI DI STATO

- Funzione di trasferimento: relazione tra la trasformata zeta dell'evoluzione forzata e quella dell'ingresso

$$G(z) = \frac{Y^f(z)}{U(z)} = C[zI - A]^{-1}B + D = C \frac{\text{adj}(zI - A)}{\det(zI - A)}B + D$$

- Relazione fra la dimensione del vettore di stato del sistema e l'ordine dell'equazione alle differenze ingresso-uscita: l'ordine dell'equazione ingresso-uscita è sempre uguale o inferiore alla dimensione dello stato

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0] \quad D = 0$$

⇓

$$G(z) = C[zI - A]^{-1}B + D = \frac{1}{z-1}$$

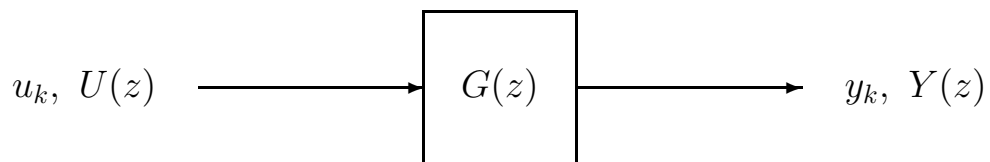
⇓

$$y_{k+1} - y_k = u_k$$

- Relazione fra gli autovalori di A e i poli di $G(z)$: tutti i poli di $G(z)$ sono necessariamente anche autovalori di A , ma in generale non è vero il viceversa: possono infatti verificarsi cancellazioni tra numeratore e denominatore di $G(z)$.

STABILITÀ DEI SISTEMI A TEMPO DISCRETO

- Modello ingresso-uscita.



- Condizione di *stabilità per perturbazioni di durata limitata*: non esistono poli della funzione di trasferimento con modulo maggiore di uno e quelli con modulo unitario sono semplici.
- Condizione di *stabilità ILUL*: tutti i poli della funzione di trasferimento hanno modulo strettamente minore di uno.

- Modello ingresso-stato-uscita.

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases}$$

- Condizione di *stabilità semplice*: non esistono autovalori della matrice A con modulo maggiore di uno e quelli con modulo unitario hanno la molteplicità algebrica uguale a quella geometrica.
- Condizione di *stabilità asintotica*: tutti gli autovalori di A hanno modulo strettamente minore di uno.
- Se il sistema è stabile asintoticamente, allora è anche ILUL stabile.

CRITERI DI STABILITÀ PER SISTEMI A TEMPO DISCRETO

- Analisi della stabilità a tempo discreto di un polinomio

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

- Criterio di Jury (equivalente del criterio di Routh nel caso a tempo discreto)

– Tabella di Jury

$$\begin{array}{c|cccccc}
 1 & 1 & a_{n-1} & \dots & \dots & a_1 & a_0 \\
 2 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} & 1 \\
 3 & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\
 4 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

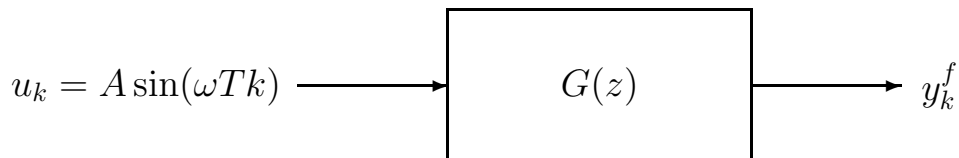
$$b_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & a_0 \\ a_0 & 1 \end{vmatrix}, \quad b_{n-2} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ a_0 & a_{n-1} \end{vmatrix}, \quad \dots$$

Criterio di Jury. Il polinomio $P_n(z)$ ha tutte radici con modulo strettamente minore di uno se e solo se i primi elementi delle righe di indice dispari della tabella sono tutti diversi da zero ed hanno segno positivo

RISPOSTA IN FREQUENZA

Problema. Valutare quando possibile la risposta forzata di regime di un sistema LTITD ad una sinusoide di pulsazione ω campionata con periodo T

$$u_k = A \sin(\omega t)|_{t=kT} = A \sin(\omega T k)$$



Teorema (della risposta in frequenza). Dato un sistema ILUL stabile con f.d.t. $G(z)$, la risposta forzata alla sinusoide campionata è data da

$$y_k^f = y_k^G + y_k^U$$

dove y_k^G (transitorio) tende a 0 per $k \rightarrow \infty$ e y_k^U (permanente) vale

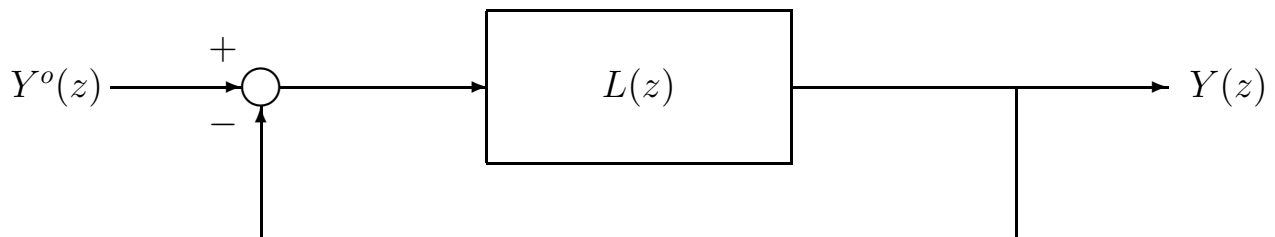
$$y_k^U = A |G(e^{j\omega T})| \sin[\omega T k + \arg G(e^{j\omega T})]$$

Prova. Isolare nella risposta il termine $Y^G(z)$ dipendente dai poli di $G(z)$ (la cui antitrasformata è infinitesima) ed il termine dipendente dai poli di $U(z)$

$$y_k^f = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ G(z) \frac{Az \sin(\omega T)}{(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})} \right\} = \underbrace{\mathcal{Z}^{-1} \{ Y^G(z) \}}_{y_k^G} + \underbrace{\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{AG(e^{j\omega T})z}{2j(z - e^{j\omega T})} - \frac{AG(e^{-j\omega T})z}{2j(z - e^{-j\omega T})} \right\}}_{y_k^U}$$

- La *risposta in frequenza* $G(e^{j\omega T})$ di un sistema a tempo discreto è una funzione periodica (in ω) di periodo $\omega_s = 2\pi/T$

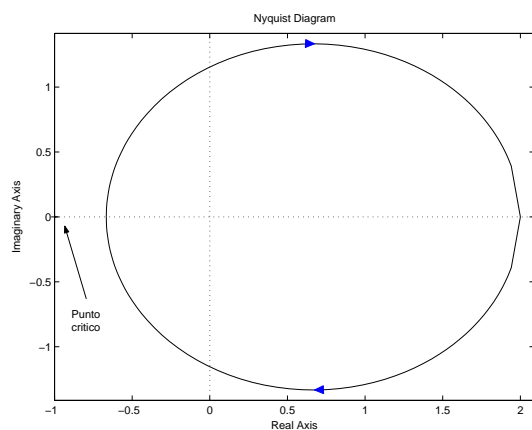
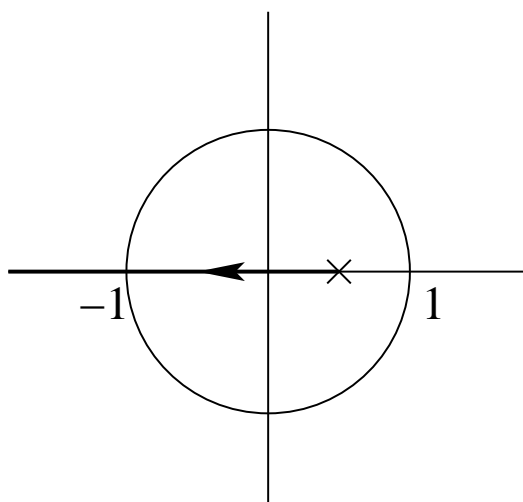
SISTEMI A TEMPO DISCRETO IN RETROAZIONE



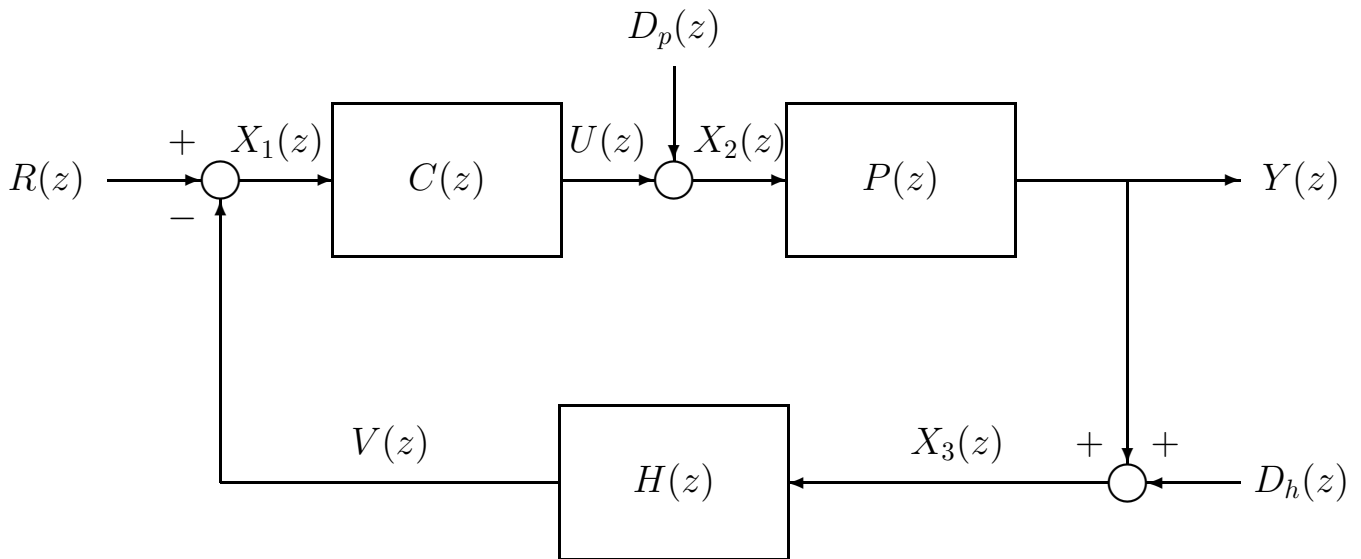
- Studio della stabilità del sistema ad anello chiuso: valgono gli analoghi dei criteri a tempo continuo
 - Luogo delle radici (la regione di stabilità è il cerchio unitario)
 - Criterio di Nyquist, dove il diagramma di Nyquist è dato dalla risposta in frequenza $L(e^{j\omega T})$ valutata sulla circonferenza unitaria (indentata)
- Esempio

$$L(z) = \frac{K}{z - 0.5}$$

- Luogo delle radici e diagramma di Nyquist ($K = 1$)



STABILITA' INTERNA DI SISTEMI DI CONTROLLO



Definizione. Il sistema di controllo è *internamente stabile* se la funzione di trasferimento tra qualunque segnale di ingresso e qualunque segnale di uscita presenti nell'anello è ILUL stabile.

Teorema. In analogia con il caso a tempo continuo, il sistema di controllo in retroazione è internamente stabile se e solo se:

1. la funzione di trasferimento

$$1 + C(z)P(z)H(z)$$

non ha zeri con modulo maggiore o uguale a uno e

2. non ci sono cancellazioni tra poli e zeri con modulo maggiore o uguale a uno nel prodotto

$$C(z)P(z)H(z)$$

ALCUNE FUNZIONI SCILAB

- Definizione di un sistema a tempo discreto in rappresentazione I/O

```
z=poly(0,'z');  
num=z+0.5;  
den=z-0.1;  
sysd=syslin('d',num,den);
```

Sistema a tempo discreto I/O con associato tempo di campionamento T

```
sysd=syslin(T,num,den);
```

- Definizione di un sistema a tempo discreto in rappresentazione di stato con tempo di campionamento T

```
sysd=syslin('d' [oppure T],A,B,C,D);
```

- Calcolo della risposta nel tempo

```
y=dsimul(sysd,u);  
y=flts(u,sysd);
```

- Le funzioni per il calcolo della risposta in frequenza e per i sistemi interconnessi funzionano anche per sistemi a tempo discreto