

Capitolo 3

Sistemi a dati campionati

Sommario. I sistemi di controllo digitale, nel loro insieme, sono di tipo ibrido, ovvero comprendono sia componenti a tempo continuo, sia componenti a tempo discreto, sia elementi di interfaccia tra i due domini. In questo capitolo verrà introdotto un formalismo unitario per descrivere la dinamica di questi modelli a dati campionati. Tale formalismo permette di analizzare le proprietà salienti dei sistemi in oggetto e di definire, ove possibile, le opportune funzioni di trasferimento a tempo discreto tra i campioni delle variabili di ingresso ed i campioni delle variabili di uscita.

3.1 Modellistica del campionamento

Come primo obiettivo, vogliamo determinare un formalismo unico per descrivere, nel dominio della trasformata di Laplace, le proprietà dei segnali campionati e dei sistemi dinamici che integrano componenti a tempo continuo (es. impianto analogico), componenti a tempo discreto (es. controllore digitale) e dispositivi di interfacciamento (campionatore, ZOH).

3.1.1 Modello della conversione A/D

Si consideri un segnale a tempo continuo $f(t)$ ed il segnale $f^*(t)$ che si ottiene modulando (ovvero moltiplicando) $f(t)$ per una *portante impulsiva* $\delta_T(t)$ costituita da un treno di impulsi di Dirac attivi agli istanti $t = kT$

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (3.1)$$

Il segnale modulato risulta uguale a

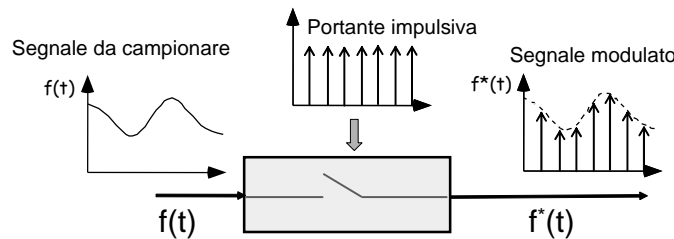


Figura 3.1: Campionamento come modulazione impulsiva

$$f^*(t) = f(t)\delta_T(t) = f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT) \quad (3.2)$$

dove l'ultimo passaggio è motivato dal fatto che $\delta_T(t)$ è nulla per ogni t che non sia multiplo di T . Si osservi che $f^*(t)$ risulta essere un segnale impulsivo dipendente dai campioni $f(kT)$, in particolare è un treno di impulsi, attivi agli istanti $t = kT$, ciascuno dei quali ha ampiezza pari a $f(kT)$. Pertanto, $f^*(t)$ può essere considerato un modello concettuale, cioè una rappresentazione alternativa, della sequenza

$f(kT)$. Il segnale $f^*(t)$ non rappresenta alcun segnale fisico ma, appunto, solo un modello. Calcolando la trasformata di Laplace di $f^*(t)$ si ottiene

$$F^*(s) = \mathcal{L}\{f^*(t)\} = \int_0^{+\infty} f^*(t)e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} f(kT)\delta(t - kT)e^{-st} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \quad (3.3)$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la proprietà del ritardo temporale della trasformata. Dalla precedente espressione è evidente la seguente relazione tra $F^*(s)$ e la trasformata zeta $F(z)$ della sequenza $f_k = f(kT)$:

$$F^*(s) = F(z)|_{z=e^{sT}} = \mathcal{Z}[f_k]|_{z=e^{sT}} \quad (3.4)$$

La trasformata di Laplace $F^*(s)$ di $f^*(t)$ e la trasformata zeta $F(z)$ del segnale campionato f_k si ottengono l'una dall'altra ponendo $z = e^{sT}$.

Nello schema a blocchi in figura 3.2 sono rappresentati l'operazione fisica di campionamento ed il suo modello a modulazione impulsiva sopra descritto.

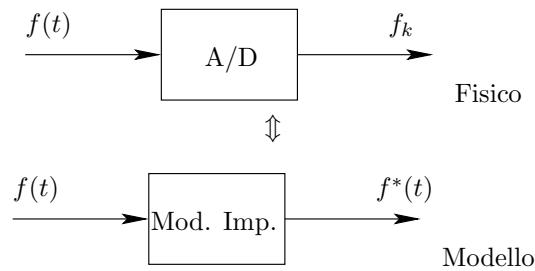


Figura 3.2: Modello del campionatore

3.1.2 Modello della conversione D/A con ZOH

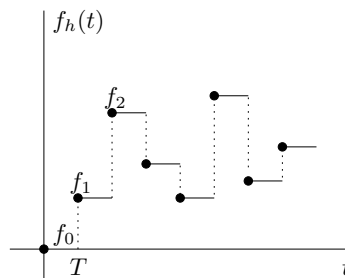


Figura 3.3: Ricostruttore di ordine zero (ZOH)

Rappresentando i segnali campionati con i loro equivalenti impulsivi, lo ZOH può essere modellato come un sistema lineare stazionario descritto da un'opportuna funzione di trasferimento. Per vedere questo, si consideri il sistema lineare stazionario la cui risposta all'impulso è data da

$$g_{ZOH}(t) = 1(t) - 1(t - T) \quad (3.5)$$

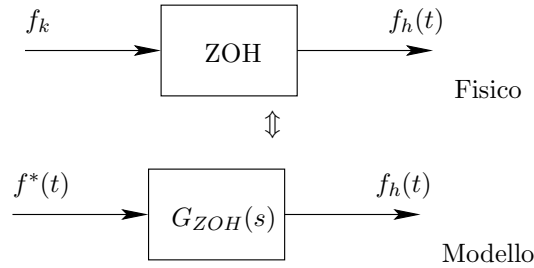


Figura 3.4: Modello dello ZOH

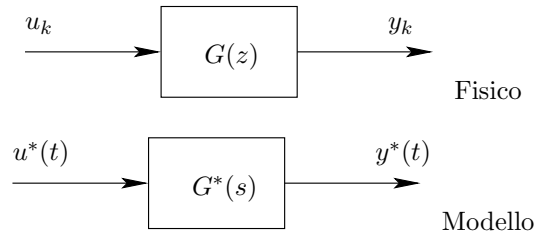


Figura 3.5: Modello della funzione di trasferimento a tempo discreto

e si supponga di eccitare questo sistema con il segnale $f^*(t)$ modulato impulsivamente che rappresenta una certa sequenza f_k . La corrispondente risposta risulta

$$\begin{aligned} f_h(t) &= g_{ZOH}(t) * f^*(t) = \int_0^t g_{ZOH}(t-\tau) f^*(\tau) d\tau = \int_0^t g_{ZOH}(t-\tau) \sum_{k=0}^{+\infty} f_k \delta(\tau - kT) d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} f_k g_{ZOH}(t - kT) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k [1(t - kT) - 1(t - (k+1)T)] \end{aligned} \quad (3.6)$$

e questo segnale è pari alla versione ricostruita con ZOH della sequenza f_k (vedi figura 3.3). Pertanto, nel modello a modulazione impulsiva, il segnale $f_h(t)$ che si ottiene ricostruendo f_k con ZOH può essere rappresentato come il segnale impulsivo $f^*(t)$ filtrato dal sistema lineare la cui risposta impulsiva è $g_{ZOH}(t)$. Quindi lo ZOH può essere modellato come un sistema lineare con funzione di trasferimento

$$G_{ZOH}(s) = \mathcal{L}[g_{ZOH}(t)] = \mathcal{L}[1(t) - 1(t - T)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT} = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (3.7)$$

(vedi figura 3.4).

La trasformata di Laplace del segnale ricostruito è quindi data da

$$F_h(s) = G_{ZOH}(s) F^*(s) \quad (3.8)$$

dove $F^*(s)$ è la trasformata di Laplace dell'equivalente impulsivo di f_k , i.e., $F^*(s) = F(z)|_{z=e^{sT}}$.

3.1.3 Modello della funzione di trasferimento a tempo discreto

Analizziamo ora il modello di un sistema dinamico a tempo discreto con ingresso u_k , uscita y_k e funzione di trasferimento $G(z)$. Si vuole determinare una funzione di trasferimento a tempo continuo $G^*(s)$ in modo che la relazione nel dominio di Laplace $Y^*(s) = G^*(s)U^*(s)$, tra gli equivalenti impulsivi $u^*(t)$ dell'ingresso e $y^*(t)$ dell'uscita, esprima la relazione $Y(z) = G(z)U(z)$, che definisce la dinamica del sistema. Sia $\{g_k\} = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)]$ la risposta impulsiva di $G(z)$. Allora, dalla definizione di trasformata

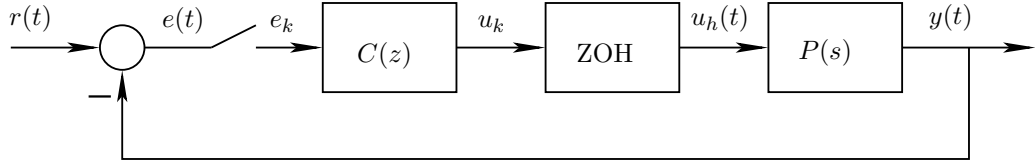


Figura 3.6: Anello di controllo digitale

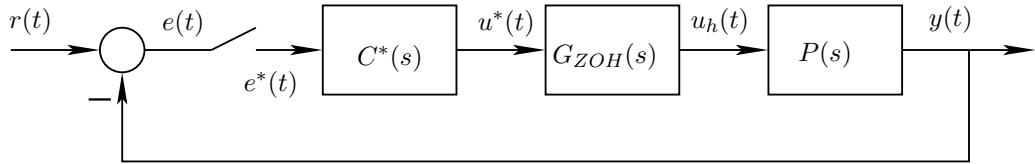


Figura 3.7: Anello di controllo digitale: modello a modulazione impulsiva

zeta si ottiene

$$Y(z) = G(z)U(z) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} y_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k z^{-k} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^{-k}. \quad (3.9)$$

Ponendo $z = e^{Ts}$ nella precedente relazione, si ottiene $Y^*(s) = G^*(s)U^*(s)$ dove

$$G^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k e^{-kTs}. \quad (3.10)$$

Pertanto $G^*(s)$ definita in (3.10) rappresenta $G(z)$ nel modello a modulazione impulsiva (vedi figura 3.5).

3.1.4 Modelli di sistemi interconnessi

Si consideri un sistema a dati campionati eterogeneo, come ad esempio l'anello di controllo mostrato in figura 3.6. Impiegando il modello del campionamento a modulazione impulsiva, le funzioni di trasferimento a tempo continuo, quelle a tempo discreto ed il ricostruttore possono essere caratterizzati mediante opportune funzioni di trasferimento nel dominio della trasformata di Laplace, mentre il campionario è modellato da un blocco che, dato un segnale d'ingresso $f(t)$, fornisce in uscita l'equivalente impulsivo $f^*(t)$ del suo campionamento (figura 3.7).

Per poter analizzare i modelli a dati campionati interconnessi, è necessario enunciare alcune importanti proprietà dell'operazione di campionamento.

Proprietà 3.1 Sia $y(t)$ un segnale dato dalla convoluzione tra un segnale continuo $g(t)$ ed un segnale impulsivo $u^*(t)$ ($y(t) = g(t) * u^*(t)$), ovvero $Y(s) = G(s)U^*(s)$ e si consideri il suo campionamento $y_k = y(kT)$ (o l'equivalente $y^*(t)$). Allora y_k ($y^*(t)$) dipende soltanto dai campioni $g_k = g(kT)$ di $g(t)$ (ovvero da $g^*(t)$), ed in particolare risulta

$$Y^*(s) = [G(s)U^*(s)]^* = G^*(s)U^*(s) \quad (3.11)$$

Infatti, essendo $u^*(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i \delta(t - iT)$, risulta

$$y(t) = g(t) * u^*(t) = \int_0^{\infty} g(t - \tau) \sum_{i=0}^{+\infty} u_i \delta(\tau - iT) d\tau = \sum_{i=0}^{+\infty} g(t - iT) u_i \quad (3.12)$$

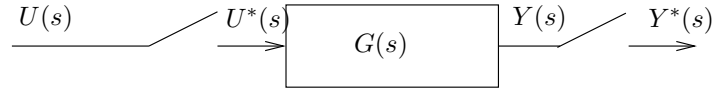


Figura 3.8: Esempio 3.1

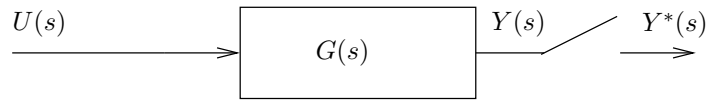


Figura 3.9: Esempio 3.2

e quindi

$$y_k = y(kT) = \sum_{i=0}^{\infty} g_{k-i} u_i \quad (3.13)$$

che dipende solo dai campioni di $g(t)$. Inoltre, applicando a (3.13) la trasformata zeta, si ha $Y(z) = G(z)U(z)$ dove $G(z) = \mathcal{Z}\{g_k\}$, ovvero $Y^*(s) = G^*(s)U^*(s)$.

Osservazione 3.1 Il risultato precedente si traduce in generale nella proprietà che in un'espressione del tipo $[A(s)B^*(s)]^*$, che nel dominio di Laplace rappresenta il campionamento della convoluzione di un segnale continuo $a(t)$ con un segnale impulsivo $b^*(t)$, la quantità $B^*(s)$ può essere simbolicamente “portata fuori” dall'operazione di campionamento $[\cdot]^*$, i.e., $[A(s)B^*(s)]^* = A^*(s)B^*(s)$. Si noti bene che se $A(s)$ e $B(s)$ rappresentano entrambe segnali continui e non impulsivi, allora in generale $[A(s)B(s)]^* \neq A^*(s)B^*(s)$; in altri termini il campionamento della convoluzione di due segnali $a(t)$ e $b(t)$ non dipende solo dai campioni dei singoli segnali, ma dal loro intero andamento. Ciò non succede invece, per quanto visto, quando uno dei due segnali è impulsivo.

Esempio 3.1 Si consideri lo schema in figura 3.8. Poiché la risposta $y(t)$ è la convoluzione di $g(t)$ con $u^*(t)$, in base al risultato precedente si ha

$$Y^*(s) = [G(s)U^*(s)]^* = G^*(s)U^*(s)$$

o equivalentemente $Y(z) = G(z)U(z)$. In questo caso esiste quindi una funzione di trasferimento in z tra i campioni u_k di $u(t)$ e quelli y_k di $y(t)$.

Esempio 3.2 Si consideri adesso lo schema in Figura 3.9; in questo caso risulta

$$Y^*(s) = [G(s)U(s)]^* \quad \text{ovvero} \quad Y(z) = \mathcal{Z}[G(s)U(s)] \quad (3.14)$$

in cui non è possibile scrivere l'espressione di $Y(z)$ in una forma che contenga separatamente $G(z)$ e $U(z)$. In altre parole i campioni dell'uscita dipendono dall'intero andamento continuo di $g(t)$ e $u(t)$ e non solo dai loro campioni come nel caso precedente. Detto ancora diversamente, il campionamento della convoluzione di due segnali continui non è uguale alla convoluzione discreta dei campioni dei singoli segnali.

Le osservazioni precedenti implicano che in un sistema a dati campionati con ingressi continui è possibile definire una funzione di trasferimento a tempo discreto tra i campioni dell'ingresso e i campioni dell'uscita solo nel caso in cui siano effettivamente solo i campioni dell'ingresso a determinare la risposta del sistema, ovvero solo quando l'ingresso attraversa un campionatore prima di essere filtrato da un qualunque blocco.

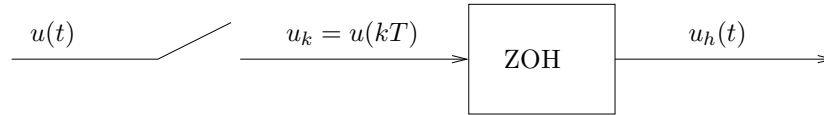


Figura 3.10: Esempio 3.3

3.2 Analisi dei sistemi a dati campionati

Dato un sistema di controllo digitale in retroazione, o comunque un sistema interconnesso in cui sono presenti elementi a tempo discreto, elementi a tempo continuo e campionatori/mantenitori, si desidera

- calcolare l'espressione della risposta in tutti i segnali (continui e discreti) del sistema, noti gli ingressi,
- calcolare, quando ciò è possibile, le funzioni di trasferimento a tempo discreto tra i segnali d'ingresso, campionati, ed i segnali di uscita, anch'essi campionati.

Osserviamo che in un sistema in cui siano presenti segnali a tempo continuo e segnali campionati, non è possibile in generale determinare la funzione di trasferimento *a tempo continuo* tra eventuali segnali di ingresso continui ed eventuali segnali di uscita continui. Le relazioni che legano questi segnali sono infatti in genere non stazionarie (tempo varianti) e quindi non esprimibili come funzioni di trasferimento, come nel caso seguente.

Esempio 3.3 Si consideri il sistema in figura 3.10, con ingresso continuo $u(t)$ e uscita continua $u_h(t)$. Si verifica facilmente che la risposta del sistema al segnale $u(t-\delta)$ (con $\delta \neq mT$) non vale $u_h(t-\delta)$, pertanto il sistema non è tempo invariante nel senso a tempo continuo e quindi la funzione di trasferimento tra $U(s)$ e $U_h(s)$ non esiste.

3.2.1 Equivalente campionato con ZOH

Si consideri un sistema a tempo continuo $G(s)$ interfacciato con un dispositivo digitale D attraverso un convertitore A/D ed un convertitore D/A (ZOH), come in figura 3.11. Dal punto di vista ingresso-uscita, l'interconnessione $ZOH \rightarrow G(S) \rightarrow A/D$ è un sistema a tempo discreto. Si vuole determinare il modello equivalente a tempo discreto di questa interconnessione, ovvero il modello di come il dispositivo digitale D “vede” l'insieme del sistema continuo e dei convertitori.

L'ingresso di $G(s)$ è rappresentato dalla ricostruzione con ZOH $u_h(t)$ del segnale di ingresso u_k , mentre la corrispondente uscita $y(t)$ viene campionata nella successione y_k . Si consideri la rappresentazione equivalente col modello a modulazione impulsiva in figura 3.12. Risulta

$$Y(s) = G_{ZOH}(s)G(s)U^*(s) \quad (3.15)$$

quindi

$$\begin{aligned} Y^*(s) &= [G_{ZOH}(s)G(s)U^*(s)]^* = [G_{ZOH}(s)G(s)]^* U^*(s) \\ &= \left[(1 - e^{-sT}) \frac{G(s)}{s} \right]^* U^*(s) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Poiché $\mathcal{L}^{-1}[1 - e^{-sT}] = \delta(t) - \delta(t - T)$ è una funzione impulsiva, il termine $1 - e^{-sT}$ si porta fuori dall'operazione $[\cdot]^*$, dunque

$$Y^*(s) = (1 - e^{-sT}) \left[\frac{G(s)}{s} \right]^* U^*(s) \quad (3.17)$$

Passando infine alla trasformata zeta

$$Y(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{G(s)}{s} \right] U(z). \quad (3.18)$$

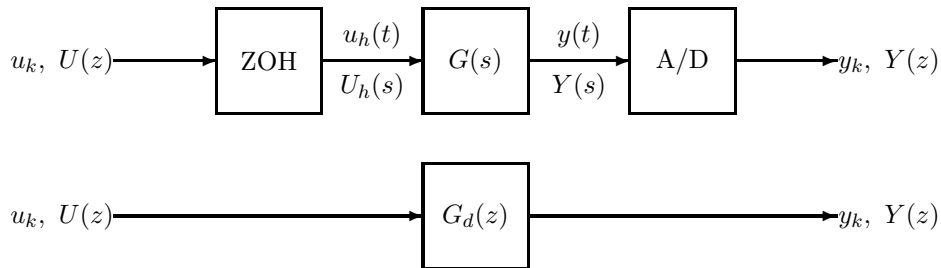


Figura 3.11: Equivalente campionato con ZOH

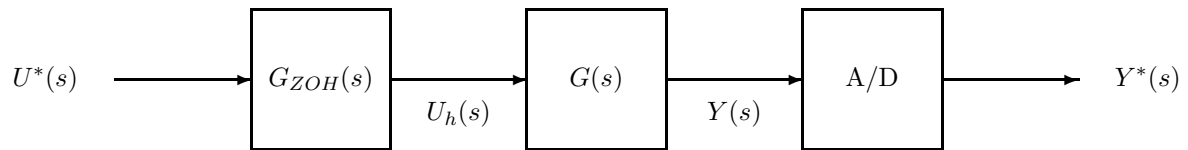


Figura 3.12: Equivalente campionato con ZOH a modulazione impulsiva

Dunque risulta definita la funzione di trasferimento tra $U(z)$ e $Y(z)$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G_d(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[\frac{G(s)}{s} \right] \quad (3.19)$$

Il sistema descritto da $G_d(z)$ è detto *equivalente a dati campionati (con ZOH)* del sistema $G(s)$. Si noti che l'equivalente campionato dipende dal tipo di mantentore usato. Infatti, la funzione di trasferimento a modulazione impulsiva che descrive lo ZOH influenza l'espressione di $G_d(z)$.

Osservazione 3.2 Con riferimento allo schema di controllo digitale in figura 3.13, l'equivalente campionato con ZOH $P_d(z)$ dell'impianto rappresenta il modo in cui viene visto l'insieme dell'impianto e dei convertitori da parte di componenti puramente digitali del sistema. In questo modo, come vedremo, è possibile studiare alcuni problemi di controllo in un dominio puramente discreto.

In base alla (3.19), il calcolo del modello equivalente con ZOH può essere riassunto nella seguente procedura.

1. Determinare l'antitrasformata di Laplace $\tilde{g}(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)/s]$
2. Determinare la trasformata zeta $\tilde{G}(z) = \mathcal{Z}[\tilde{g}_k] = \mathcal{Z}[\tilde{g}(kT)]$

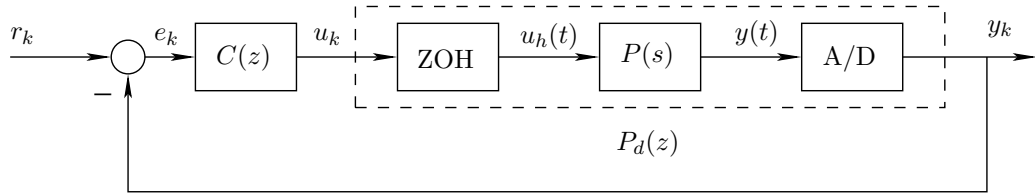


Figura 3.13: Anello di controllo digitale

3. Calcolare

$$G_d(z) = (1 - z^{-1})\tilde{G}(z)$$

Esempio 3.4

$$G(s) = \frac{1}{s} \rightarrow \tilde{g}(t) = t \, 1(t) \rightarrow \tilde{g}_k = kT \, 1_k \rightarrow \tilde{G}(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \rightarrow G_d(z) = \frac{T}{z-1}$$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s^2} \rightarrow \tilde{g}(t) = \frac{t^2}{2} \, 1(t) \rightarrow \tilde{g}_k = \frac{(kT)^2}{2} \, 1_k \rightarrow \\ &\rightarrow \tilde{G}(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} \rightarrow G_d(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^2} \end{aligned}$$

L'equivalente campionato con ZOH di sistemi con ritardo del tipo

$$G(s) = e^{-\tau s} G'(s) \quad (3.20)$$

può essere calcolato mediante il procedimento ora descritto tenendo presente la formula della trasformata zeta di segnali campionati con ritardo. Si scompone il ritardo in

$$\tau = mT + \delta \quad ; \quad m \geq 0 \text{ intero}, \quad 0 \leq \delta < T$$

e si calcola

$$\begin{aligned} G_d(z) &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[\frac{G(s)}{s} \right] \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[\frac{G'(s)}{s} e^{-\tau s} \right] \\ &= (1 - z^{-1})\mathcal{Z} [\tilde{g}'(t - \tau)|_{t=kT}] \\ &= z^{-m-1}(1 - z^{-1})\mathcal{Z} [\tilde{g}'(kT + (T - \delta)) \, 1_k] \end{aligned} \quad (3.21)$$

dove $\tilde{g}'(t) = \mathcal{L}^{-1}[G'(s)/s]$.

Esempio 3.5

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s^2} = \frac{e^{-mTs} e^{-\delta s}}{s^2} \quad \left[\frac{G'(s)}{s} = \frac{1}{s^3} \right] \quad (3.22)$$

$$G_d(z) = z^{-m-1}(1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[\frac{(kT + (T - \delta))^2}{2} \, 1_k \right] \quad (3.23)$$

$$= z^{-m-1}(1 - z^{-1}) \left\{ \mathcal{Z} \left[\frac{(kT)^2}{2} \, 1_k \right] + (T - \delta)\mathcal{Z}[kT \, 1_k] + \frac{(T - \delta)^2}{2}\mathcal{Z}[1_k] \right\} \quad (3.24)$$

$$= z^{-m-1}(1 - z^{-1}) \left\{ \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} + (T - \delta)\frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{(T - \delta)^2}{2} \frac{z}{z-1} \right\} \quad (3.25)$$

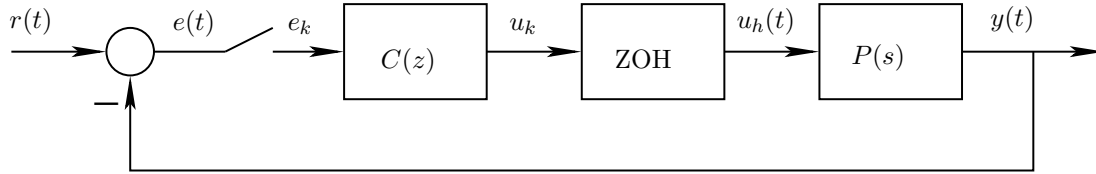


Figura 3.14: Sistema di controllo digitale

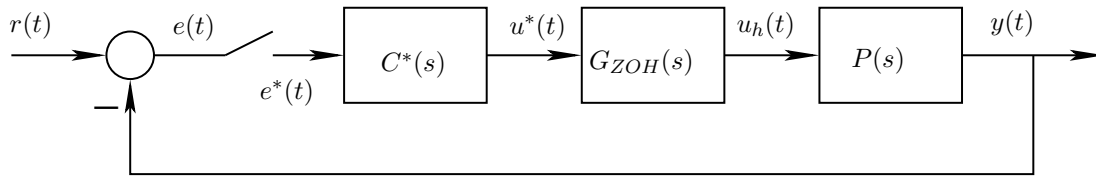


Figura 3.15: Sistema di controllo digitale: modello equivalente

3.3 Schemi a blocchi a dati campionati

Dato uno schema a blocchi a dati campionati, si vuole determinare, se questa esiste, la funzione di trasferimento a tempo discreto tra l'ingresso ed uscita campionati, o in caso contrario almeno l'espressione dell'uscita una volta noto l'ingresso.

Si consideri ad esempio il sistema di controllo digitale in retroazione in figura 3.14 ed il suo equivalente a modulazione impulsiva in figura 3.15. Determiniamo, se possibile, la funzione di trasferimento tra i campioni r_k dell'ingresso $r(t)$ ed i campioni y_k dell'uscita $y(t)$. Risulta

$$Y^*(s) = [P(s)G_{ZOH}(s)U^*(s)]^* = \left[(1 - e^{-sT})U^*(s)\frac{P(s)}{s} \right]^* \quad (3.26)$$

↓

$$Y^*(s) = (1 - e^{-sT}) \left[\frac{P(s)}{s} \right]^* U^*(s) \quad (3.27)$$

↓

$$Y^*(s) = (1 - e^{-sT}) \left[\frac{P(s)}{s} \right]^* C^*(s)[R^*(s) - Y^*(s)] \quad (3.28)$$

↓

$$Y^*(s) = \frac{L^*(s)}{1 + L^*(s)} R^*(s) \quad (3.29)$$

dove

$$L^*(s) = (1 - e^{-sT})C^*(s) \left[\frac{P(s)}{s} \right]^* \quad (3.30)$$

Passando alla trasformata zeta si ottiene

$$Y(z) = \frac{L(z)}{1 + L(z)} R(z) \quad (3.31)$$

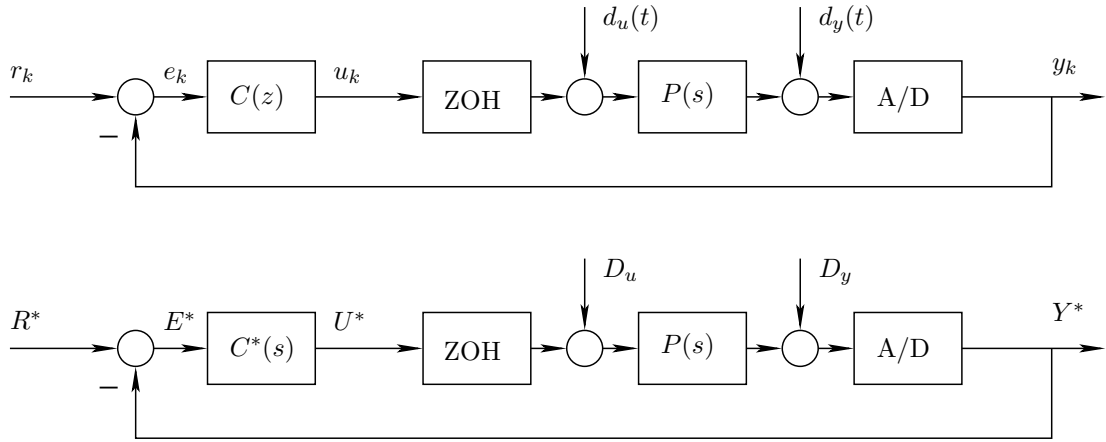


Figura 3.16: Sistema di controllo digitale con disturbi

dove

$$L(z) = (1 - z^{-1})C(z)\mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}\right] \quad (3.32)$$

Si è quindi ottenuta la funzione di trasferimento $W(z) = Y(z)/R(z)$. Si noti che il guadagno d'anello $L(z)$ può essere scritto anche come

$$L(z) = C(z)P_d(z) \quad (3.33)$$

dove $P_d(z)$ è l'equivalente campionato con ZOH dell'impianto. D'altra parte il sistema che lega y_k a r_k può essere visto proprio come un sistema puramente a tempo discreto in retroazione unitaria con guadagno d'anello (3.33).

Si consideri adesso il sistema di controllo in figura 3.16. Si vuole valutare l'effetto sull'uscita dei disturbi $d_u(t)$ e $d_y(t)$ e se possibile determinare la funzione di trasferimento tra i campioni di questi disturbi ed i campioni dell'uscita. Dal diagramma a blocchi, osserviamo che la risposta nell'uscita al disturbo $d_u(t)$ dipende dal segnale che si ottiene filtrando $d_u(t)$ attraverso $P(s)$ e poi campionando, ovvero da $[P(s)D_u(s)]^*$, mentre la risposta a $d_y(t)$ dipende dal solo campionamento di $d_y(t)$, ovvero da $D_y^*(s)$. In base alle osservazioni fatte in precedenza, ci aspettiamo quindi che esista la funzione di trasferimento $Y^*(s)/D_y^*(s)$ $[Y(z)/D_y(z)]$ ma non quella $Y^*(s)/D_u^*(s)$.

Mediante passaggi analoghi a quelli svolti per il calcolo della risposta al riferimento, si ottiene la risposta campionata al disturbo $d_u(t)$

$$Y_{d_u}^*(s) = \frac{[P(s)D_u(s)]^*}{1 + C^*(s)[G_{ZOH}(s)P(s)]^*} \quad (3.34)$$

ovvero

$$Y_{d_u}(z) = \frac{\mathcal{Z}[P(s)D_u(s)]}{1 + C(z)(1 - z^{-1})\mathcal{Z}[P(s)/s]} \quad (3.35)$$

e la risposta campionata al disturbo $d_y(t)$

$$Y_{d_y}^*(s) = \frac{1}{1 + C^*(s)[G_{ZOH}(s)P(s)]^*} D_y^*(s) \quad (3.36)$$

ovvero

$$Y_{d_y}(z) = \frac{1}{\underbrace{1 + C(z)(1 - z^{-1})\mathcal{Z}[P(s)/s]}_{Y(z)/D_y(z)}} D_y(z) \quad (3.37)$$

È quindi evidente che esiste la funzione di trasferimento $Y(z)/D_y(z)$ ma non la funzione di trasferimento $Y(z)/D_u(z)$.

3.4 Oscillazioni interperiodo

La funzione di trasferimento $W(z)$ di un sistema di controllo digitale esprime la relazione tra i campioni del segnale di riferimento ed i campioni dell'uscita. Tuttavia il segnale che interessa controllare è sempre l'uscita analogica $y(t)$, non quella campionata y_k . I campioni dell'uscita costituiscono l'informazione utilizzata per il controllo ma non l'obiettivo del controllo, che è invece rappresentato dall'andamento di $y(t)$. In generale, l'uscita $y(t)$ varia con continuità tra due istanti di campionamento successivi e questo non è evidentemente individuabile dall'andamento di y_k . Tali variazioni possono rimanere significative anche agli istanti di tempo in cui, in base alla funzione di trasferimento discreta $W(z)$, la risposta campionata del sistema ha raggiunto una situazione di regime. Questo comportamento dell'uscita analogica è in genere fortemente indesiderato.

Esempio 3.6 Si consideri il sistema di controllo digitale con passo di campionamento $T = 1$ s, funzione di trasferimento dell'impianto

$$P(s) = \frac{e^{-s}}{1 + 8s + 15s^2} \quad (3.38)$$

e controllore

$$C(z) = \frac{z^3 - 1.5353z^2 + 0.5866z}{0.028z^3 + 0.0234z^2 - 0.028z - 0.0234} \quad (3.39)$$

Come vedremo in seguito, questo controllore è progettato in modo che la risposta al gradino campionata del sistema vada a regime dopo soli 2 istanti di campionamento.

In figura 3.17 viene mostrata la simulazione dell'andamento della risposta analogica in corrispondenza a questo progetto. È evidente che la risposta campionata raggiunge il valore di regime in due passi di campionamento, ma che l'uscita analogica continua ad oscillare per lungo tempo tra un periodo di campionamento ed il successivo.

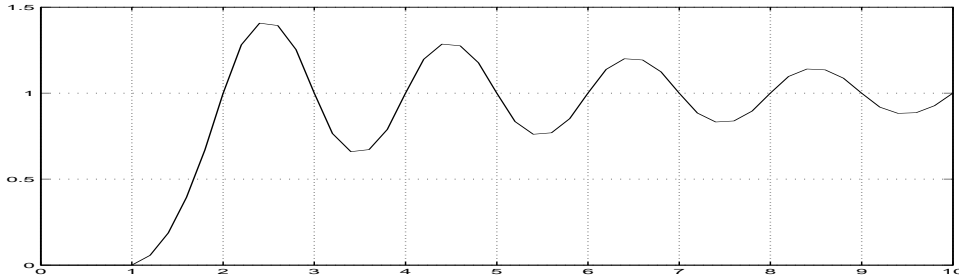


Figura 3.17: Oscillazioni interperiodo

3.5 Equivalente campionato in rappresentazione di stato

Dato un sistema lineare stazionario Σ a tempo continuo in equazioni di stato

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.40)$$

si vuole determinare la rappresentazione di stato del suo equivalente campionato con ZOH Σ_d (figura 3.18).

Assumendo $x(kT)$ come condizione iniziale all'istante $t = kT$, la risposta di Σ valutata all'istante $(k+1)T$ vale

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} B d\tau u_k \\ y(kT) &= Cx(kT) + Du_k \end{aligned} \quad (3.41)$$

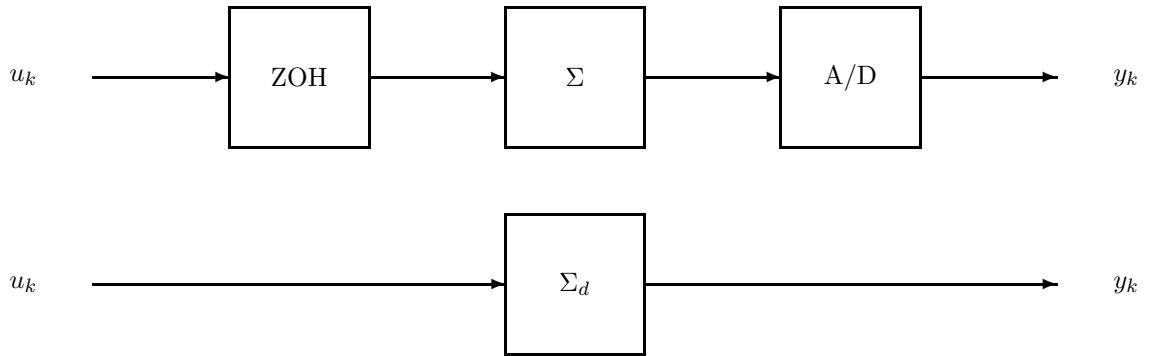


Figura 3.18: Equivalente campionato in rappresentazione di stato

Si noti infatti che lo ZOH mantiene l'ingresso costante e pari a $u(t) = u_h(t) = u_k$ in tutto l'intervallo $[kT, (k+1)T)$.

Effettuando una traslazione dell'asse dei tempi è possibile riscrivere (3.41) come

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= e^{AT} x_k + \int_0^T e^{A\theta} B d\theta u_k \\ y_k &= C x_k + D u_k \end{aligned} \quad (3.42)$$

dove $x_k = x(kT)$, $y_k = y(kT)$. Dunque, l'evoluzione di x_k , y_k , u_k è descritta dal modello in equazioni di stato

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \\ y_k = C_d x_k + D_d u_k \end{cases} \quad (3.43)$$

dove

$$A_d = e^{AT}; \quad B_d = \int_0^T e^{A\sigma} d\sigma B; \quad C_d = C; \quad D_d = D \quad (3.44)$$

Tale modello rappresenta l'equivalente campionato con ZOH del sistema Σ .