

## Capitolo 5

### Realizzazione digitale di controllori analogici Scelta del passo di campionamento

**Sommario.** In questo capitolo vengono presentati i metodi di sintesi di controllori digitali mediante approssimazione discreta di regolatori analogici progettati con metodi noti. Viene inoltre discusso il problema della scelta del passo di campionamento sulla base dei requisiti imposti al sistema di controllo.

#### 5.1 Progetto per discretizzazione

Dato un impianto lineare stazionario  $P(s)$ , si supponga di aver progettato con metodi noti (sintesi per tentativi, luogo delle radici, ecc.) un regolatore analogico  $C(s)$  a fronte di opportune specifiche. L'idea fondamentale alla base dei metodi analizzati in questo capitolo è quella di approssimare le caratteristiche dinamiche di  $C(s)$  con un regolatore a tempo discreto  $\bar{C}(z)$  in modo che, una volta inserito  $\bar{C}(z)$  in un anello di controllo digitale, si ottengano prestazioni del sistema analoghe a quelle del corrispondente sistema di controllo analogico (figura 5.1). Si consideri un controllore lineare a tempo continuo

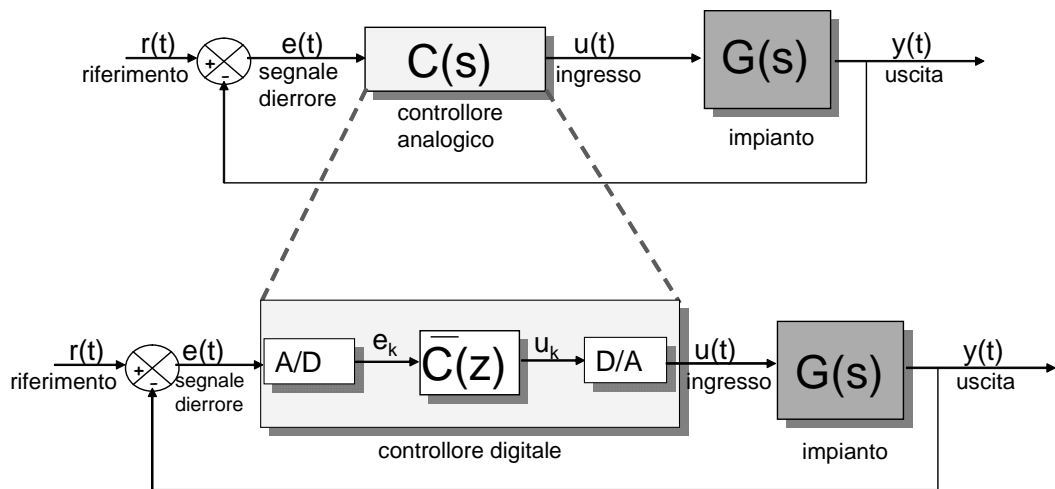


Figura 5.1: Schema concettuale del progetto per approssimazione.

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (5.1)$$

Come è noto, la precedente funzione di trasferimento rappresenta nel dominio della trasformata di Laplace l'equazione differenziale ingresso-uscita

$$u^{(n)}(t) + a_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 u(t) = b_m e^{(m)}(t) + b_{m-1} e^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 e(t) \quad (5.2)$$

Il progetto per approssimazione si basa sui metodi alle differenze finite comunemente utilizzati per la soluzione delle equazioni differenziali con l'uso di calcolatori digitali. Poiché, come già ricordato, i calcolatori digitali non possono operare sul continuo, le operazioni integro-differenziali devono essere necessariamente

approssimate con operazioni che coinvolgano soltanto un insieme discreto di campioni delle funzioni in gioco. In questo senso, ogni equazione differenziale di cui si voglia simulare la soluzione su un calcolatore deve essere approssimata con un'equazione alle differenze.

Si supponga che, noto  $e(t)$ , la soluzione dell'equazione differenziale (5.2) possa essere approssimata dalla soluzione dell'equazione alle differenze

$$u_{k+1} + \alpha_{n-1}u_{k+n-1} + \dots + \alpha_0u_k = \beta_n e_{k+n} + \beta_{n-1}e_{k+n-1} + \dots + \beta_0e_k \quad (5.3)$$

in cui  $u_k = u(kT)$   $e_k = e(kT)$  costituiscono campionamenti a passo fisso  $T$  delle funzioni  $e(t)$  ed  $u(t)$ . Se una tale approssimazione è precisa, nel senso che la sequenza  $u_k$  soluzione di (5.3) riproduce fedelmente un campionamento della soluzione  $u(t)$  di (5.2), si può affermare che la funzione di trasferimento

$$\bar{C}(z) = \frac{\beta_n z^n + \beta_{n-1}z^{n-1} \dots + \beta_0}{z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_0} \quad (5.4)$$

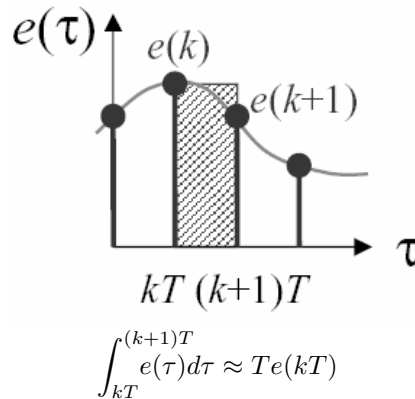
operando sui campioni di  $e(t)$  ed  $u(t)$ , riproduce fedelmente le caratteristiche dinamiche del sistema continuo descritto dalla funzione di trasferimento (5.1).

Nel seguito del capitolo, analizzeremo alcuni metodi di approssimazione alle differenze finite idonei ad essere applicati al progetto di regolatori a tempo discreto a partire da regolatori a tempo continuo.

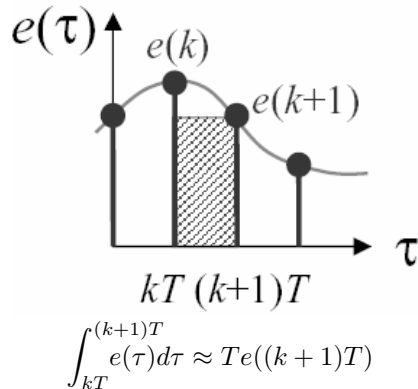
## 5.2 Metodi di discretizzazione

I metodi di approssimazione alle differenze finite che analizzeremo possono essere derivati da altrettanti metodi comunemente usati per il calcolo approssimato dell'integrale di una funzione  $e(t)$  conoscendo la funzione integranda in un insieme discreto di punti  $t = kT$ .

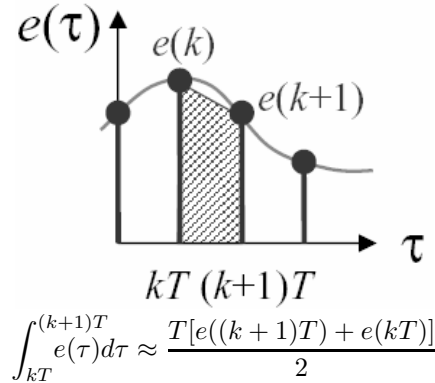
- Metodo di Eulero in avanti



- Metodo di Eulero all'indietro



- Metodo dei trapezi (di Tustin)



Sia consideri la funzione integrale di  $e(t)$

$$i(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (5.5)$$

La relazione tra  $i(t)$  ed  $e(t)$  può essere espressa con la trasformata di Laplace nel seguente modo

$$I(s) = \frac{1}{s} E(s) \quad \Leftrightarrow \quad E(s) = sI(s) \quad (5.6)$$

Si considerino i campioni  $i_k = i(kT)$ ,  $e_k = e(kT)$ . Approssimando l'operazione di integrale con ciascuno dei tre metodi sopracitati, tali campioni risultano legati da opportune relazioni, rispettivamente.

- Metodo di Eulero in avanti

$$i_{k+1} - i_k = \int_{kT}^{(k+1)T} e(\tau) d\tau \approx T e_k \quad (5.7)$$

che prendendo le rispettive trasformate zeta può essere scritta come

$$(z - 1)I(z) \approx T E(z) \quad (5.8)$$

e dunque la relazione integrale/differenziale tra  $e(t)$  e  $i(t)$  induce una relazione approssimata tra i relativi campioni sulla base della formula di approssimazione dell'integrale. Dunque

$$E(s) = sI(s) \quad \Rightarrow \quad E(z) \approx \frac{z-1}{T} I(z) \quad (5.9)$$

- Metodo di Eulero all'indietro:

$$i_{k+1} - i_k \approx T e_{k+1} \quad \xrightarrow{\text{Zeta}} \quad (z - 1)I(z) \approx T z E(z) \quad (5.10)$$

e dunque

$$E(s) = sI(s) \quad \Rightarrow \quad E(z) \approx \frac{z-1}{Tz} I(z) \quad (5.11)$$

- Metodo di Tustin

$$i_{k+1} - i_k \approx \frac{T(e_{k+1} + e_k)}{2} \quad \xrightarrow{\text{Zeta}} \quad (z - 1)I(z) \approx \frac{T(z+1)}{2} E(z) \quad (5.12)$$

e dunque

$$E(s) = sI(s) \quad \Rightarrow \quad E(z) \approx \frac{2(z-1)}{T(z+1)} I(z) \quad (5.13)$$

In termini simbolici, quantità continue che nel dominio della trasformata di Laplace sono legate dall'operatore  $s$ , hanno i rispettivi campioni approssimativamente legati nel dominio della trasformata zeta da opportuni operatori in  $z$  dipendenti dal metodo di integrazione usato. Si hanno le seguenti associazioni.

- Eulero in avanti

$$s \leftrightarrow \frac{z-1}{T} \quad (5.14)$$

- Eulero all'indietro

$$s \leftrightarrow \frac{z-1}{Tz} \quad (5.15)$$

- Tustin

$$s \leftrightarrow \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \quad (5.16)$$

Si consideri il controllore lineare a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (5.17)$$

che equivale alla relazione ingresso-uscita

$$s^n U(s) + a_{n-1} s^{n-1} U(s) + \dots + a_0 U(s) = b_m s^m E(s) + b_{m-1} s^{m-1} E(s) + \dots + b_0 E(s) \quad (5.18)$$

Sostituendo l'operatore  $s$  con il suo approssimato discreto secondo uno dei tre metodi e le quantità continue con i corrispondenti campioni, si ottiene una relazione approssimata tra le quantità discrete stesse, dipendente dal metodo usato, che può essere espressa nella forma di una funzione di trasferimento  $\bar{C}(z)$ .

- Eulero in avanti

$$\bar{C}(z) = C(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}} \quad (5.19)$$

- Eulero all'indietro

$$\bar{C}(z) = C(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}} \quad (5.20)$$

- Tustin

$$\bar{C}(z) = C(s) \Big|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}} \quad (5.21)$$

Si noti che la trasformazione di Tustin

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

è bilineare nelle variabili  $s$  e  $z$  in quanto, fissando una delle due variabili, l'equazione ottenuta è lineare nell'altra

$$zs + s = \frac{2}{T}(z-1) \quad (5.22)$$

**Esempio 5.1** Si consideri un regolatore costituito da un integratore e da una rete anticipatrice

$$C(s) = \frac{K_c}{s} \frac{1 + \tau s}{1 + \tau/m s} \quad (5.23)$$

Applicando la trasformazione di Tustin si ottiene il controllore a tempo discreto approssimante

$$\bar{C}(z) = K_c \frac{T(z+1)}{2(z-1)} \frac{1 + \tau \frac{2(z-1)}{T(z+1)}}{1 + \tau/m \frac{2(z-1)}{T(z+1)}} \quad (5.24)$$

### 5.3 Mappatura dei poli

Poiché l'espressione  $\bar{C}(z)$  del controllore approssimato si ottiene mediante la sostituzione della variabile  $s$  in  $C(s)$  con un'opportuna funzione di  $z$  a seconda del metodo di discretizzazione utilizzato, i poli (ed anche gli zeri) di  $C(s)$  sono legati a quelli di  $\bar{C}(z)$  dalla stessa funzione. Si ottiene perciò che ogni polo in  $s = s_i$  del controllore a tempo continuo  $C(s)$  genera un polo  $z_i$  del controllore discreto approssimato  $\bar{C}(z)$  secondo le relazioni:

- Eulero in avanti:

$$\frac{z_i - 1}{T} = s_i \quad \Rightarrow \quad z_i = 1 + T s_i \quad (5.25)$$

- Eulero all'indietro:

$$\frac{z_i - 1}{T z_i} = s_i \quad \Rightarrow \quad z_i = \frac{1}{1 - s_i T} \quad (5.26)$$

- Tustin:

$$\frac{2(z_i - 1)}{T(z_i + 1)} = s_i \quad \Rightarrow \quad z_i = \frac{1 + s_i T/2}{1 - s_i T/2} \quad (5.27)$$

Se consideriamo il luogo dei punti del piano  $z$  in cui viene mappato da ciascuna delle precedenti trasformazioni il semipiano sinistro del piano  $s$  (che rappresenta il luogo dei poli stabili nel continuo), si ottengono le mappe in figura 5.2.

**Osservazione 5.1** Il metodo di Eulero in avanti mappa una parte del semipiano sinistro in  $s$  in punti esterni alla circonferenza unitaria in  $z$ . Questo significa che, a seconda del passo di campionamento usato, un  $C(s)$  con poli tutti stabili può venire approssimato con un  $\bar{C}(z)$  che ha poli instabili. Questo fenomeno è indesiderabile, e pertanto questo metodo di approssimazione non viene generalmente usato. Il metodo di Eulero all'indietro mappa la regione stabile nel continuo in un sottoinsieme della regione stabile nel discreto. Infine, nella trasformazione di Tustin le regioni di stabilità continua e discreta vengono mappate esattamente l'una sull'altra, come accade per la trasformazione  $z = e^{sT}$ , che caratterizza la mappatura dei poli  $s_i$  della trasformata di Laplace di un segnale nei poli  $z_i$  della trasformata zeta del segnale campionato. Le mappature tra poli relative ai tre metodi visti costituiscono in effetti delle approssimazioni, con funzioni razionali, della funzione  $z = e^{sT}$ . Tuttavia, il campionamento di un segnale e la discretizzazione per approssimazione di una funzione di trasferimento sono operazioni concettualmente molto diverse, da non confondere.

### 5.4 Specifiche statiche

Ciascuno dei metodi di discretizzazione visti fornisce un controllore digitale  $\bar{C}(z)$  le cui caratteristiche dinamiche riproducono con un certo grado di approssimazione quelle del controllore analogico di partenza  $C(s)$ . Analizziamo adesso il comportamento statico del sistema di controllo digitale ottenuto con questi metodi in termini di errori a regime a segnali canonici. Se il regolatore analogico  $C(s)$  è progettato per soddisfare determinate specifiche statiche, è auspicabile che anche  $\bar{C}(z)$ , inserito nell'anello di controllo digitale, conservi tali specifiche. In particolare, se il sistema di controllo analogico presenta errore a regime finito o nullo di inseguimento ad un segnale canonico  $r(t)$ , è desiderabile che il sistema digitale presenti lo stesso errore a regime nell'uscita  $y_k$  in corrispondenza ad un segnale di riferimento  $r_k = r(kT)$ . Ricordiamo che un sistema di controllo analogico in retroazione è detto di tipo  $l$  se il guadagno d'anello  $L(s) = C(s)P(s)$  ha  $l$  poli in  $s = 0$ , ovvero se

$$L(s) = \frac{K_L L'(s)}{s^l} \quad ; \quad L'(0) = 1$$

Analogamente, il sistema di controllo digitale è detto di tipo  $l$  se il guadagno d'anello  $L_d(z) = \bar{C}(z)P_d(z)$  ha  $l$  poli in  $z = 1$ , ovvero se

$$L_d(z) = \frac{K_{L_d} L'_d(z)}{(z - 1)^l} \quad ; \quad L'_d(1) = 1$$

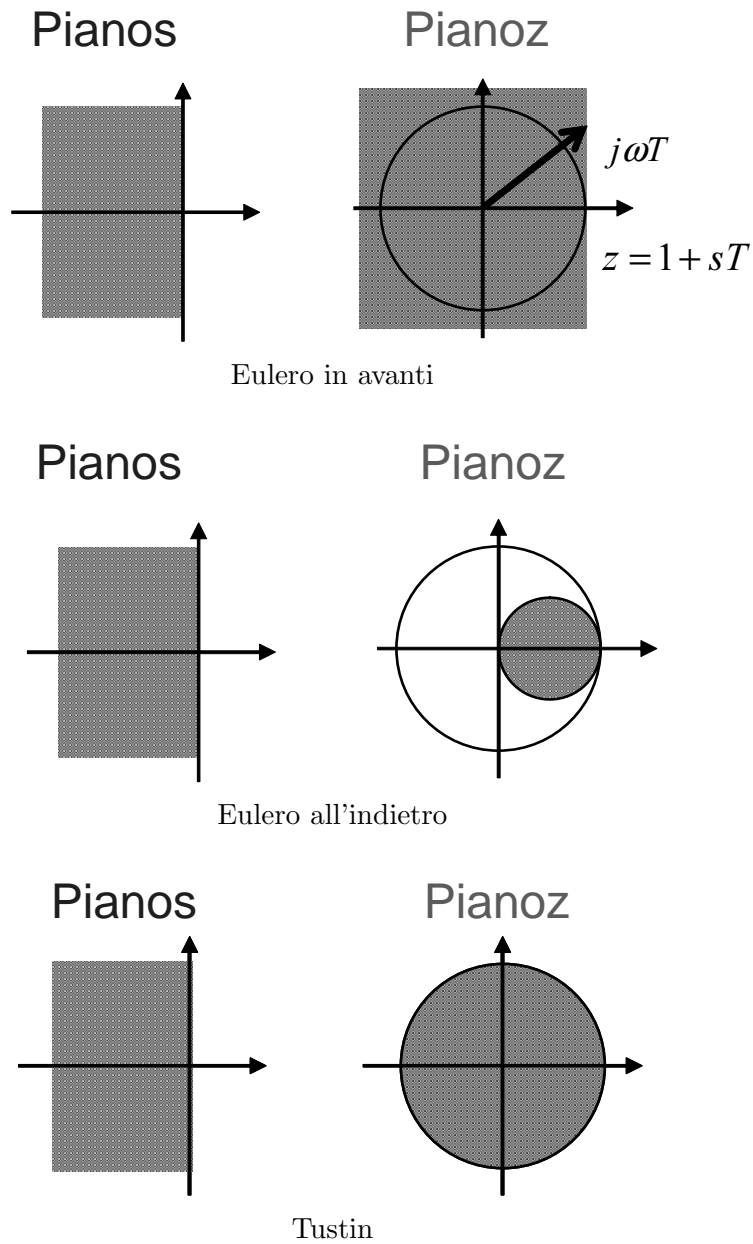


Figura 5.2: Mappatura dei poli con i tre metodi di Euler in avanti, Euler all'indietro e di Tustin.

Per questo sistema, si consideri il problema di inseguimento a regime del segnale di riferimento canonico di ordine  $h$  campionato

$$r_k^{(h)} = \frac{t^h}{h!} \Big|_{t=kT} = \frac{(kT)^h}{h!} \quad \text{i.e.} \quad R^{(h)}(z) = \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s^{h+1}} \right]$$

Si può facilmente dimostrare che  $R^{(h)}(z)$  può sempre essere scritto nella forma

$$R^{(h)}(z) = \frac{T^h}{(z-1)^{h+1}} \bar{R}^{(h)}(z) \quad \text{con} \quad \bar{R}^{(h)}(1) = 1 \quad (5.28)$$

L'espressione di  $\bar{R}^{(h)}(z)$  per  $h$  generico non è interessante, anche se è già stata calcolata esplicitamente per  $h = 0, 1, 2$ .

Seguendo un procedimento del tutto analogo a quanto fatto per il caso a tempo continuo, tenendo cioè presente l'espressione (5.28) ed utilizzando il teorema del valore finale, si verifica facilmente che per un sistema di tipo  $l \geq 1$  stabile ad anello chiuso, l'errore a regime di inseguimento al segnale canonico campionato  $r_k^{(h)}$

- è nullo se  $l > h$ ,
- vale  $e^{(h)} = \frac{T^h}{K_{L_d}}$  se  $l = h$ ,
- è infinito se  $l < h$ .

Si supponga di aver progettato per l'impianto

$$P(s) = \frac{K_p}{s^p} P'(s) \quad ; \quad P'(0) = 1 \quad (5.29)$$

il regolatore analogico

$$C(s) = \frac{K_c}{s^c} C'(s) \quad ; \quad C'(0) = 1 \quad (5.30)$$

in modo che il sistema di controllo risultante presenti errore a regime finito al segnale canonico di ordine  $h = l = p + c$  pari a  $1/K_L$  dove  $K_L = K_c K_p$ . Ci chiediamo se progettando il controllore digitale approssimato  $\bar{C}(z)$ , tale errore a regime viene conservato.

Consideriamo l'equivalente campionato con ZOH  $P_d(z)$  dell'impianto. Si hanno le seguenti proprietà.

- Il tipo di  $P_d(z)$  coincide con il tipo  $p$  di  $P(s)$
- Il guadagno di Bode  $K_{P_d}$  di  $P_d(z)$  vale  $K_{P_d} = T^p K_p$ .

La prima parte di questo risultato è ovvia, la seconda è fornita senza dimostrazione.

Consideriamo adesso il tipo ed il guadagno di Bode del controllore  $\bar{C}(z)$  progettato per approssimazione. In base alle relazioni che esprimono la mappatura dei poli, risulta evidente per ciascuno dei tre metodi che per ogni polo in  $s = 0$  di  $C(s)$ , il corrispondente  $\bar{C}(z)$  ha un polo in  $z = 1$ , per cui il tipo  $c$  di  $C(s)$  è uguale al tipo di  $\bar{C}(z)$ . Inoltre risulta, per la trasformazione di Tustin (ma si ha un risultato analogo anche per gli altri metodi)

$$\bar{C}(z) = K_c \left( \frac{T}{2} \right)^c \frac{(z+1)^c}{(z-1)^c} C' \left( \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \right) \quad (5.31)$$

e quindi il guadagno di Bode di  $\bar{C}(z)$  vale

$$K_{\bar{C}} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^c \bar{C}(z) = T^c K_c \quad (5.32)$$

Dunque, il tipo del guadagno d'anello discreto  $L_d(z) = \bar{C}(z)P_d(z)$  è uguale a quello di  $L(s) = C(s)P(s)$ . Inoltre il guadagno di Bode di  $L(z)$  vale

$$K_{L_d} = K_{\bar{C}} K_{P_d} = T^{p+c} K_L \quad (5.33)$$

Allora, l'errore a regime al segnale canonico campionato di ordine  $h = l = p + c$  vale

$$e^{(h)} = \frac{T^h}{K_{L_d}} = \frac{1}{K_L} \quad (5.34)$$

ed è pertanto uguale all'errore a regime al segnale canonico continuo del corrispondente sistema di controllo analogico.

### 5.5 Predistorsione in frequenza (prewarping)

I metodi di sintesi in frequenza a tempo continuo si basano sulle relazioni tra i parametri della risposta in frequenza del guadagno d'anello (pulsazione di attraversamento e margine di fase) e le prestazioni nel dominio del tempo del sistema ad anello chiuso. In base a questa osservazione, un ragionevole criterio di fedeltà del controllore approssimato  $\bar{C}(z)$  al controllore analogico  $C(s)$  in termini di prestazioni dinamiche del sistema ad anello chiuso è quello di valutare se  $\bar{C}(z)$  fornisce, almeno in corrispondenza alla pulsazione di attraversamento, lo stesso contributo di modulo e fase di  $C(s)$ , ovvero se ha lo stesso valore della risposta in frequenza. I metodi di approssimazione presentati precedentemente non godono della proprietà di conservare la risposta in frequenza. Si consideri il metodo di approssimazione di Tustin. Confrontando la risposta in frequenza del controllore analogico  $C(s)|_{s=j\omega}$  con quella del controllore digitale approssimato  $\bar{C}(z)|_{z=e^{j\omega T}}$  risulta

$$\begin{aligned}\bar{C}(e^{j\omega T}) &= C\left(\frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1}\right) = C\left(\frac{2}{T} \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{e^{j\omega \frac{T}{2}} + e^{-j\omega \frac{T}{2}}}\right) = C\left(\frac{2}{T} \frac{2j \sin(\frac{\omega T}{2})}{2 \cos(\frac{\omega T}{2})}\right) \\ &= C\left(j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right) \neq C(j\omega)\end{aligned}\quad (5.35)$$

e quindi la risposta in frequenza a parità di pulsazione non viene conservata ma viene distorta. In particolare, alla pulsazione  $\omega$  il controllore digitale esibisce la risposta in frequenza che il controllore analogico presenta alla pulsazione

$$\frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (5.36)$$

In particolare, per  $\omega \rightarrow \omega_N = \frac{\pi}{T}$  si ha che  $\frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \rightarrow \infty$ , cioè il comportamento ad alta frequenza del controllore nel continuo viene assunto dal controllore discreto alla pulsazione  $\omega_N = \frac{\pi}{T}$ . Si ha quindi una sorta di "compressione" dell'asse delle frequenze verso la pulsazione di Nyquist  $\omega_N$ , che rappresenta la massima pulsazione di un segnale correttamente riproducibile sotto campionamento.

In particolare, alla pulsazione di attraversamento  $\omega_a$  imposta dal controllore analogico, il corrispondente controllore digitale ha una risposta in frequenza pari a

$$\bar{C}(e^{j\omega_a T}) = C\left[j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_a T}{2}\right)\right] \quad (5.37)$$

mentre per preservare la pulsazione di attraversamento e il margine di fase dovrebbe risultare

$$\bar{C}(e^{j\omega_a T}) = C(j\omega_a) \quad (5.38)$$

Allo scopo di conservare la risposta in frequenza del controllore alla pulsazione di attraversamento, si introduce la seguente trasformazione di Tustin modificata (con prewarping, o predistorsione in frequenza):

$$\bar{C}_{pw}(z) = C\left(\frac{\omega_a}{\omega_{pw}} \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}\right) \quad (5.39)$$

dove

$$\omega_{pw} = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_a T}{2}\right) \quad (5.40)$$

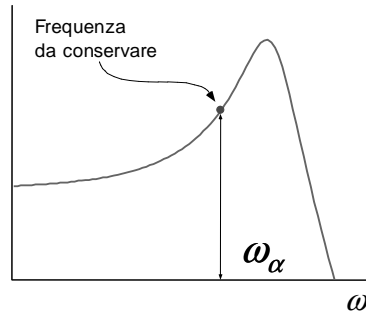
Il controllore digitale approssimato definito come sopra soddisfa la proprietà

$$\bar{C}_{pw}(e^{j\omega_a T}) = C\left(\frac{\omega_a}{\frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_a T}{2}\right)} j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_a T}{2}\right)\right) = C(j\omega_a) \quad (5.41)$$

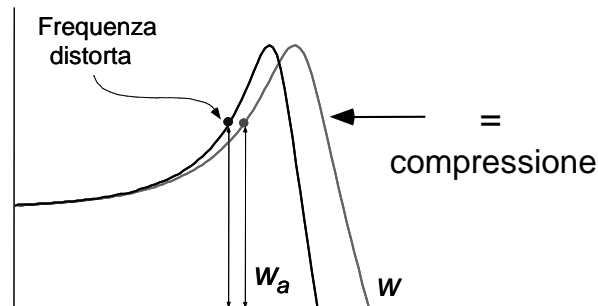
e dunque  $\bar{C}_{pw}(z)$  conserva la risposta in frequenza del controllore analogico  $C(s)$  in un intorno della pulsazione  $\omega_a$ . Questo, come già detto, permette di conservare la pulsazione di attraversamento ed il margine di fase del guadagno di anello e dunque, auspicabilmente, anche le caratteristiche del transitorio del sistema ad anello chiuso.

Il metodo ora descritto equivale ad effettuare, prima dell'applicazione della trasformazione di Tustin, una scalatura (predistorsione o prewarping) dell'asse delle frequenze di un fattore  $\omega_a/\omega_{pw}$ , in modo da compensare la successiva distorsione alla pulsazione  $\omega_a$ . Il procedimento può essere descritto graficamente come segue.

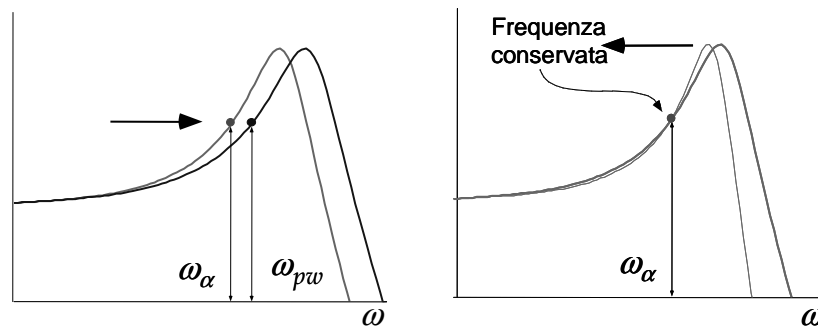
- Risposta in frequenza del controllore analogico



- Applicazione della trasformazione di Tustin senza predistorsione



- Applicazione della trasformazione di Tustin con predistorsione



## 5.6 Matching poli zeri (MPZ)

Questa tecnica di discretizzazione approssimata è basata sull'osservazione, assolutamente empirica, che le tecniche di approssimazione già analizzate (ad es. Tustin) trasformano sia i poli sia gli zeri del controllore da continuo a discreto secondo leggi che approssimano la nota relazione  $z = e^{sT}$ . La tecnica MPZ prevede il calcolo di un controllore  $\bar{C}(z)$  che abbia come zeri e poli rispettivamente gli zeri e i poli di  $C(s)$  trasformati esattamente secondo  $z = e^{sT}$ .

Per progettare  $\bar{C}(z)$  secondo questa tecnica si procede come segue. Assegnato  $C(s)$  della forma

$$C(s) = \frac{K}{s^h} \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (5.42)$$

$\bar{C}(z)$  si calcola come

$$\bar{C}(z) = K_d \frac{(z+1)^{n+h-m}}{(z-1)^h} \frac{\prod_{i=1}^m (z - e^{z_i T})}{\prod_{i=1}^n (z - e^{p_i T})} \quad (5.43)$$

dove  $K_d$  è selezionato in modo che  $\bar{C}(z)$  abbia guadagno di Bode pari a quello del controllore analogico  $C(s)$  moltiplicato per  $T^h$ , in modo da preservare le specifiche statiche secondo quanto discusso nel paragrafo precedente. Risulta

$$K_d = T^h K \frac{\prod_{i=1}^m (-r_i)}{\prod_{i=1}^n (-p_i)} \frac{1}{2^{n+h-m}} \frac{\prod_{i=1}^n (1 - e^{p_i T})}{\prod_{i=1}^m (1 - e^{r_i T})} \quad (5.44)$$

**Osservazione 5.2** Dalla formula (5.43), si osserva che gli zeri all'infinito di  $C(s)$ , in numero pari al grado relativo  $n + h - m$ , vengono mappati in altrettanti zeri di  $\bar{C}(z)$  in  $z = -1$ . Il motivo di questa scelta risiede essenzialmente nella seguente osservazione. Se  $C(s)$  ha grado relativo  $n + h - m > 0$ , allora la risposta in frequenza  $C(j\omega)$  tende a zero ad alta frequenza, cioè per  $\omega \rightarrow \infty$ . È quindi ragionevole imporre che la risposta in frequenza del controllore discreto,  $\bar{C}(e^{j\omega T})$ , tenda a zero in corrispondenza della massima pulsazione che può essere correttamente elaborata dal sistema digitale (senza cioè che intervengano fenomeni di aliasing). Tale pulsazione è la pulsazione di Nyquist  $\omega_N = \pi/T$ . Si impone quindi che  $\bar{C}(e^{j\omega_N T})$  valga 0, ovvero si impone  $\bar{C}(-1) = 0$ , che equivale ad introdurre almeno uno zero in  $z = -1$ . Introducendo  $n + h - m$  zeri in  $z = -1$  si ottiene che la risposta in frequenza di  $\bar{C}(z)$  ha uno zero alla pulsazione di Nyquist di molteplicità pari allo zero all'infinito di  $C(s)$ , in questo modo il controllore  $\bar{C}(z)$  conserva per  $\omega \rightarrow \omega_N$  la rapidità di convergenza a zero della risposta in frequenza che  $C(s)$  presenta per  $\omega \rightarrow \infty$ .

**Esempio 5.2** Sia data la funzione di trasferimento di un controllore a tempo continuo

$$C(s) = \frac{a}{s + a} \quad (5.45)$$

Il controllore digitale realizzato con MPZ ha la forma

$$\bar{C}(z) = K_d \frac{z + 1}{z - e^{-aT}} \quad (5.46)$$

È necessario poi aggiustare il guadagno in continua imponendo

$$\bar{C}(1) = C(0) = 1 \Rightarrow K_d = \frac{1 - e^{-aT}}{2} \quad (5.47)$$

Risulta quindi

$$\bar{C}(z) = \frac{1 - e^{-aT}}{2} \frac{z + 1}{z - e^{-aT}} \quad (5.48)$$

Esiste anche una tecnica MPZ modificata (MMPZ) che non prevede l'aggiunta degli zeri in  $z = -1$ . Applicandola all'esempio precedente si ottiene

$$\bar{C}(z) = (1 - e^{-aT}) \frac{1}{z - e^{-aT}} \quad (5.49)$$

## 5.7 Scelta del passo di campionamento

Il passo di campionamento è un parametro fondamentale la cui scelta influenza in modo molto significativo le prestazioni di un sistema di controllo in cui il compensatore digitale sia progettato per approssimazione di un controllore analogico. Si vengono a creare alcuni evidenti compromessi.

- Un campionamento più rapido corrisponde a prestazioni migliori del sistema di controllo, in quanto implica
  - Maggiore fedeltà delle tecniche per l'approssimazione discreta del controllore continuo
  - Banda dei segnali elaborabili dal sistema più estesa, in base al teorema di Shannon
- Viceversa, un campionamento più lento permette di realizzare ulteriori obiettivi quali

- Uso di algoritmi più raffinati a parità di hardware, disponendo ad ogni passo di una maggior quantità di tempo per il calcolo dell'azione di controllo
- Richiesta di minore velocità di conversione A/D e D/A, quindi impiego di convertitori meno costosi
- Minore sensibilità agli errori numerici, come illustrato nel seguito.

Una limitazione fondamentale alla scelta di  $T$  è data dal teorema di Shannon. Se il sistema di controllo, in base alle specifiche di transitorio, deve garantire una banda passante  $B_3$  (legata alla specifica sul tempo di salita  $t_s$ ), deve risultare almeno

$$\omega_s > 2B_3 \quad \Leftrightarrow \quad T < \frac{\pi}{B_3} \quad (T \lesssim t_s) \quad (5.50)$$

altrimenti i segnali che caratterizzano il transitorio del sistema vengono campionati in condizioni di aliasing.

Nel progetto per discretizzazione, tuttavia, la precedente limitazione è spesso molto meno stringente rispetto a requisiti di altro tipo, come ad esempio i seguenti.

- Garantire una bassa distorsione della risposta del sistema rispetto alla risposta del corrispondente sistema analogico
- Limitare l'escursione del segnale di comando tra un istante di campionamento e l'altro; se  $T$  è alto infatti, la correzione del comando da applicare all'impianto da un passo al successivo è elevata perchè l'impianto resta a lungo di fatto in anello aperto, visto che il comando rimane costante per un intero periodo; al limite, il comando può subire forti oscillazioni tra istanti di campionamento successivi, a cui corrisponde un andamento oscillante anche dell'uscita dell'impianto.
- Assicurare la prontezza della reazione del sistema di controllo alla variazione del segnale di riferimento; tale variazione infatti non viene recepita dal sistema fino all'istante di campionamento successivo alla variazione stessa.

In molte applicazioni, si considera un buon compromesso scegliere un passo di campionamento compreso tra  $1/20$  e  $1/10$  del tempo di salita della risposta al gradino sistema

$$\frac{t_s}{20} < T < \frac{t_s}{10} \quad (5.51)$$

ovvero

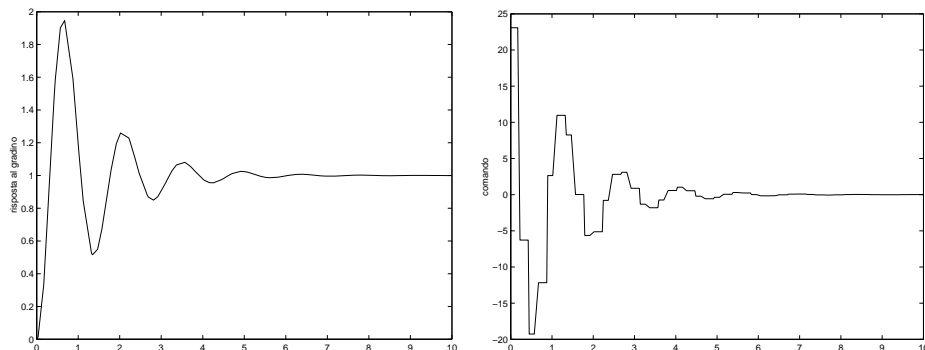
$$\frac{\pi}{20B_3} < T < \frac{\pi}{10B_3} \quad ; \quad 20B_3 < \omega_s < 40B_3 \quad (5.52)$$

salvo poi effettuare opportune simulazioni per verificare l'effettiva rispondenza del sistema alle specifiche ed eventualmente correggere la scelta.

**Esempio 5.3** Effetto del passo di campionamento su un progetto per discretizzazione con il metodo di Tustin.

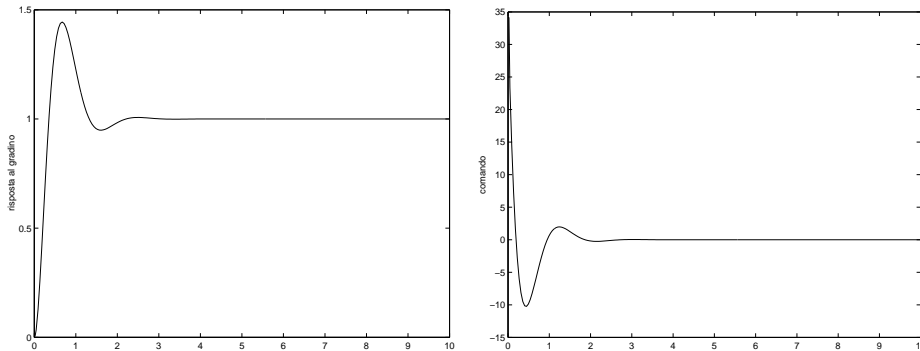
$$P(s) = \frac{1}{s^2} \quad ; \quad C(s) = 40 \frac{s+2}{s+10} \quad ; \quad B_3 = 7 \text{ rad/s}$$

- Risposta al gradino per  $\omega_s = 4B_3$  (uscita e comando)



La scelta del passo di campionamento in questo caso rispetta evidentemente la limitazione data dal teorema di Shannon, ma le prestazioni del sistema non sono soddisfacenti. Si ha infatti un comportamento fortemente oscillatorio della risposta. Evidentemente, il campionamento è troppo grossolano perché la formula di approssimazione di Tustin permetta di riprodurre fedelmente la dinamica del controllore analogico.

- Risposta al gradino per  $\omega_s = 20B_3$  (uscita e comando)



### 5.8 Progetto del filtro antialiasing. Effetto sul passo di campionamento

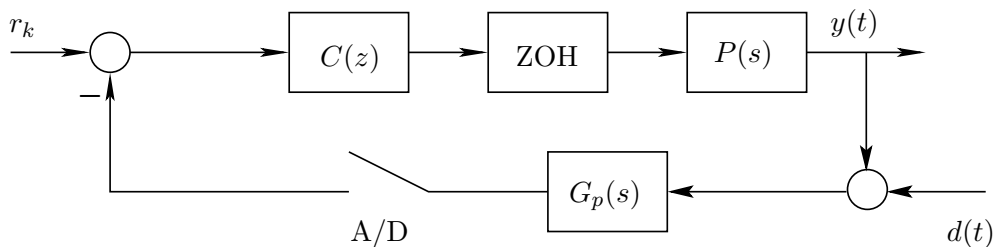


Figura 5.3: Sistema di controllo digitale con filtro anti aliasing

Nei sistemi di controllo digitale, è estremamente dannoso campionare eventuali disturbi ad alta frequenza in condizioni di aliasing, in quanto le armoniche spurie dovute a questo fenomeno possono avere contenuto frequenziale appartenente alla banda del sistema, e come tali alterare le specifiche di transitorio o produrre oscillazioni indesiderate a bassa frequenza in condizioni di regime.

Per evitare fenomeni di aliasing dovuti al campionamento di disturbi ad alta frequenza, è necessario prefiltrare con un passa basso opportunamente progettato i segnali a monte dell'operazione di campionamento. Idealmente, sarebbe necessario introdurre un filtro che attenui totalmente le armoniche superiori alla pulsazione di Nyquist  $\omega_N$  corrispondente al passo di campionamento scelto ed introduca attenuazione nulla alle altre frequenze. Dal momento che un tale filtro ideale non risulta fisicamente realizzabile, è necessario sostituirlo con un filtro lineare reale, e questo rende necessarie alcune cautele.

Si consideri un filtro passa basso del primo ordine con pulsazione di taglio  $\omega_p$

$$G_p(s) = \frac{\omega_p}{s + \omega_p} \quad (5.53)$$

L'inserimento di un filtro così fatto introduce un ritardo di fase nel guadagno d'anello del sistema, e questo può alterare anche in modo significativo le specifiche dinamiche. Affinché lo sfasamento introdotto dal filtro (ma anche l'attenuazione di modulo) risulti trascurabile a pulsazioni paragonabili alla pulsazione

di attraversamento  $\omega_a$ , la pulsazione di taglio  $\omega_p$  deve essere scelta sufficientemente più grande di  $B_3$ , ad esempio una decade sopra, cioè

$$\omega_p > 10B_3 \quad (5.54)$$

Tuttavia,  $\omega_p$  deve essere sufficientemente più piccola della pulsazione di Nyquist  $\omega_N$  affinché venga assicurata una buona attenuazione dei disturbi che verrebbero altrimenti campionati in condizioni di aliasing. Si ponga ad esempio

$$\omega_N > 10\omega_p \quad (5.55)$$

È evidente che le due relazioni precedenti impongono un ulteriore vincolo sulla scelta del tempo di campionamento. Risulta infatti necessariamente

$$\omega_s > 20\omega_p > 200B_3. \quad (5.56)$$

Questa condizione rappresenta in molti casi una sovrastima. Tipicamente è sufficiente imporre

$$\omega_s > 50B_3. \quad (5.57)$$

### 5.8.1 Ulteriori vincoli sulla scelta del passo di campionamento

- *Ritardo di fase dovuto allo ZOH.*

Abbiamo osservato che la presenza dello ZOH introduce nell'anello un ritardo di fase pari a

$$\arg G_{ZOH}(j\omega) = -\frac{\omega T}{2} \quad (5.58)$$

Se si ammette che l'introduzione dello ZOH provochi, rispetto al sistema di controllo analogico, un peggioramento del margine di fase al massimo pari  $\Delta m_\phi$  alla pulsazione di attraversamento  $\omega_a$ , allora si ha l'ulteriore condizione su  $T$  data da

$$\frac{\omega_a T}{2} < \Delta m_\phi \quad (5.59)$$

- *Rappresentazione in precisione finita dei numeri in macchina.*

Si consideri la relazione  $z = e^{sT}$  tra poli nel continuo e poli nel discreto, che si realizza ad esempio nella discretizzazione del controllore mediante il metodo MPZ. Si osserva facilmente che se  $T \rightarrow 0$ , qualunque sia il valore di un polo nel continuo, esso tende ad essere mappato in  $z = 1$ . Detto diversamente, più  $T$  è basso, più i poli nel discreto sono tutti vicini tra loro ed al punto  $z = 1$ . Poiché la precisione di rappresentazione in macchina è finita, al diminuire di  $T$  poli anche ben distinti divengono effettivamente indistinguibili, e questo distorce le caratteristiche dinamiche del controllore discreto rispetto al controllore continuo.

Ad esempio, si consideri la discretizzazione mediante MPZ di un sistema con due poli in  $s_1 = -1$  e  $s_2 = -10$ .

1. Se  $T = 1 \text{ ms}$ , i corrispondenti poli discreti valgono  $z_1 = e^{-0.001} \approx 0.9990$ ,  $z_2 = e^{-0.01} \approx 0.9900$ . Con troncamento alla seconda cifra decimale, si ha  $z_1 = z_2$ , esattamente lo stesso risultato che si otterrebbe se fosse  $s_1 = \frac{1}{T} \ln z_1 = \frac{1}{T} \ln z_2 = s_2 \approx -10.05$ .
2. Se  $T = 100 \text{ ms}$ , lo stesso troncamento produce  $z_1 = 0.90$ ,  $z_2 = 0.36$ , che è lo stesso risultato che si otterrebbe a partire da  $s_1 \approx -1.05$ ,  $s_2 \approx -10.21$ .