Capitolo 7

Progetto nello spazio degli stati

Sommario. In questo capitolo viene discussa la proprietà di raggiungibilità strutturale dei modelli lineari a tempo discreto in equazioni di stato. Sulla base di tale proprietà, viene analizzato il progetto del regolatore in retroazione statica dello stato mediante la tecnica di allocazione degli autovalori.

7.1 *Metodi nello spazio degli stati*

Si consideri un sistema lineare stazionario a tempo discreto in equazioni di stato, esprimibile nella forma

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k & ; \quad x_k \in \mathbb{R}^n, \quad u_k \in \mathbb{R}^m \\ y_k = Cx_k \end{cases} \tag{7.1}$$

dove A, B e C sono matrici costanti di dimensioni opportune. Il sistema 7.1 può eventualmente rappresentare l'equivalente campionato con ZOH P_d in equazioni di stato di un impianto P a tempo continuo. Si supponga che le variabili di stato del sistema siano *accessibili*, ovvero che siano disponibili misure (o stime) di x_k ad ogni istante; in base al concetto di stato, ciò significa disporre di un'informazione completa sul sistema.

Si consideri il problema di progettare una legge di controllo sotto forma di retroazione lineare statica delle variabili di stato

$$u_k = F_k x_k + v_k \tag{7.2}$$

eventualmente stazionaria (ovvero con $F_k = F$ costante), in modo da soddisfare opportune specifiche. In figura 7.1 è rappresentato uno schema a blocchi del sistema (7.1) con applicata la legge di controllo in retroazione dallo stato (7.2). Nel caso in cui il guadagno di retroazione F_k sia costante ($F_k = F$), il sistema ad anello chiuso risulta

$$\begin{cases} x_{k+1} = (A + BF)x_k + Bv_k \\ y_k = Cx_k \end{cases} \tag{7.3}$$

Ci proponiamo di studiare il problema della sintesi del guadagno di retroazione F in modo da assicurare al sistema ad anello chiuso, oltre alla stabilità interna, il soddisfacimento di opportune specifiche di prestazione.

La soluzione del problema ora enunciato necessita dello studio della proprietà di raggiungibilità strutturale. Tale proprietà, in parole semplici, esprime la possibilità di influenzare o meno ad arbitrio, mediante l'ingresso, l'evoluzione di tutte o di parte delle variabili di stato.

7.2 *Raggiungibilità*

Dato un sistema lineare stazionario a tempo discreto

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k & ; \quad x_k \in \mathbb{R}^n, \quad u_k \in \mathbb{R}^m \\ y_k = Cx_k \end{cases} \tag{7.4}$$

ed una una sequenza di ingresso $\{u_k\}$, l'evoluzione dello stato al passo k a partire da una certa condizione iniziale x_0 vale

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u_i \tag{7.5}$$

che, in forma matriciale compatta, si può scrivere come

$$x_k = A^k x_0 + R_k U_k \tag{7.6}$$

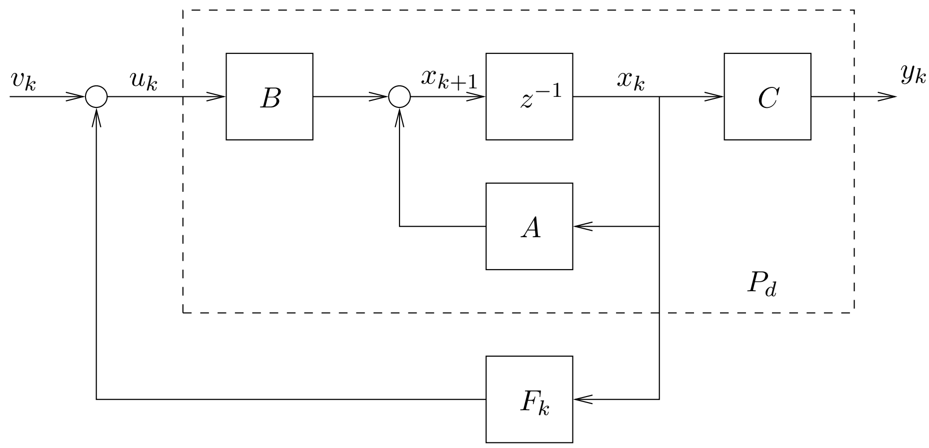

Figura 7.1: Schema di un sistema con rappresentazione in spazio degli stati.

dove

$$R_k = [B\ AB\ \ldots\ A^{k-1}B], \quad U_k = \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ u_{k-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

Definizione 7.1 Dati due stati x_0 ed $\bar{x}$, lo stato $\bar{x}$ è detto *raggiungibile* a partire da x_0 in k passi se esiste un vettore di ingressi U_k tale da che l'evoluzione dello stato del sistema al passo k con condizione iniziale x_0 valga $\bar{x}$, cioè tale che

$$\bar{x} = A^k x_0 + R_k U_k \tag{7.8}$$

In termini algebrici, la precedente condizione si esprime dicendo che $\bar{x} - A^k x_0$ è l'immagine del vettore U_k attraverso la trasformazione lineare $\mathbb{R}^{km} \to \mathbb{R}^n$ associata alla matrice R_k, dunque $\bar{x}$ è raggiungibile da x_0 in k passi se e solo se

$$\bar{x} - A^k x_0 \in \mathcal{R}_k \tag{7.9}$$

dove

$$\mathcal{R}_k = \mathrm{Im}[R_k] \tag{7.10}$$

è il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ costituito dall'immagine di R_k.
Ponendo $x_0 = 0$ nella (7.9), risulta evidente che $\mathcal{R}_k$ è l'insieme degli stati $\bar{x}$ raggiungibili in k passi a partire dallo stato iniziale nullo. L'insieme $\mathcal{R}_k$ è detto *sottospazio di raggiungibilità* in k passi.

Lemma 7.1 (Teorema di Hamilton-Cayley) *Data una matrice quadrata A di dimensione n, si consideri il suo polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$*

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_0 \tag{7.11}$$

La matrice A è radice del suo polinomio caratteristico, ovvero risulta

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} + \cdots - a_0 I \tag{7.12}$$

Teorema 7.1 *Dato il sistema (7.1), sia $\mathcal{R} = \mathcal{R}_n = \mathrm{Im}[B\ AB\ \ldots\ A^{n-1}B]$. Allora, i sottospazi di raggiungibilità in $1, 2, \ldots, n$ passi sono tali che*

$$\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{R}_k \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{R}_n = \mathcal{R}_{n+1} = \mathcal{R}_{n+2} = \cdots = \mathcal{R} \tag{7.13}$$

Proof: Per costruzione, si ha $\mathcal{R}_k = \mathrm{Im}[B\ AB\ \ldots\ A^{k-1}B] \subseteq \mathrm{Im}[B\ AB\ \ldots\ A^kB] = \mathcal{R}_{k+1}$ per ogni k. Inoltre, per ogni $k > n$, per il teorema di Hamilton-Cayley, il vettore $A^{k-1}B$ è combinazione lineare di $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$, per cui $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}_n = \mathcal{R}$.
In conseguenza del precedente risultato, se uno stato è raggiungibile dallo stato nullo, allora lo è in al più n passi. Il sottospazio

$$\mathcal{R} = \mathrm{Im}[B\ AB\ \ldots\ A^{n-1}B] \tag{7.14}$$

rappresenta quindi l'insieme degli stati del sistema raggiungibili dallo stato nullo con un'opportuna sequenza di ingresso, indipendentemente dal numero di passi, ed è detto *sottospazio di raggiungibilità* del sistema. La matrice

$$R = [B\ AB\ \ldots\ A^{n-1}B] \tag{7.15}$$

è detta *matrice di raggiungibilità*.

Osservazione 7.1 In generale, la successione dei sottospazi $\mathcal{R}_k$ in (7.13) può diventare stazionaria (cioè smettere di aumentare di dimensione al crescere di k) anche a partire da qualche $k < n$, pertanto $\dim \mathcal{R} = \mathrm{rank}[R] \leq n$.

Ricordiamo la definizione di invarianza di un sottospazio rispetto ad una trasfomazione lineare.

Definizione 7.2 Dato un sottospazio X di $\mathbb{R}^n$, X è invariante rispetto alla trasformazione lineare $t_A(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita nella base canonica di $\mathbb{R}^n$ dalla matrice A (A-invariante), se per ogni $x \in X$ risulta $t_A(x) = Ax \in X$.

Lemma 7.2 *Il sottospazio $\mathcal{R}$ è A-invariante, ovvero*

$$\bar{x} \in \mathcal{R} \ \Rightarrow\ A\bar{x} \in \mathcal{R} \tag{7.16}$$

Proof: Il sottospazio dei vettori Ax con $x \in \mathcal{R}$, ovvero l'immagine di $\mathcal{R}$ attraverso la trasformazione $t_A(\cdot)$ è generato dalle colonne della matrice $AR = [AB\ A^2B \ldots A^nB]$. Per il teorema di Hamilton Cayley, le colonne della matrice AR risultano combinazione lineare di quelle di R. Pertanto l'immagine di $\mathcal{R}$ attraverso $t_A(\cdot)$ è contenuta in $\mathcal{R}$ e quindi $\mathcal{R}$ è A-invariante.

Definizione 7.3 Il sistema (7.1) è detto *completamente raggiungibile* se l'insieme degli stati raggiungibili dallo stato nullo coincide con tutto lo spazio degli stati

$$\mathcal{R} = \mathbb{R}^n \tag{7.17}$$

ovvero se la matrice R ha rango massimo ($\mathrm{rank}[R] = n$).

Se il sistema è completamente raggiungibile, allora per ogni stato iniziale x_0 ed ogni stato obiettivo $\bar{x}$ esiste una sequenza di ingressi U_n che porta lo stato da x_0 a $\bar{x}$ in n passi, cioè una sequenza tale che

$$x_n = A^n x_0 + RU_n = \bar{x} \tag{7.18}$$

Infatti, poiché ogni stato è raggiungibile dallo stato nullo, risulta in particolare che $\bar{x} - A^n x_0$ è raggiungibile dallo stato nullo per qualunque $\bar{x}$ e x_0, quindi esiste una sequenza d'ingresso U_n tale che $\bar{x} - A^n x_0 = RU_n$.
Si consideri una trasformazione lineare di coordinate, ovvero un cambiamento di base nello spazio degli stati dato da

$$x_k = Tz_k \tag{7.19}$$

dove T è una matrice non singolare, x_k il vettore di stato espresso nella base canonica di $\mathbb{R}^n$ e z_k il vettore di stato espresso nella nuova base. Le equazioni di evoluzione dello stato del sistema con lo stato espresso nella nuova base sono date da

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z_{k+1} & = & \tilde{A}z_k + \tilde{B}u_k \\ y_k & = & \tilde{C}z_k \end{array} \right. \tag{7.20}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \ \ ; \ \ \tilde{B} = T^{-1}B \ \ ; \ \ \tilde{C} = CT \tag{7.21}$$

Osservazione 7.2 La proprietà di completa raggiungibilità di un sistemaè invariante rispetto a ogni trasformazione di coordinate nello spazio degli stati. Infatti, la matrice di raggiungibilità nella base trasformata vale

$$\tilde{R} = [\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \dots] = [T^{-1}B \quad T^{-1}ATT^{-1}B \quad \dots] = T^{-1}R \tag{7.22}$$

e dunque $\tilde{R}$ ha rango pieno se e solo se lo ha R, essendo T non singolare.

7.2.1 Decomposizione di raggiungibilità

Osserviamo che se x_k è, come al solito, il vettore di stato del sistema riferito alla base canonica di $\mathbb{R}^n$, l'equazione di evoluzione dello stato può essere scritta come

$$x_{k+1} = t_A(x_k) + t_B(u_k) \tag{7.23}$$

dove $t_A(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $t_B(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sono le trasformazioni lineari definite rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ dalle matrici A e B, rispettivamente.

Definizione 7.4 Si definisce *indice di raggiungibilità* del sistema (7.1) la dimensione dello spazio raggiungibile, ovvero la quantità

$$n_r = \dim\mathcal{R} = \mathrm{rank}[R] \leq n \tag{7.24}$$

Se l'indice di raggiungibilità del sistema vale n_r, allora il suo spazio raggiungibile è completamente generato da una base di n_r vettori di $\mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti.
Sia $n_r < n$ (sistema non completamente raggiungibile) e si introduca un cambiamento di coordinate nello spazio degli stati

$$x_k = Tz_k \tag{7.25}$$

in cui i primi n_r elementi della nuova base siano una base del sottospazio raggiungibile. Tale cambiamento di coordinate è ottenuto mediante la matrice

$$T = [v_1 \dots v_{n_r} w_{n_r+1} \dots w_n] \tag{7.26}$$

dove $\{v_1, \dots, v_{n_r}\}$ è una base di $\mathcal{R}$; tale base può essere costituita da un insieme di vettori composto da n_r colonne indipendenti di R. L'insieme dei vettori indipendenti $\{w_{n_r+1}, \dots, w_n\}$ è un completamento della base di $\mathcal{R}$ considerata per arrivare ad ottenere una base di $\mathbb{R}^n$.[1]
Poiché $\mathcal{R}$ è A-invariante, ovvero invariante rispetto alla trasformazione $t_A(\cdot)$, la matrice $\tilde{A} = T^{-1}AT$, associata alla trasformazione lineare $t_A(\cdot)$ nella nuova base dello spazio di stato, ha le prime n_r colonne con gli ultimi $n - n_r$ coefficienti nulli.[2] Inoltre, poiché $\mathrm{Im}[B] \subseteq \mathcal{R}$ (si noti infatti che B rappresenta un sottoinsieme delle colonne di R), la trasformazione $t_B(\cdot)$ applicata a un qualunque vettore genera un vettore che non ha componenti lungo $w_{n_r+1}, \dots, w_n$, e dunque le colonne della matrice $\tilde{B} = T^{-1}B$, associata alla trasformazione $t_B(\cdot)$, nella nuova base dello spazio di stato hanno gli ultimi $n-n_r$ coefficienti nulli.
Per quanto appena osservato, le matrici del sistema nella nuova base

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \quad ; \quad \tilde{B} = T^{-1}B \quad ; \quad \tilde{C} = CT \tag{7.27}$$

hanno la forma

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_r & A_{r\bar{r}} \\ 0 & A_{\bar{r}} \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C_r & C_{\bar{r}} \end{bmatrix} \tag{7.28}$$

Questa forma è detta *decomposizione canonica di raggiungibliltà*.
In forma estesa, il sistema può essere scritto come

$$\begin{cases} z^r_{k+1} &= A_r z^r_k + A_{r\bar{r}} z^{\bar{r}}_k + B_r u_k \\ z^{\bar{r}}_{k+1} &= A_{\bar{r}} z^{\bar{r}}_k \end{cases} \tag{7.29}$$

---

[1]Si ricordi che la matrice T di cambiamento di base dalla base canonica ad un'altra base $\mathcal{B}$ è data da una matrice non singolare le cui colonne sono i vettori della base $\mathcal{B}$ espressi in base canonica.

[2]Ricodiamo infatti che la matrice associata ad una trasformazione lineare $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ ed a due date basi per $\mathbb{R}^p$ e $\mathbb{R}^q$ ha come colonne i vettori trasformati dei vettori della base di $\mathbb{R}^p$ espressi secondo la base di $\mathbb{R}^q$.

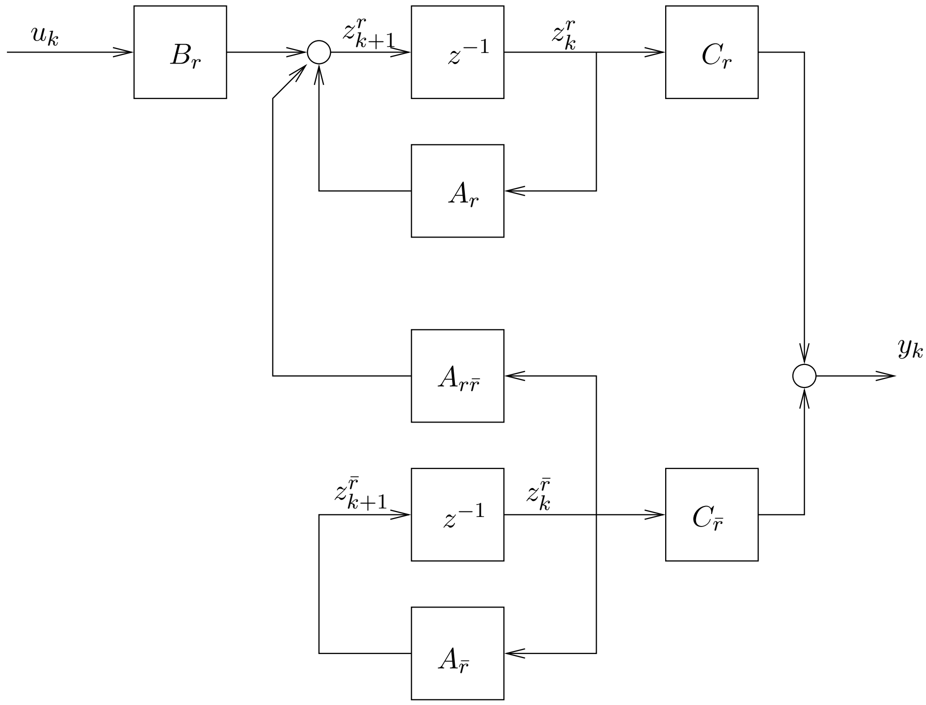

Figura 7.2: Schema a blocchi del sistema in decomposizione di raggiungibilità.

dove $x_k = Tz_k = T[z^r_k \; z^{\bar{r}}_k]'$, essendo z^r_k e $z^{\bar{r}}_k$ le componenti dello stato lungo la base dello spazio raggiungibile e lungo il suo completamento. In figura 7.2 è riportato uno schema a blocchi della dinamica del sistema decomposta come in (7.29).

Data la struttura triangolare a blocchi della matrice $\tilde{A}$ della decomposizione canonica, risulta che gli autovalori di A (che sono coincidenti con quelli di $\tilde{A}$, visto che sono invarianti per trasformazioni di coordinate) sono dati dall'insieme degli autovalori di A_r (detti autovalori raggiungibili) e di quelli di $A_{\bar{r}}$ (detti autovalori non raggiungibili). Relativamente alla decomposizione degli autovalori in raggiungibili e non, si ha il seguente risultato.

Teorema 7.2 *Gli autovalori non raggiungibili non sono poli della funzione di trasferimento $G(z)$ del sistema.*

Proof: Poiché la funzione di trasferimento è invariante rispetto alla base in cui si rappresenta lo stato del sistema, risulta

$$
\begin{aligned}
G(z) &= C(zI - A)^{-1}B = \tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \\
&= \begin{bmatrix} C_r & C_{\bar{r}} \end{bmatrix} \left(zI - \begin{bmatrix} A_r & A_{r\bar{r}} \\ 0 & A_{\bar{r}} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C_r & C_{\bar{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - A_r)^{-1} & \star \\ 0 & (zI - A_{\bar{r}})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= C_r(zI - A_r)^{-1}B_r
\end{aligned}
$$

Si osserva quindi che $G(z)$ è di fatto pari alla funzione di trasferimento del solo sottosistema raggiungibile. In particolare $G(z)$ non ha come poli gli autovalori di $A_{\bar{r}}$.

Osservazione 7.3 In base al risultato precedente, è chiaro che la funzione di trasferimento $G(z)$ è determinata solo da alcuni dei modi del sistema, quelli raggiungibili. Questo fatto non sorprende se si tiene conto di come risulta decomposto il sistema in figura 7.2, dove è evidente che la componente non raggiungibile $z_k^{\bar{r}}$ dello stato non è influenzata in alcun modo dall'ingresso ed è in evoluzione libera. Poiché la funzione di trasferimento esprime il legame tra l'ingresso e l'uscita del sistema in termini di risposta forzata, se l'ingresso non influenza alcuni dei modi del sistema, tali modi non possono comparire nel legame ingresso-uscita. Gli autovalori del sistema che non compaiono come poli nella funzione di trasferimento, evidentemente, danno luogo a cancellazioni polo/zero nell'espressione di $G(z)$.

7.2.2 Controllabilità

Si consideri adesso un problema specifico di raggiungibilità, cioè il problema di determinare una sequenza d'ingresso U_n tale da portare a zero in n passi lo stato del sistema a partire da un dato stato iniziale x_0, ovvero una sequenza d'ingresso tale che

$$0 = A^n x_0 + RU_n \tag{7.30}$$

Tale problema ha soluzione se e solo se $-A^n x_0$ è raggiungibile dallo stato nullo, ovvero

$$-A^n x_0 \in \mathcal{R} \tag{7.31}$$

Il problema ammette dunque soluzione per ogni x_0 se e solo se lo stato $-A_n x_0$ (i.e., l'immagine di x_0 attraverso A^n) è uno stato raggiungibile per ogni x_0, ovvero se e solo se

$$\mathrm{Im}[A^n] \subseteq \mathcal{R} \tag{7.32}$$

In questo caso il sistema è detto *completamente controllabile*.
Se un sistema è completamente raggiungibile, allora è anche completamente controllabile, infatti banalmente

$$\mathrm{Im}[A^n] \subseteq \mathcal{R} = \mathbb{R}^n \tag{7.33}$$

Proprietà 7.1 Un sistema è completamente controllabile se e solo se gli autovalori non raggiungibili sono tutti nulli. Infatti, poiché l'evoluzione dei modi non raggiungibili è libera e non è influenzata dall'ingresso, lo stato del sistema può andare a zero in n passi per qualunque stato iniziale in corrispondenza di un opportuno ingresso se e solo se l'evoluzione libera della parte non raggiungibile va a zero in tempo finito per qualunque stato iniziale, ovvero se e solo se $A_{\bar{r}}$ ha autovalori tutti nulli.

7.3 Allocazione degli autovalori

Dato il sistema con ingresso u_k scalare

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{k+1} & = & Ax_k + Bu_k \quad ; \quad x_k \in \mathbb{R}^n, \quad u_k \in \mathbb{R} \\ y_k & = & Cx_k \end{array} \right. \tag{7.34}$$

si consideri la legge di controllo in retroazione dallo stato statica e stazionaria

$$u_k = Fx_k + v_k \tag{7.35}$$

Il sistema ad anello chiuso risulta

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{k+1} & = & (A+BF)x_k + Bv_k \\ y_k & = & Cx_k \end{array} \right. \tag{7.36}$$

Sia T una trasformazione che porta il sistema in decomposizione di raggiungibilità $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ e sia $\tilde{F} = FT = [F_r \; F_{\bar{r}}]$ la matrice F nella nuova base.[3] La matrice A del sistema ad anello chiuso in decomposizione canonica vale

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} = \begin{bmatrix} A_r & A_{r\bar{r}} \\ 0 & A_{\bar{r}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_r & F_{\bar{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_r + B_r F_r & A_{r\bar{r}} + B_r F_{\bar{r}} \\ 0 & A_{\bar{r}} \end{bmatrix} \tag{7.37}$$

---

[3]Se il sistema è completamente raggiungibile, allora T sarà l'identità.

da cui si osserva che *solo il sottosistema raggiungibile ha un'evoluzione che viene modificata dall'applicazione del controllo*, e in particolare vengono alterati solo gli autovalori raggiungibili di A.
Si vuole adesso determinare una legge di retroazione dallo stato della forma (7.35) in modo che il sistema ad anello chiuso soddisfi opportune specifiche. Note le relazioni tra le prestazioni della risposta libera o forzata (deadbeat, risposta del primo/secondo ordine, ecc.) ed i poli o autovalori corrispondenti, si tratta di progettare la legge di controllo in modo da posizionare gli autovalori (necessariamente della sola parte raggiungibile) del sistema in modo conforme alle specifiche (problema di *allocazione degli autovalori*).
Dato quindi un sistema *completamente raggiungibile* (che eventualmente rappresenta la sola parte raggiungibile di un sistema che non lo è) ad un solo ingresso, cerchiamo una legge di retroazione dallo stato in modo che gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ del sistema ad anello chiuso siano pari a valori desiderati.
Sussiste il seguente risultato, che forniamo senza dimostrazione.

Teorema 7.3 *Un sistema è completamente raggiungibile se e solo se esiste una trasformazione di coordinate T nello spazio degli stati che porta il sistema nella cosiddetta forma canonica di raggiungibilità, in cui le matrici $\hat{A} = T^{-1}AT$ e $\hat{B} = T^{-1}B$ sono date da*

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.38}$$

Tale trasformazione di coordinate è data da

$$T = RH \tag{7.39}$$

dove R è la matrice di raggiungibilità del sistema, H è la matrice

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \ldots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \tag{7.40}$$

e $a_{n-1}, \ldots a_0$ sono i coefficienti del polinomio caratteristico di A

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = \det(\lambda I - A) \tag{7.41}$$

La matrice $\hat{A}$ della forma canonica di raggiungibilità è detta in *forma compagna del polinomio caratteristico*, così chiamata perché gli unici coefficienti diversi da 0 e da 1 che compaiono in $\hat{A}$ sono quelli di $p_A(\lambda)$.
Si consideri un sistema raggiungibile ed una legge di controllo della forma (7.35) definita da una matrice di retroazione F. Si porti il sistema in forma canonica di raggiungibilità $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ mediante la trasformazione $T = RH$. Sia $\hat{F} = FT$ la matrice F espressa nella nuova base. Scrivendo

$$\hat{F} = [\hat{f}_0 \ \hat{f}_1 \ \ldots \ \hat{f}_{n-1}] \tag{7.42}$$

dove $\hat{f}_i$ sono opportuni coefficienti, il sistema ad anello chiuso in forma canonica risulta dato da

$$\hat{A} + \hat{B}\hat{F} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ -a_0 + \hat{f}_0 & -a_1 + \hat{f}_1 & \ldots & -a_{n-1} + \hat{f}_{n-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.43}$$

e quindi, in base al fatto che la matrice $\hat{A}$ è in forma compagna, il polinomio caratteristico ad anello chiuso (che, ricordiamolo, è invariante rispetto a trasformazioni di coordinate e quindi è pari al polinomio caratteristico di $A + BF$) vale

$$p_{A+BF}(\lambda) = p_{\hat{A}+\hat{B}\hat{F}}(\lambda) = \lambda^n + (a_{n-1} - \hat{f}_{n-1})\lambda^{n-1} + \ldots + (a_0 - \hat{f}_0) \tag{7.44}$$

È quindi possibile fissare arbitrariamente i coefficienti del polinomio caratteristico (e quindi gli autovalori) del sistema ad anello chiuso scegliendo la matrice di retroazione

$$\hat{F} = [a_0 - d_0 \ \dots \ a_{n-1} - d_{n-1}] \tag{7.45}$$

dove

$$p_d(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_0 \tag{7.46}$$

è il polinomio caratteristico ad anello chiuso che si desidera imporre.
La matrice di retroazione nella base originaria risulta

$$F = \hat{F}T^{-1} = \hat{F}(RH)^{-1} = [a_0 - d_0 \ \dots \ a_{n-1} - d_{n-1}](RH)^{-1} \tag{7.47}$$

La formula (7.47) va sotto il nome di *formula di allocazione degli autovalori*. Mediante tale formula è possibile calcolare la matrice di retroazione F tale che il sistema ad anello chiuso abbia il polinomio caratteristico desiderato (7.46).
Una formula alternativa che risolve lo stesso problema è la *formula di Ackermann*

$$F = -[0 \ 0 \ \dots \ 1]R^{-1}p_d(A) \tag{7.48}$$

dove

$$p_d(A) = A^n + d_{n-1}A^{n-1} + \ldots + d_0 I \tag{7.49}$$

Osservazione 7.4 In Scilab, per l'allocazione degli autovalori, si usa il comando

```
F=-ppol(A,B,P)
```

dove `P`= $[\lambda_1 \ \dots \ \lambda_n]$ è il vettore degli autovalori ad anello chiuso desiderati (non il vettore dei coefficienti del polinomio caratteristico desiderato).

Osservazione 7.5 Per problemi di piccole dimensioni, se non si ha a disposizione il calcolatore, si può impostare direttamente l'equazione

$$p_{A+BF}(\lambda) = p_d(\lambda) \tag{7.50}$$

con $F = [f_0 \ f_1 \ \dots \ f_{n-1}]$ e risolvere nelle incognite $f_0, \ldots, f_{n-1}$ uguagliando i polinomi coefficiente a coefficiente.

Osservazione 7.6 Se il sistema non è completamente raggiungibile, i metodi visti possono essere impiegati per l'allocazione degli autovalori del solo sottosistema raggiungibile. Gli autovalori del sottosistema non raggiungibile non possono mai essere cambiati.

7.3.1 Stabilizzabilità

Si consideri il problema di determinare, se esiste, una legge di controllo in retroazione dallo stato statica stazionaria che renda un dato sistema asintoticamente stabile ad anello chiuso, cioè con tutti autovalori a modulo strettamente minore di 1.
La soluzione a questo problema è un caso particolare del problema di allocazione degli autovalori. Possiamo disringuere due casi:

- Se il sistema è completamente raggiungibile, il problema ha chiaramente soluzione sotto forma di retroazione statica dello stato, poiché in questo modo è possibile allocare arbitrariamente gli autovalori, ed in particolare è possibile renderli tutti asintoticamente stabili.
- Se il sistema non è completamente raggiungibile, il problema ha soluzione solo se gli autovalori del sottosistema non raggiungibile, che non sono modificabili tramite retroazione, sono già asintoticamente stabili.

Definizione 7.5 Un sistema è detto *stabilizzabile* se i suoi autovalori non raggiungibili sono asintoticamente stabili.
Una matrice di retroazione che stabilizza un sistema definito dalle matrici A e B si dice che stabilizza la coppia (A, B).

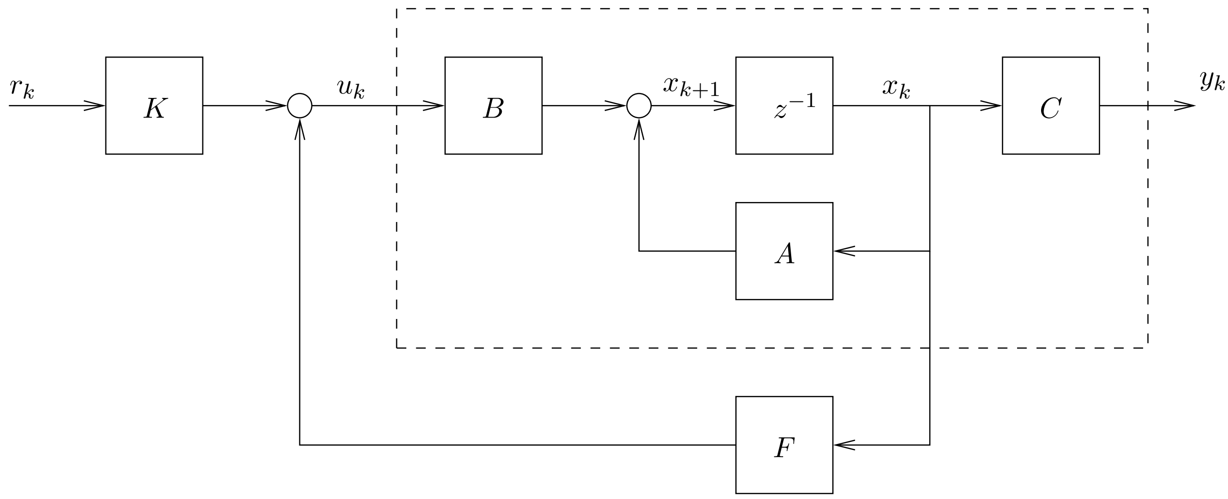

Figura 7.3: Schema per inseguimento con scalatura del riferimento.

7.3.2 Allocazione degli autovalori: specifiche

Gli autovalori di un sistema determinano i modi della risposta libera del sistema stesso e, limitatamente a quelli che compaiono come poli nella funzione di trasferimento, le caratteristiche del transitorio della risposta forzata. L'allocazione degli autovalori può essere quindi utilizzata per imporre un comportamento desiderato tanto alla risposta libera quanto, ad esempio, al transitorio della risposta al gradino. Per la scelta degli autovalori da imporre nei confronti di questi due problemi, possono essere applicati gli stessi criteri usati nella sintesi diretta per il transitorio della risposta al gradino. Ad esempio, per ottenere un transitorio ad anello chiuso corrispondente ad assegnate specifiche di smorzamento e rapidità, due degli autovalori del sistema possono essere allocati in posizione dominante con smorzamento e pulsazione naturale corrispondenti alle specifiche, mentre i poli rimanenti possono essere posti in posizione non dominante, ad esempio in zero, in modo che la dinamica dei modi relativi si esaurisca in un tempo finito. Posizionare tutti gli autovalori in zero significa ottenere tanto una risposta libera (a patto che eventuali autovalori non raggiungibili siano già in zero), quanto un transitorio della risposta al gradino, di tipo deadbeat.

7.4 Inseguimento del riferimento

Vogliamo adesso determinare degli schemi di controllo che sfruttino l'allocazione degli autovalori mediante retroazione dallo stato e che permettano di ottenere, oltre alla stabilità del sistema ad anello chiuso e l'assegnazione delle caratteristiche del transitorio, anche l'inseguimento di un segnale riferimento r_k a gradino.
Un primo schema può essere ottenuto mediante una semplice scalatura del segnale di riferimento per un opportuno fattore scalare K, cioè mediante una legge di controllo della forma

$$u_k = Fx_k + Kr_k \tag{7.51}$$

(vedi figura 7.3) Il sistema ad anello chiuso risulta

$$\begin{cases} x_{k+1} &= (A+BF)x_k + BKr_k \\ y_k &= Cx_k \end{cases} \tag{7.52}$$

a cui corrisponde la funzione di trasferimento

$$W(z) = C[zI - (A+BF)]^{-1}BK \tag{7.53}$$

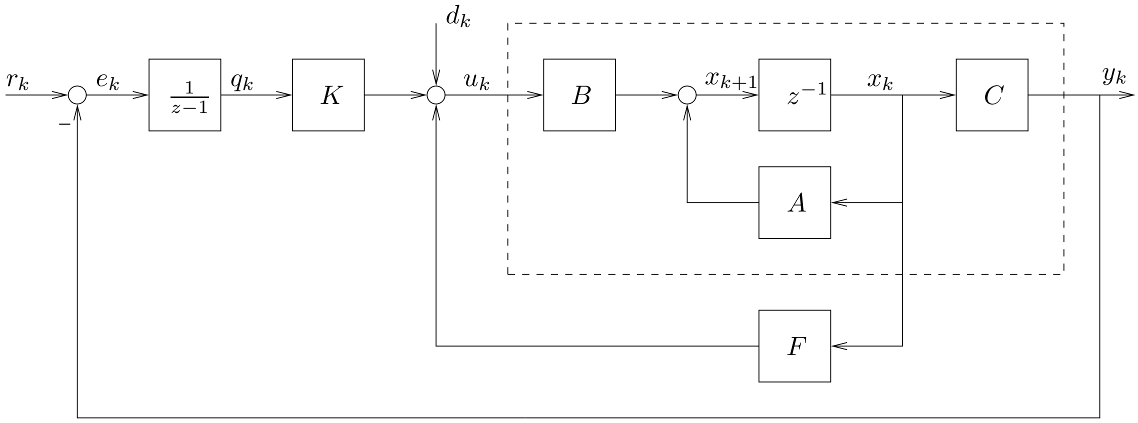

Figura 7.4: Schema di controllo con retroazione dallo stato ed azione integrale

il cui guadagno in continua vale

$$W(1) = C[I - (A + BF)]^{-1} BK \tag{7.54}$$

Imponendo che tale guadagno in continua sia unitario, si ricava il valore di K da applicare in modo da ottenere l'inseguimento senza errore a regime del gradino

$$K = \frac{1}{C(I - (A + BF))^{-1} B} \tag{7.55}$$

Osservazione 7.7 La matrice $I - (A + BF)$ è invertibile se, come dev'essere (essendo il sistema ad anello chiuso asintoticamente stabile), non ci sono autovalori ad anello chiuso in $z = 1$.

Questo approccio garantisce errore a regime di inseguimento al gradino nullo ma non tiene conto dell'errore a regime dovuto ad eventuali disturbi (costanti) che possono agire in qualunque punto del sistema (ad esempio sul comando o sull'uscita). Nella sintesi ingresso-uscita, l'inseguimento del gradino e l'annullamento a regime dell'effetto di disturbi costanti si ottiene tipicamente inserendo un termine integrale nel compensatore. Un approccio simile può essere applicato anche alla sintesi nello spazio degli stati.

7.4.1 Retroazione dallo stato con azione integrale

Si consideri lo schema di controllo in figura 7.4. A tale schema corrispondono le equazioni di evoluzione

$$\begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & Ax_k + B(Fx_k + Kq_k + d_k) \\ q_{k+1} & = & q_k + e_k \; = \; q_k - y_k + r_k \; = \; q_k - Cx_k + r_k \end{array} \tag{7.56}$$

Si osservi che l'introduzione dell'integratore, che è un blocco con dinamica, introduce una nuova variabile di stato q_k. Lo stato ψ_k del sistema complessivo è dato dall'insieme di x_k e dello stato q_k dell'integratore, $\psi_k = [x_k' \; q_k]'$. In forma compatta, l'evoluzione del sistema si scrive allora

$$\psi_{k+1} = (A_{aug} + B_{aug} F_{aug}) \psi_k + \begin{bmatrix} Bd_k \\ r_k \end{bmatrix} \tag{7.57}$$

dove

$$A_{aug} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{aug} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_{aug} = \begin{bmatrix} F & K \end{bmatrix} \tag{7.58}$$

Si supponga $d_k = d$ (disturbo costante) e $r_k = r$ (riferimento a gradino). Se si sceglie F_{aug} (ovvero l'insieme di F e K) in modo da stabilizzare asintoticamente la coppia (A_{aug}, B_{aug}), risolvendo quindi il problema di allocazione degli autovalori di dimensione $n+1$ relativo al sistema complessivo, allora l'errore a regime di inseguimento al gradino e l'errore a regime sull'uscita y_k dovuto al disturbo costante sono nulli per il principio del modello interno: infatti si viene a realizzare un anello di controllo internamente stabile con un integratore a monte del punto di entrata del disturbo. Naturalmente, sempre in base al principio del modello interno, lo schema funziona anche se il disturbo costante entra in un altro punto del sistema tra l'integratore e l'uscita, ad esempio sovrapposto all'uscita stessa.